Lezione 3
Codifica della informazione (2)

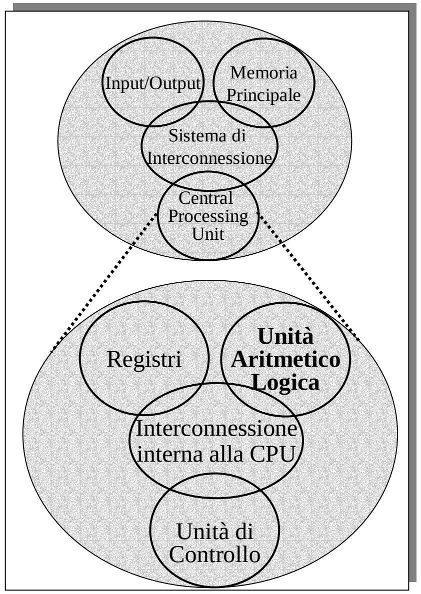
Vittorio Scarano

Architettura

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno

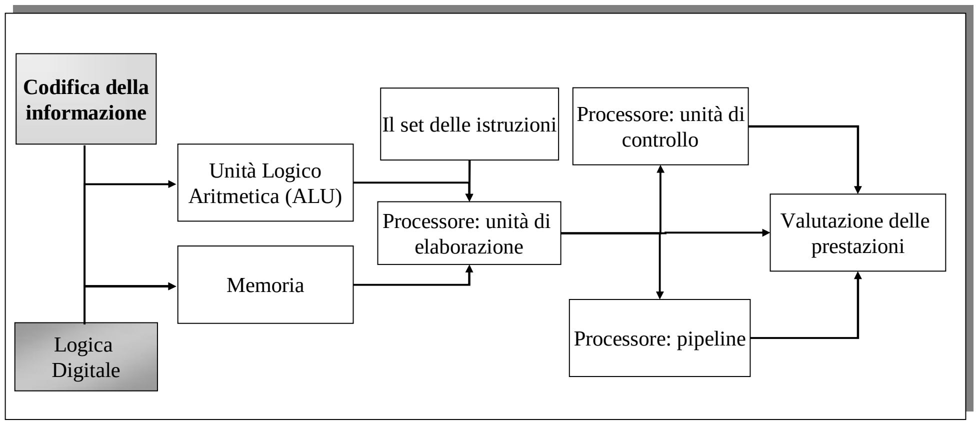
Un quadro della situazione



- Dove siamo…
  - Codifica della informazione
    - Rappresentazione degli interi
      - Interi con segno
- Dove stiamo andando..
  - aritmetica binaria
- Perché:
  - per poter progettare la Unità Aritmetico-Logica

Dove siamo nel corso…

- Codifica della informazione: numeri interi



Interi con segno

- Finora abbiamo solamente considerato la rappresentazione di interi **positivi**
- Due rappresentazioni:
  - rappresentazione con modulo e segno
  - rappresentazione in complemento a due

Rappresentazione con modulo e segno

- Per rappresentare un numero con segno:
  - si usa il bit più significativo per indicare il + (=0) e - (=1)
- Si consideri un numero espresso in base 2

  $x_{(n-1)}\, x_{(n-2)} \,..\, x_2\, x_1\, x_0$
- Quindi, il valore del numero è la somma dei pesi delle n-1 bit meno significativi con il bit più significativo che indica il segno:

$$A = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i\right) & \text{se } x_{n-1} = 0 \\ -\sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i\right) & \text{se } x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

Alcuni problemi del “modulo e segno”

- Addizione e sottrazione complicata da
  - segni dei numeri
  - modulo dei numeri
- Doppia rappresentazione dello zero:
  - infatti lo zero può essere rappresentato (con n=8 bit)
    - sia da 00000000
    - che da 10000000
- Non va bene! Vorremmo…
  - una rappresentazione che faciliti la progettazione della ALU
    - che non deve essere complicata da problemi nati dalla rappresentazione

Organizzazione della lezione

- Rappresentazione degli interi con segno in “complemento a due”
  - Introduzione
  - Conversione di interi con segno in complemento a due

Rappresentazione in complemento a 2

- Si consideri un numero espresso in base 2

  $x_{(n-1)}\, x_{(n-2)} \,..\, x_2\, x_1\, x_0$
- Il bit più significativo x_{n-1} assume peso **negativo** $\mathbf{-2^{n-1}}$
- Quindi, il valore di un numero espresso in complemento a due è:

$$A = -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i\right)$$

Interi positivi e negativi

$$A = -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right)$$

- Se il bit x_{n-1} vale 0:
  - l'intero è positivo e i restanti n-1 bit indicano il valore
- Se il bit x_{n-1} vale 1:
  - l'intero è negativo

Architettura (2003-2004). Vi.ttorio Scarano

Complemento a 2: esempi (1)

$$A = -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right)$$

x_3	x_2	x_1	x_0
0	1	0	1

- Essendo composta da n=4 cifre il suo valore è:

$$-x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right) = -x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 =$$

$$= -0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Architettura (2003-2004). Vi.ttorio Scarano

Complemento a 2: esempi (2)

$$A = -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right)$$

x_3	x_2	x_1	x_0
1	1	0	1

- Essendo composta da n=4 cifre il suo valore è:

$$-x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right) = -x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 =$$

$$= -1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3$$

Architettura (2003-2004). Vi.ttorio Scarano

Complemento a 2: esempi (3)

$$A = -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(x_i \cdot 2^i \right)$$

- Con n=4 bit si hanno i seguenti valori:

0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0

1000	-8
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1

Conversione decimale-binario (con complemento a due)

- Si deve fissare il numero n di bit usati
- Se il numero X è positivo:
  - si converte X in decimale negli n-1 bit meno significativi
  - si mette il bit più significativo a 0
- Se il numero X è negativo:
  - si converte in decimale $2^{n-1} + X$ negli n-1 bit meno significativi
  - si mette il bit più significativo a 1
  - perché: sia $x_{n-1}\, x_{n-2}\, ..\, x_2\, x_1\, x_0$ la codifica binaria ottenuta
    - il valore è $-1 \cdot 2^{n-1} + (2^{n-1} + X) = X$

Esempi di conversione (1)

- Convertiamo X=-4 su n=4 bit
  - allora convertiamo $2^{n-1} + X$ = 8 - 4 = 4 nei 3 bit meno significativi

x_3	x_2	x_1	x_0
	1	0	0

- Ora mettiamo il bit più significativo a 1

x_3	x_2	x_1	x_0
1	1	0	0

$$-x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\left(x_i \cdot 2^i\right) = -x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 =$$

$$= -1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -4$$

Esempi di conversione (2)

- Convertiamo X=-4 su n=5 bit
  - allora convertiamo $2^{n-1} + X$ = 16 - 4 = 12 nei 4 bit meno significativi

x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
	1	1	0	0

- Ora mettiamo il bit più significativo a 1

x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
1	1	1	0	0

$$-x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\left(x_i \cdot 2^i\right) = -x_4 \cdot 2^4 + x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 =$$

$$= -1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -4$$

Alcuni commenti sulla conversione

- Per convertire decimale-binario (complemento a 2) esistono anche altri metodi
- Vedremo, nelle prossime lezioni, che
  - è facile calcolare, data la rappresentazione binaria in complemento a due di A, il suo negato cioè -A
- Quindi, per convertire un intero A da decimale a binario in complemento a due:
  - se positivo, usare le regole usuali **ed aggiungere uno 0 come bit più significativo**
  - se negativo, convertire -A (=positivo), **aggiungere uno 0 come bit più significativo** e poi negare la rappresentazione binaria

Esercizi

- Convertire in base 2 (con il complemento a 2)
  - 15 su 6 bit
  - -12 su 6 bit
  - 0 su 5 bit
  - 0 su 4 bit
  - -5 su 7 bit
  - -5 su 6 bit
  - -5 su 4 bit
  - -1 su 32 bit

Problemi (1)

- Quale è l'intero negativo più piccolo rappresentabile con *n* bit (rappresentazione in complemento a due)?
- Come si può convertire la rappresentazione di un numero in base 2 su *n* bit (in complemento a due) ad una rappresentazione dello stesso numero in base 2 su $m>n$ bit?
  - Ad esempio: se su n=4 bit, come si può convertire 1101_2 (che vale -3_{10}) su m = 6 bit?
  - Non è necessario passare attraverso la rappresentazione in base 10…
  - *Un suggerimento:*
    - studiare sullo Stallings a pag. 308-309-310

Problemi (2)

- Come si può effettuare in maniera veloce
  - la moltiplicazione di un intero rappresentato in binario per potenze di 2
  - la divisione di un intero rappresentato in binario per una potenza di 2 (calcolando sia il quoziente che il resto)
  - *Suggerimenti:*
    - provate ad effettuare una moltiplicazione "binaria" con il vecchio algoritmo imparato a scuola elementare… ma in binario!
    - fate alcune prove
      - con la rappresentazione binaria di 3 (ad esempio) e la rappresentazione binaria di 3·4=12
      - con la rappresentazione binaria di 13 (ad esempio) e la rappresentazione binaria di 3=13/4 con resto di 1

Problemi (3)

- Dimostrare che la rappresentazione di -1 (in base 10) su n bit, in complemento a due, è sempre composta da tutti uni
  - *Attenzione: l'argomento deve valere per tutti gli n*