

Lezione 2

Codifica della informazione

Vittorio Scarano

Architettura

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno



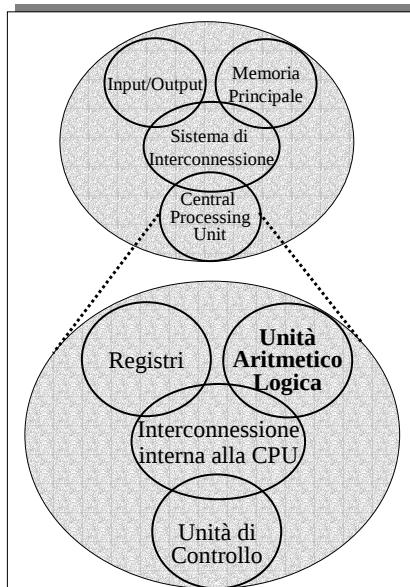
Organizzazione della lezione

- Un quadro della situazione:
 - dove siamo, dove stiamo andando e perché
- La codifica della informazione
 - Notazione posizionale
- Rappresentazione in base 2 degli interi
 - Conversione binario-decimale degli interi
- Rappresentazione in base 2 dei numeri frazionari
 - Conversione binario decimale dei numeri frazionari
- Rappresentazione in base 16

Architettura (2003-2004). Vittorio Scarano

2

Un quadro della situazione

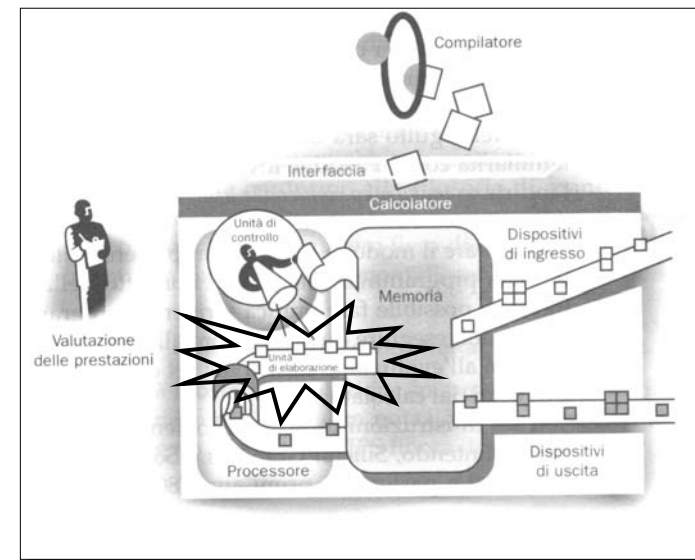


- Dove siamo...
 - Codifica della informazione
 - Rappresentazione degli interi
- Dove stiamo andando..
 - aritmetica binaria
- Perché:
 - per poter progettare la Unità Aritmetico-Logica (ALU)

Architettura (2003-2004). Vittorio Scarano

3

Dove si trova la ALU...

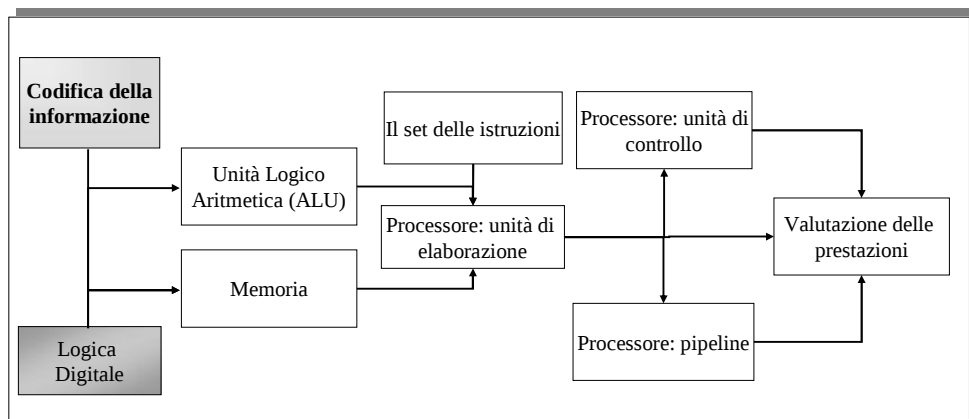


Architettura (2003-2004). Vittorio Scarano

4

Dove siamo nel corso...

- Codifica della informazione: numeri interi



“Informatica”?



= Trattamento automatico delle informazioni



Informatica !

Informazioni e Calcolatori Digitali

- Informazioni
 - conoscenza orientata in una materia
 - rappresentazione di cose concrete o astratte mediante simboli
- Le informazioni vengono rappresentate da dati
- I dati vengono codificati in forma numerica
- Calcolatori digitali (*digit* = cifra)

Definizione operativa di *informazione*

“L’informazione viene rappresentata attraverso un numero finito di simboli che sono affidabili e facilmente distinguibili”

- “Numero finito di simboli” (alfabeto)
 - Simboli usati per gli interi: cifre (0,1,...,9)
 - Lettere usate per le parole: ‘a’, ‘b’, ... ‘Z’
- “Affidabili”
 - Immutabili nel tempo
- “Facilmente distinguibili”
 - Per evitare errori di interpretazione

La codifica degli interi

- Necessario distinguere tra un intero e la sua rappresentazione:
 - L'intero 2 è rappresentato da:
 - 2 in base 10
 - II in notazione romana
 - 𐎶𐎵 in notazione cuneiforme babilonese
 - 10 in base 2
 - β in greco antico
 - etc. etc.
- Storicamente, di grande vantaggio risultò la introduzione della notazione posizionale pesata utilizzando una base fissata e “adatta” per gli usi

9

Sistemi di numerazione

- Sistema per rappresentare numeri secondo una *base*
 - La base rappresenta il numero di cifre diverse utilizzate per rappresentare i numeri
- Quindi:
 - Il sistema di numerazione in base 10 usa 10 cifre:
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 - Il sistema di numerazione in base 3 usa 3 cifre:
 - 0, 1, 2
 - Il sistema di numerazione in base 2 (binario) usa 2 cifre:
 - 0, 1

10

Notazione posizionale (1)

- Nei sistemi di numerazione il *peso* di ogni cifra dipende dalla posizione:
- L'intero 853 (in base 10) vale:
 - 8 centinaia ($8 \cdot 10^2 = 8 \cdot 100$) +
 - 5 decine ($5 \cdot 10^1 = 5 \cdot 10$) +
 - 3 unità ($3 \cdot 10^0 = 3 \cdot 1$)
- L'intero 675 (in base 10) vale:
 - 6 centinaia ($6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100$) +
 - 7 decine ($7 \cdot 10^1 = 7 \cdot 10$) +
 - 5 unità ($5 \cdot 10^0 = 5 \cdot 1$)

11

Notazione posizionale (2)

- In generale, se scriviamo il numero in base b
$$x_{(n-1)} x_{(n-2)} \dots x_2 x_1 x_0$$
 - dove ogni cifra in posizione i viene indicata con x_i
- Una cifra in posizione i di un numero in base b
 - ha peso $x_i \cdot b^i$
- Quindi, il valore del numero è la somma dei pesi di ogni cifra:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot b^i)$$

12

Notazione posizionale (3)

- Quindi per la rappresentazione di 853 si ha che:
 - $x_2=8$
 - $x_1=5$
 - $x_0=3$
- Essendo composta da $n=3$ cifre il suo valore è:
$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot b^i) = x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 = 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Notazione posizionale (4)

- Quindi per la rappresentazione di 675 si ha che:
 - $x_2=6$
 - $x_1=7$
 - $x_0=5$
- Essendo composta da $n=3$ cifre il suo valore è:
$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot b^i) = x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 = 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Il sistema binario (1)

- Date le caratteristiche tecnologiche, la rappresentazione in base 10 risulta poco agevole
- Si usa la base 2:
 - Ricordiamo che la base indica il numero di cifre utilizzate
 - Quindi usiamo solamente due cifre, indichiamole con 0 e 1
- Per distinguere dalla base utilizzata, usiamo un pedice
 - I numeri in base 10 saranno scritti come 853_{10} e 675_{10}
 - I numeri in base 2 saranno scritti come 100_2 e 11_2

Il sistema binario (2)

- Si consideri un numero
$$x_{(n-1)} x_{(n-2)} \dots x_2 x_1 x_0$$
- Una cifra in posizione i di un numero in base b
 - ha peso $x_i \cdot 2^i$
- Quindi, il valore del numero è la somma dei pesi di ogni cifra:
$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot 2^i)$$
- Il bit di posizione 0 viene detto *meno significativo* (peso minore)
- Il bit a 1 di posizione maggiore viene detto *più significativo* (ha peso maggiore)

Il sistema binario (3)

- Quindi per la rappresentazione di 101 si ha che:

$$- x_2 = 1$$

$$- x_1 = 0$$

$$- x_0 = 1$$

- Essendo composta da $n=3$ cifre il suo valore è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot 2^i) = x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

17

Il sistema binario (4)

- Quindi per la rappresentazione di 1101 si ha che:

$$- x_3 = 1$$

$$- x_2 = 1$$

$$- x_1 = 0$$

$$- x_0 = 1$$

- Essendo composta da $n=4$ cifre il suo valore è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot 2^i) = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$$

18

Conversione decimale-binario

- Procedimento che a partire da un intero decimale N
 - ottiene la rappresentazione di N in binario
- Sequenza ripetuta di divisioni:
 - Dividiamo N per 2 (divisione tra interi)
 - Si ottiene un quoziente N_1 (intero) ed un resto R_1 (intero) che può essere 0 oppure 1
 - Il resto R_1 rappresenta il bit meno significativo mentre il quoziente N_1 viene diviso per 2 (divisione tra interi)
 - Si ottiene un quoziente N_2 (intero) ed un resto R_2 (intero) che può essere 0 oppure 1
 - Il resto R_2 rappresenta il secondo bit meno significativo mentre il quoziente N_2 viene diviso per 2 (divisione tra interi)
 - ... fino a quando N_i vale 1

19

Esempio: conversione in binario di 11

	Quoziente	Resto
• $11/2$	= 5	con resto 1
• $5/2$	= 2	con resto 1
• $2/2$	= 1	con resto 0
• $1/2$	= 0	con resto 1

- Verifichiamo:

- 1011_2 è uguale in base 10 a:

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$$

20

Esempio: conversione in binario di 15

- | | Quoziente | Resto |
|----------|-----------|-------------|
| • $15/2$ | $= 7$ | con resto 1 |
| • $7/2$ | $= 3$ | con resto 1 |
| • $3/2$ | $= 1$ | con resto 1 |
| • $1/2$ | $= 0$ | con resto 1 |
-
- Verifichiamo:
 - 1111_2 è uguale in base 10 a:
 - $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15_{10}$

21

Rappresentazione in altre basi

- La rappresentazione in base 10 è
 - Compatta
 - con poche cifre si riesce a rappresentare numeri grandi
 - Familiare
 - Poco adatta per la rappresentazione di numeri in un calcolatore
- La rappresentazione in base 2 è:
 - Poco compatta
 - Adatta per la rappresentazione di numeri in un calcolatore

22

Il sistema esadecimale (1)

- Rappresentazione in base 16
 - Usa 16 'cifre': 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
- Il valore delle cifre:
 - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 hanno il consueto valore decimale
 - A vale 10, B vale 11, ... , F vale 15
- Stesso meccanismo della notazione posizionale pesata:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot (16)^i)$$

23

Il sistema esadecimale (2)

- Quindi per la rappresentazione di $(1A5)_{16}$ si ha che:
 - $x_2 = 1$
 - $x_1 = A$ (valore 10)
 - $x_0 = 5$
- Essendo composta da $n=3$ cifre il suo valore è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot 16^i) = x_2 \cdot 16^2 + x_1 \cdot 16^1 + x_0 \cdot 16^0 =$$

$$= 1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 5 \cdot 1 = 421$$

↑
valore di 1
↑
valore di A
↑
valore di 5

24

Il sistema esadecimale (3)

- Quindi per la rappresentazione di $(BAC)_{16}$ si ha che:
 - $x_2 = B$ (valore 11)
 - $x_1 = A$ (valore 10)
 - $x_0 = C$ (valore 12)
- Essendo composta da $n=3$ cifre il suo valore è:

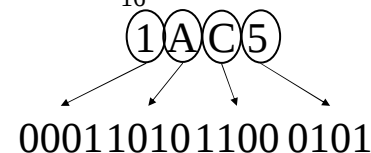
$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot 16^i) = x_2 \cdot 16^2 + x_1 \cdot 16^1 + x_0 \cdot 16^0 =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore di B}}}{11} \cdot 256 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore di A}}}{10} \cdot 16 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore di C}}}{12} \cdot 1 = 2816 + 160 + 12 = 2988$$

25

La base 16 e la base 2 (1)

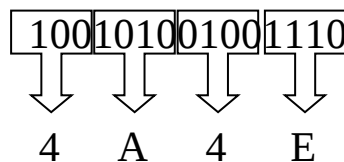
- La conversione tra base 16 e base 2 (e viceversa) è molto semplice
- Infatti, per convertire da base 16 a base 2 basta:
 - Convertire una cifra esadecimale alla volta nella corrispondente rappresentazione in base 2
- Esempio:
 - Per convertire $1AC5_{16}$ in base 2:



26

La base 16 e la base 2 (2)

- Per convertire da base 2 a base 16 basta:
 - Convertire a gruppi di 4 bit per volta (con la corrispondente cifra esadecimale) partendo dai quattro bit meno significativi
- Esempio:
 - Per convertire 100101001001110_2 in base 16:



27

Alcuni commenti sulla base 16

- Rappresentazione compatta di stringhe di bit
 - La conversione base 16 e base 2 è facile
- Rappresentazione con sole 2 cifre esadecimali di valori binari memorizzati in 8 bit (Byte)
 - rappresentazione dei colori RGB
 - indirizzi IP (Internet Protocol)
- Storicamente, introdotto per sequenze di bootstrap

28

Esercizi

- Convertire in base 2 (e verificare il risultato):
 - 175_{10}
 - 98_{10}
- Convertire in base 10:
 - 10010101101_2
 - 00000000001_2
- Convertire in base 16:
 - 11100100011001_2
- Convertire in base 2:
 - 175_{16}

29

Problemi

- Una altra base spesso utilizzata è la base 8. Trovare una maniera per convertire un numero in base 8 in base 2 (senza passare per base 10)
Suggerimento: se $16=2^4$, e la conversione da base 16 a base 2 è semplice... allora per $8=2^3$ la conversione è...
- Che caratteristica hanno i numeri pari in base 2? Ed i numeri dispari?
Fate alcune prove e provate a trovare una regola
- Che caratteristica hanno i numeri in base 2 che sono divisibili per 4?

30

Lezione 2 (b) Codifica della informazione (2)

Vittorio Scarano

Architettura

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno



Organizzazione della lezione

- Rappresentazione in base 2 dei numeri frazionari
- Conversione binario decimale dei numeri frazionari
- Rappresentazione degli interi con segno
 - rappresentazione a modulo e segno

32

Notazione posizionale per i frazionari (1)

- Per i numeri con la frazione il meccanismo è lo stesso
 - vengono usate posizioni e potenze negative della base

- Se scriviamo un numero frazionario in base b

$$x_{(n-1)} x_{(n-2)} \dots x_2 x_1 x_0 \cdot x_{-1} x_{-2} x_{-3} \dots x_{-m}$$

- dove ogni cifra in posizione i viene indicata con x_i

- Una cifra in posizione i di un numero in base b

– ha peso $x_i \cdot b^i$

- Quindi, il valore del numero è la somma dei pesi di ogni cifra:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot b^i) + \sum_{i=-1}^{-m} (x_i \cdot b^i)$$

33

Notazione posizionale per i frazionari (2)

- Quindi per la rappresentazione di 853.43 si ha che:

$$- x_2 = 8, x_1 = 5, x_0 = 3$$

$$- x_{-1} = 4, x_{-2} = 3$$

- Essendo composta da $n=3$ cifre intere e da $m=2$ cifre decimali il suo valore è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot b^i) + \sum_{i=-1}^{-m} (x_i \cdot b^i) =$$

$$= x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0 + x_{-1} \cdot 10^{-1} + x_{-2} \cdot 10^{-2} =$$

$$= 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

34

Conversione decimale-binario per i numeri con parte frazionaria

- Procedimento che a partire da una frazione $F < 1$
 - ottiene la rappresentazione di F in binario (o una approssimazione)

- Sequenza ripetuta di moltiplicazioni:

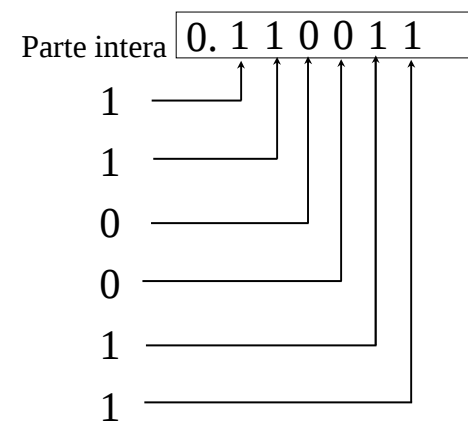
– Moltiplichiamo F per 2

- Si ottiene una parte intera (che può essere 0 oppure 1) ed una parte decimale F_1
- La parte intera rappresenta il bit più significativo mentre F_1 viene moltiplicato per 2
- Si ottiene una parte intera (che può essere 0 oppure 1) ed una parte decimale F_2
- La parte intera rappresenta il secondo bit più significativo mentre F_2 viene moltiplicato per 2
- ... fino a quando F_i vale 0 oppure decidiamo di fermarci...

35

Esempio: conversione in binario di 0.81

- $0.81 \cdot 2 = 1.62$
- $0.62 \cdot 2 = 1.24$
- $0.24 \cdot 2 = 0.48$
- $0.48 \cdot 2 = 0.96$
- $0.96 \cdot 2 = 1.92$
- $0.92 \cdot 2 = 1.84$



36

Alcuni commenti

- Il processo di conversione di una frazione non necessariamente termina
- Una frazione decimale con un numero finito di cifre può essere rappresentata con un numero infinito di cifre binarie
 - possiamo terminare il procedimento quando riteniamo di aver raggiunto una precisione desiderata

37

Interi con segno

- Finora abbiamo solamente considerato la rappresentazione di interi **positivi**
- Due rappresentazioni:
 - rappresentazione con modulo e segno
 - rappresentazione in complemento a due

38

Rappresentazione con modulo e segno

- Per rappresentare un numero con segno:
 - si usa il bit più significativo per indicare il + (=0) e - (=1)
- Si consideri un numero espresso in base 2

$$x_{(n-1)} x_{(n-2)} \dots x_2 x_1 x_0$$
- Quindi, il valore del numero è la somma dei pesi delle $n-1$ bit meno significativi con il bit più significativo che indica il segno:

$$A = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) & \text{se } x_{n-1} = 0 \\ -\sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) & \text{se } x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

39

Modulo e segno: esempi (1)

x_3	x_2	x_1	x_0
0	1	0	1

- Essendo composta da $n=4$ cifre ed essendo il suo bit più significativo a 0 (segno più) il suo valore è:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) &= x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 = \\ &= 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

40

Modulo e segno: esempi (2)

x_3	x_2	x_1	x_0
1	1	0	1

- Essendo composta da $n=4$ cifre ed essendo il suo bit più significativo a 1 (segno meno) il suo valore è:

$$-\sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) = -(x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0) =$$

$$= -(1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = -5$$

41

Modulo e segno: esempi (3)

x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
0	1	1	0	0	1	0	1

- Essendo composta da $n=8$ cifre ed essendo il suo bit più significativo a 0 (segno più) il suo valore è:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) =$$

$$= x_6 \cdot 2^6 + x_5 \cdot 2^5 + x_4 \cdot 2^4 + x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 =$$

$$= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$= 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 = 101_{10}$$

42

Modulo e segno: esempi (4)

x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
1	1	0	1	0	1	0	1

- Essendo composta da $n=8$ cifre ed essendo il suo bit più significativo a 1 (segno meno) il suo valore è:

$$-\sum_{i=0}^{n-2} (x_i \cdot 2^i) =$$

$$= -(x_6 \cdot 2^6 + x_5 \cdot 2^5 + x_4 \cdot 2^4 + x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0) =$$

$$= -(1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) =$$

$$= -(64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1) = -85_{10}$$

43

Alcuni problemi del “modulo e segno”

- Addizione e sottrazione complicata da
 - segni dei numeri
 - modulo dei numeri
- Doppia rappresentazione dello zero:
 - infatti lo zero può essere rappresentato (con $n=8$ bit)
 - sia da 00000000
 - che da 10000000
- Non va bene! Vorremmo...
 - una rappresentazione che faciliti la progettazione della ALU
 - che non deve essere complicata da problemi nati dalla rappresentazione

44

Esercizi

- Convertire in base 2 (e verificare il risultato):
 - $0,165_{10}$
 - $0,93_{10}$
- Convertire in base 10:
 - $0,101011101_2$
 - $0,000000001_2$
- Convertire in base 10 i seguenti numeri in base 2 espressi secondo “modulo e segno”
 - 11011101_2
 - 01001001_2

45

Problemi (1)

- Sappiamo come convertire un intero da base 10 a base 2 e sappiamo come convertire una frazione $F < 1$ da base 10 a base 2. Come si può convertire un numero intero con parte frazionaria > 1 ?
 - Ad esempio, come si può convertire in binario $125,476$?
 - *Un suggerimento:* vedete la definizione di notazione posizionale per i numeri frazionari
 - *Un altro suggerimento:*
 - vedere sullo Stallings a pag. 350

46

Problemi (2)

- Supponiamo di non usare la rappresentazione “modulo e segno”. Quanto vale MAXINT_n (il massimo intero positivo che si può rappresentare con n bit)?
 - *Suggerimento:*
 - $\text{MAXINT}_2=3$ quando $2^2=4$
 - $\text{MAXINT}_3=7$ quando $2^3=8$
 - $\text{MAXINT}_4=15$ quando $2^4=16$
 - quindi.....
 - Cercate di “intuire” la formula e poi cercatene la dimostrazione formale

47