Teoria dell'Informazione/RTI **Anno Accademico 2022–2023**

Lezione 10

Ugo Vaccaro

Abbiamo visto finora che in vari problemi collegati alla codifica di emissioni di una sorgente di informazione la entropia $H(P)$ della sorgente gioca un ruolo fondamentale. Vi sono molti altri ambiti in cui l'entropia ha un ruolo importante. In questa lezione ne vediamo uno di questi, avente a che fare con la "predizione del futuro". Tradizionalmente, esso viene presentato nel linguaggio delle scommesse su corse di cavalli. Supponiamo di essere nella seguente situazione:

1. Abbiamo m cavalli coinvolti in un gara.
2. Sia p_i la probabilità che l'i-esimo cavallo vinca la gara. Denotiamo con $\mathbf{p}$ il vettore delle probabilità $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$
3. Se il cavallo i-esimo vince, una precedente scommessa di 1 Euro sul cavallo i-esimo porterà ad un incasso di o_i Euro, all'incasso di 0 Euro se il cavallo i-esimo perde.
4. Sia b_i la frazione del capitale iniziale di uno scommettitore investito (scommesso) sul cavallo i-esimo (in altri termini, se il capitale iniziale dello scommettitore consta di T Euro, ciò vuol dire che lo scommettitore scommette Tb_i Euro sul cavallo i-esimo . Ovviamente, $b_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $\sum_{i=1}^m b_i = 1$. Denotiamo con $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ e chiamiamo il vettore $\mathbf{b}$ la *strategia* dello scommettitore. Pertanto, se il cavallo vincente della gara è il cavallo i-esimo, e ciò accadrà con probabilità p_i, lo scommettitore incasserà $o_i b_i T$ Euro, ovvero alla fine della gara lo scommettitore vedrà il suo capitale iniziale T moltiplicato di un fattore $o_i b_i$ (che può essere anche < 1!).

Fissata la strategia $\mathbf{b}$, il valore del capitale dello scommettitore alla fine della gara è pertanto una variabile casuale, che assume valori $o_i b_i T$ con probabilità p_i. Il problema in questione è quello di "massimizzare" il capitale al termine della gara. Come al solito, visto che ci troviamo di fronte a fenomeni probabilistici, per far emergere delle regolarità consideriamo il caso in cui vi siano una sequenza di gare. Denotiamo con X_i la variabile casuale che descrive l'esito della gara i-esima, con $i = 1, 2, \dots,$. Ovvero, X_i assume valore $j \in \{1, \dots, m\}$ se e solo se il cavallo j-esimo vince la gara i-esima. Assumiamo che gli esiti delle gare siano indipendenti tra di loro e che

$$P\{X_i = j\} = p_j, \ \forall i = 1, 2, \dots, \ \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

In altri termini, stiamo supponendo che le variabili casuali $X_1, X_2, \dots$ siano indipendenti ed identicamente distribuite, con distribuzione comune data da $\mathbf{p}$, e quindi vale che $\forall i \ X_i = X$, dove X è la variabile casuale che assume valore j con probabilità p_j. Se l'esito della gara i-esima è descritto dalla variabile casuale X_i, denotiamo con $S(X_i)$ la variabile casuale che descrive il fattore con cui il capitale dello scommettitore risulterà essere moltiplicato dopo la i-esima gara. Ovviamente la variabile casuale $S(X_i)$ assumerà valore $o_j b_j$ con la stessa probabilità p_j con cui il cavallo j vincerà la gara i-esima. Supponiamo per semplicità che il capitale iniziale dello scommettitore sia pari a $T = 1$ Euro. Inoltre, assumiamo che lo scommettitore, dopo ogni gara, scommetta tutto il suo attuale capitale nella prossima gara. Pertanto, il suo capitale finale sarà il prodotto dei guadagni in ciascuna gara. Sia S_n il capitale dello scommettitore dopo n gare. Avremo che

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} S(X_i).$$

Useremo la seguente notazione e definizione.

Notazione. Date due successioni reali $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$, la scrittura $a_n \doteq b_n$ significa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Ovvero, $a_n \doteq b_n$ implica che a_n e b_n hanno esponente uguale, nel primo ordine.

Definizione 1 *Dati il vettore* $\mathbf{p}$ *delle probabilità di vittoria dei cavalli ed il vettore* $\mathbf{b}$ *della strategia dello scommettitore, il tasso di raddoppio (del capitale) di una corsa di cavalli è data da*

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o}) = E[\log S(X)] = \sum_{k=1}^{m} p_k \log b_k o_k.$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 1 *Supponiamo che le variabili casuali* $X_1, X_2, \ldots,$ *che descrivono gli esiti delle corse siano indipendenti e identicamente distribuiti in accordo alla distribuzione* $\mathbf{p}$*. Allora il capitale del giocatore che usa la strategia di scommesse descritta da* $\mathbf{b}$ *cresce esponenzialmente al tasso dato da* $W(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o})$*, ovvero*

$$S_n \doteq 2^{nW(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})}. \tag{1}$$

Dimostrazione. Funzioni di variabili casuali indipendenti sono anch'esse indipendenti, per cui le variabili casuali $\log S(X_1), \log S(X_2), \ldots,$ risultano essere indipendenti e identicamente distribuite. Ciascuna delle variabili casuali $\log S(X_i)$ ha valor medio $E[\log S(X_i)] = E[\log S(X)]$, per cui

$$\frac{1}{n} \log S_n = \frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^{n} S(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log S(X_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E[\log S(X)] = \sum_{k=1}^{m} p_k \log b_k o_k, \tag{2}$$

dove la convergenza al limite è da intendersi in probabilità, in virtù della legge debole dei grandi numeri. La formula (2) è equivalente a dire che $S_n \doteq 2^{nW(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})}$. $\square$

Visto che il capitale del giocatore cresce essenzialmente come $2^{nW(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})}$, è naturale cercare la strategia $\mathbf{b}$ che massimizza il profitto del giocatore. Ovvero, vogliamo risolvere il problema di trovare

$$\max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o}) = \max_{\mathbf{b}: b_i \geq 0 \text{ e } \sum_i b_i = 1} \sum_{k=1}^{m} p_k \log b_k o_k. \tag{3}$$

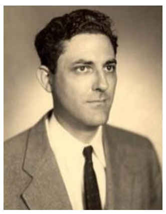
Procediamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
W(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o}) &= \sum_{k=1}^{m} p_k \log b_k o_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} p_k \log \left(\frac{b_k}{p_k} p_k o_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} p_k \log o_k - H(\mathbf{p}) - \sum_{k=1}^{m} p_k \log \frac{p_k}{b_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} p_k \log o_k - H(\mathbf{p}) \quad \text{(dalla Diseguaglianza di Gibbs).}
\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando come abbiamo dimostrato la Diseguaglianza di Gibbs, si ha che $W(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})$ assume il valore massimo, pari ad

$$W(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o}) = \sum_{k=1}^{m} p_k \log o_k - H(\mathbf{p}),$$

se e solo se $p_k = b_k$, $\forall k$. Detto in altri termini, la strategia in cui lo scommettitore scommette su ogni cavallo k una proporzione b_k del capitale pari alla sua probabilità di vittoria p_k è la *migliore possibile*, ovvero è quella che massimizza il tasso di raddoppio del capitale.



Una tale strategia prende il nome di Criterio di Kelly, dal nome dello scopritore. Dalla formula precedente, notiamo anche un'interessante conseguenza, ovvero che il valore $W(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})$ ottimo è tanto più grande quanto più piccola è l'entropia $H(\mathbf{p})$. Ricordando che l'entropia è una misura dell'incertezza a priori che abbiamo sugli esiti di una variabile casuale che ha distribuzione di probabilità $\mathbf{p}$, ne deduciamo che corse di cavalli in cui "grande" è l'incertezza su chi può essere il vincitore hanno "piccolo" tasso di raddoppio del capitale, e corse di cavalli in cui "piccola" è l'incertezza su chi può essere il vincitore hanno "grande" tasso di raddoppio del capitale. Il tutto è molto intuitivo, ma è piacevole ritrovarlo in una formula matematica.

Introduciamo un'altra notazione. Date due distribuzioni di probabilità $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, la *divergenza informazionale* $D(\mathbf{p}||\mathbf{q})$ tra $\mathbf{p}$ $\mathbf{q}$ è definita come

$$D(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}.$$

Dalla Diseguaglianza di Gibbs, la divergenza informazionale $D(\mathbf{p}||\mathbf{q})$ è sempre ≥ 0 con uguaglianza se e solo se $p_i = q_i$, $\forall i$. Spesso essa viene usata come una pseudo distanza tra distribuzioni di probabilità. Non è una vera distanza, in quanto non è nè simmetrica negli argomenti, nè per essa vale la disguaglianza triangolare. In ogni caso, la divergenza informazionale rappresenta una buona misura di quanto $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ differiscono. Vedremo, nel seguito del corso, che essa avrà un ruolo importante in molte situazioni.

Vediamo ora qualche caso particolare interessante dell'analisi prima fatta.

Consideriamo una corsa con due cavalli, in cui il primo ha probabilità di vittoria pari a p_1 ed il secondo ha probabilità di vittoria pari a p_2. Assumiamo inoltre che ogni scommessa vinta paghi 2 Euro per ogni Euro scommesso, per cui $o_1 = o_2 = 2$. Sappiamo, dai precedenti risultati che la migliore strategia consiste nello scommettere il capitale totale in modo proporzionale alle probabilità di vittoria dei cavalli, ovvero $b_1 = p_1$ e $b_2 = p_2$. In tal caso, il tasso di raddoppio del capitale del giocatore è pari a

$$W(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o}) = \sum_{i} p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) = 1 - H(\mathbf{p}),$$

per cui il capitale del giocatore, dopo n partite sarà

$$S_n \doteq 2^{n(1-H(\mathbf{p}))}.$$

Anche qui vediamo, ancor più chiaramente, la relazione inversa che sussiste tra il valore dell'entropia (ovvero l'incertezza sul vincitore della gara) ed il tasso con cui cresce il capitale.

Ricordiamo ora cos'è il valore o_i. Esso è l'ammontare di Euro che l'agenzia che gestisce le scommesse paga a fronte di una nostra scommessa di un Euro sul cavallo i-esimo, nel caso che tale cavallo effettivamente vinca la gara. Come viene calcolato o_i dall'agenzia di scommesse? In generale, l'agenzia vorrebbe scegliere i valori o_i in modo da massimizzare il suo guadagno, ovvero minimizzare il nostro, e quindi minimizzare $W(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})$. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ denotiamo con r_i il valore

$$r_i = \frac{1}{o_i} \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{o_k}}. \tag{4}$$

Ovviamente varrà che

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = 1,$$

e per comodità scriviamo $r_i = \frac{c}{o_i}$ (dove $c = 1/(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{o_k})$) e quindi $o_i = \frac{c}{r_i}$, per $i = 1, \ldots, m$. Denotiamo con $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, che possiamo considerare alla stregua di un vettore di probabilità.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
W(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}) &= \sum_{i=1}^{m} p_i \log b_i o_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log b_i \frac{c}{r_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \log c + \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{b_i}{r_i} \\
&= \log c + \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{b_i}{r_i} \cdot \frac{p_i}{p_i} \\
&= \log c - \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{p_i}{b_i} + \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{p_i}{r_i} \\
&= \log c - D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) + D(\mathbf{p}||\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Volendo l'agenzia rendere tale ultimo valore piccolo, ed essendo $\mathbf{r}$ il solo vettore che può modificare, l'unica possibilità è di rendere $D(\mathbf{p}||\mathbf{r})$ il più piccolo possibile. Essendo $D(\mathbf{p}||\mathbf{r})$ non negativo, la sola possibilità è di scegliere $\mathbf{r} = \mathbf{p}$, per cui $D(\mathbf{p}||\mathbf{r}) = 0$.

Abbiamo quindi scoperto qual è la strategia ottima dell'agenzia, scegliere i valori o_i in modo tale che

$$r_i = \frac{1}{o_i} \times \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{o_k}} = p_i. \tag{5}$$

Ovvero, la strategia ottima dell'agenzia è di pagare le vincite in modo inversamente proporzionale alle probabilità di vincita dei cavalli. Supponiamo ora che $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{o_k} = 1$. Ciò vuol dire che l'agenzia è "onesta", ovvero restituisce una vincita p_i volte il capitale, se p_i è la probabilità che vinca il cavallo i-esimo. In questo caso $c = 1$, per cui

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}) = \log c - D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) + D(\mathbf{p}||\mathbf{r}) = D(\mathbf{p}||\mathbf{r}) - D(\mathbf{p}||\mathbf{b}). \tag{6}$$

Ricordando la interpretazione della divergenza come una sorta di distanza tra distribuzioni di probabilità, otteniamo che il tasso di raddoppio del capitale del giocatore è pari *alla differenza* tra la distanza tra la stima della probabilità di vittoria dei cavalli effettuata dall'agenzia di scommesse (ovvero $\mathbf{r}$) dalla vera distribuzione di probabilità $\mathbf{p}$ di vittoria dei cavalli e la distanza tra la stima della probabilità di vittoria dei cavalli fatta dal giocatore (ovvero la sua strategia $\mathbf{b}$) dalla vera distribuzione di probabilità $\mathbf{p}$ di vittoria dei cavalli.

Da ciò otteniamo che

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) < D(\mathbf{p}||\mathbf{r}).$$

Detto in altri termini, dalla (1) otteniamo che il capitale del giocatore S_n cresce in n se e solo se la sua stima della probabilità di vittoria dei cavalli è più vicina alla vera probabilità di vittoria di quanto lo sia quella dell'agenzia di scommesse.

Consideriamo infine un ulteriore caso speciale. Assumiamo che $1/o_i = 1/m$, ovvero l'agenzia di scommesse paga m Euro per ogni Euro scommesso su qualsiasi cavallo. Ricordiamo che la strategia ottima dello scommettitore porta ad un tasso di raddoppio del capitale pari a $W(\mathbf{p}, \mathbf{b}) = \sum_i p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) = \log m - H(\mathbf{p})$. Otteniamo quindi che minore è l'entropia di $\mathbf{p}$ e maggiore è il guadagno del giocatore. Il che è perfettamente intuitivo una volta che notiamo che l'entropia è una misura dell'incertezza a priori che abbiamo sul valore assunto dalla variabile casuale, ovvero, nel nostro caso, su quale cavallo vince. Maggiore è l'incertezza (ovvero maggiore è $H(\mathbf{p})$) e minore è il guadagno, minore è l'incertezza (ovvero minore è $H(\mathbf{p})$) e maggiore è il guadagno.