Lezione 17

Sommario della Lezione

Programmazione Dinamica

Date due sequenze $a = a[1]...a[m]$ e $b = b[1]...b[n]$ di caratteri, il problema è di trovare la lunghezza della più corta supersequenza (PCS) che contiene a e b come sottosequenze.

Date due sequenze $a = a[1]...a[m]$ e $b = b[1]...b[n]$ di caratteri, il problema è di trovare la lunghezza della più corta supersequenza (PCS) che contiene a e b come sottosequenze.

Cioè cerchiamo una sequenza $c = c[1]...c[k]$, con k **minimo**, tale che, per opportuni interi $1 \leq i_1 < i_2 < \dots i_m \leq k$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots j_n \leq k$

Date due sequenze $a = a[1]...a[m]$ e $b = b[1]...b[n]$ di caratteri, il problema è di trovare la lunghezza della più corta supersequenza (PCS) che contiene a e b come sottosequenze.

Cioè cerchiamo una sequenza $c = c[1]...c[k]$, con k **minimo**, tale che, per opportuni interi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_m \leq k$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots j_n \leq k$ valga che

$$c[i_1] = a[1], \ldots, c[i_m] = a[m] \quad \text{e} \quad c[j_1] = b[1], \ldots, c[j_n] = b[n]$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9.

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= ABCBDAB \\ \mathrm{PCS}(a,b) = &\qquad ABCBDCABA \\ b &= BDCABA \end{aligned}$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= ABCBDAB \\ \mathrm{PCS}(a,b) = & \quad ABCBDCABA \\ b &= BDCABA \end{aligned}$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a,b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.

Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a, b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a,b) = & & ABCBDCABA \\
b & = & BDCABA
\end{array}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & ABCBDAB \\
 & & \updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow\updownarrow \\
\mathrm{PCS}(a,b) = & & ABCBDCABA \\
 & & \\
b & = & BDCABA
\end{array}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$\begin{array}{rcl} a & = & ABCBDAB \\ \\ \mathrm{PCS}(a,b) = & & ABCBDCABA \\ \\ b & = & BDCABA \end{array}$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a,b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & ABCBDAB \\
\\
\mathrm{PCS}(a,b) = & & ABCBDCABA \\
\\
b & = & BDCABA
\end{array}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= ABCBDAB \\ \mathrm{PCS}(a,b) &= ABCBDCABA \\ b &= BDCABA \end{aligned}$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a, b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a,b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= ABCBDAB \\
\mathrm{PCS}(a, b) &= ABCBDCABA \\
b &= BDCABA
\end{aligned}
$$

Ad esempio, se $a = ABCBDAB$ e $b = BDCABA$, allora la lunghezza della PCS di a e b è 9. Possibili PCS sono $ABCBDCABA$, $ABDCABDAB$ e $ABDCBDABA$.
Infatti

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & ABCBDAB \\
\\
\mathrm{PCS}(a, b) = & & ABCBDCABA \\
\\
b & = & BDCABA
\end{array}
$$

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Denotamo con PCS(x, y) una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\text{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Denotamo con PCS(x, y) una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\text{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\text{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Proviamolo. Sia α una PCS$(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$,

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Proviamolo. Sia α una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$, osserviamo che α deve necessariamente terminare con $a[m]$, altrimenti non sarebbe una più corta supersequenza comune ad $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$.

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Proviamolo. Sia α una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$, osserviamo che α deve necessariamente terminare con $a[m]$, altrimenti non sarebbe una più corta supersequenza comune ad $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$.
Quindi α è della forma $\alpha = \beta + a[m]$.

Denotamo con $\mathrm{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\mathrm{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Proviamolo. Sia α una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$, osserviamo che α deve necessariamente terminare con $a[m]$, altrimenti non sarebbe una più corta supersequenza comune ad $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$.
Quindi α è della forma $\alpha = \beta + a[m]$. Ma β non è una sequenza arbitraria, ma è una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$,

Denotamo con $\text{PCS}(x, y)$ una generica più corta supersequenza (PCS) che contiene x e y come sottosequenze e con $|\text{PCS}(x, y)|$ la sua lunghezza (che vogliamo trovare).

Deriviamo una formulazione ricorsiva della sua soluzione.

Caso 1: $a[m] = b[n]$.
In questo caso vale che

$$\text{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n]) = \text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1]) + a[m],$$

dove $+$ denota l'operazione di concatenazione.

Proviamolo. Sia α una $\text{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$, osserviamo che α deve necessariamente terminare con $a[m]$, altrimenti non sarebbe una più corta supersequenza comune ad $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$.
Quindi α è della forma $\alpha = \beta + a[m]$. Ma β non è una sequenza arbitraria, ma è una $\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$, ovvero è una soluzione ottima al sottoproblema corrispondente alle due sequenze $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$,

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β.

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β. Di conseguenza

$$|\beta| \geq |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|,$$

visto che $|\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|$ è la lunghezza della più corta supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$.

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β. Di conseguenza

$$|\beta| \geq |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|,$$

visto che $|\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|$ è la lunghezza della più corta supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$.
Se β non fosse una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$ allora dovrebbe valere che

$$|\beta| > |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β. Di conseguenza

$$|\beta| \geq |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|,$$

visto che $|\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|$ è la lunghezza della più corta supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$.
Se β non fosse una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$ allora dovrebbe valere che

$$|\beta| > |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

Detta γ una supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$, vale che tale che

$$|\beta| > |\gamma| = |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β. Di conseguenza

$$|\beta| \geq |\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|,$$

visto che $|\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|$ è la lunghezza della più corta supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$.
Se β non fosse una PCS$(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$ allora dovrebbe valere che

$$|\beta| > |\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

Detta γ una supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$, vale che tale che

$$|\beta| > |\gamma| = |\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

Ma $\gamma + b[n]$ è una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ di lunghezza $|\gamma| + 1 < |\beta| + 1 = |\alpha|$

β è una supersequenza comune ad $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ dato che tutti i caratteri di $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ appaiono in $\alpha = \beta + a[m] = \beta + b[n]$, quindi tutti i caratteri di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$ appaiono in β. Di conseguenza

$$|\beta| \geq |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|,$$

visto che $|\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|$ è la lunghezza della più corta supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$.
Se β non fosse una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])$ allora dovrebbe valere che

$$|\beta| > |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

Detta γ una supersequenza comune a $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n-1]$, vale che tale che

$$|\beta| > |\gamma| = |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])|.$$

Ma $\gamma + b[n]$ è una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$ di lunghezza $|\gamma| + 1 < |\beta| + 1 = |\alpha|$ contro l'ipotesi che α è una $\mathrm{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$.

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS$(a[1]...a[m], b[1]...b[n])$, detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$), detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Infatti sia $a[m]$ che $b[n]$ devono apparire in una qualsiasi PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$)

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$), detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Infatti sia $a[m]$ che $b[n]$ devono apparire in una qualsiasi PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) (altrimenti essa non sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$)

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$), detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Infatti sia $a[m]$ che $b[n]$ devono apparire in una qualsiasi PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) (altrimenti essa non sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$) ed almeno uno tra $a[m]$ che $b[n]$ deve apparire nell'ultima posizione di α (altrimenti α non sarebbe la più corta).

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$), detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Infatti sia $a[m]$ che $b[n]$ devono apparire in una qualsiasi PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) (altrimenti essa non sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$) ed almeno uno tra $a[m]$ che $b[n]$ deve apparire nell'ultima posizione di α (altrimenti α non sarebbe la più corta).

Concludiamo che una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o è una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n-1]$) con alla fine la concatenzazione del simbolo $b[n]$

Caso 2. $a[m]$ è differente da $b[n]$.

Osserviamo che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$), detta essa α, o termina con $a[m]$ o termina con $b[n]$.

Infatti sia $a[m]$ che $b[n]$ devono apparire in una qualsiasi PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) (altrimenti essa non sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ e $b[1]...b[n]$) ed almeno uno tra $a[m]$ che $b[n]$ deve apparire nell'ultima posizione di α (altrimenti α non sarebbe la più corta).

Concludiamo che una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o è una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n-1]$) con alla fine la concatenzazione del simbolo $b[n]$ oppure è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$) con alla fine la concatenzazione del simbolo $a[m]$.

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$,

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$.

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Dobbiamo provare che β è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$).

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Dobbiamo provare che β è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$).

Se ciò non fosse, ovvero se $|\beta| > |\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n])|$,

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Dobbiamo provare che β è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$).

Se ciò non fosse, ovvero se $|\beta| > |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n])|$,allora avremmo che una generica PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$), con $a[n]$ alla fine, sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ ed a $b[1]...b[n]$

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Dobbiamo provare che β è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$).

Se ciò non fosse, ovvero se $|\beta| > |\mathrm{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n])|$,allora avremmo che una generica PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$), con $a[n]$ alla fine, sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ ed a $b[1]...b[n]$di lunghezza inferiore ad α,

Visto che una generica PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) o termina con $a[m]$ o con $b[n]$, assumiamo che essa termini con $a[m]$ (il caso in cui termina con $b[n]$ è perfettamente analogo).

Sia una tale più corta supersequenza pari ad $\alpha = \beta + a[m]$. β è una supersequenza di $a[1]...a[m-1]$ e $b[1]...b[n]$.

Dobbiamo provare che β è una PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$).

Se ciò non fosse, ovvero se $|\beta| > |$PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$)$|$,allora avremmo che una generica PCS($a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]$), con $a[n]$ alla fine, sarebbe una supersequenza comune a $a[1]...a[m]$ ed a $b[1]...b[n]$di lunghezza inferiore ad α, contro l'ipotesi che α è una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$).

Ovviamente noi non sappiamo se una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) termina con $a[m]$ o con $b[n]$.

Ovviamente noi non sappiamo se una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) termina con $a[m]$ o con $b[n]$.

Risolviamo il problema nel solito modo:
ci calcoliamo $|\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]) + a[m]|$

Ovviamente noi non sappiamo se una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) termina con $a[m]$ o con $b[n]$.

Risolviamo il problema nel solito modo:
ci calcoliamo $|\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]) + a[m]|$
ci calcoliamo $|\text{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n-1]) + b[n]|$

Ovviamente noi non sappiamo se una PCS($a[1]...a[m], b[1]...b[n]$) termina con $a[m]$ o con $b[n]$.

Risolviamo il problema nel solito modo:
ci calcoliamo $|\text{PCS}(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n]) + a[m]|$
ci calcoliamo $|\text{PCS}(a[1]...a[m], b[1]...b[n-1]) + b[n]|$
e ci prendiamo il minimo di tali due valori.

L'equazione di ricorrenza:

$$|\mathrm{PCS}(a[1]\ldots a[m], b[1]\ldots b[n])| =$$

L'equazione di ricorrenza:

$$|\mathrm{PCS}(a[1]\dots a[m], b[1]\dots b[n])| = \begin{cases} |\mathrm{PCS}(a[1]\dots a[m-1], b[1]\dots b[n-1])| + 1 & \text{se } a[n] = b[m] \\ & \end{cases}$$

L'equazione di ricorrenza:

$$|\mathrm{PCS}(a[1]\ldots a[m], b[1]\ldots b[n])| = \begin{cases} |\mathrm{PCS}(a[1]\ldots a[m-1], b[1]\ldots b[n-1])| + 1 & \text{se } a[n] = b[m] \\ \min\{|\mathrm{PCS}(a[1]\ldots a[m-1], b[1]\ldots b[n])| + 1, & \\ \qquad |\mathrm{PCS}(a[1]\ldots a[m], b[1]\ldots b[n-1])| + 1\} & \text{se } a[n] \neq b[m] \end{cases}$$

L'equazione di ricorrenza:

$$|PCS(a[1]...a[m], b[1]...b[n])| = \begin{cases} |PCS(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n-1])| + 1 & \text{se } a[n] = b[m] \\ \min\{|PCS(a[1]...a[m-1], b[1]...b[n])| + 1, & \\ \qquad |PCS(a[1]...a[m], b[1]...b[n-1])| + 1\} & \text{se } a[n] \neq b[m] \end{cases}$$

con il caso base $|PCS(a[1]...a[m], b[1]...b[n])| = m + n,\quad$ se $\; m = 0 \quad$ oppure $\; n = 0.$

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
1.  IF(i==0||j==0) {
2.  RETURN i+j
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
        IF(pcs[i,j] non è definito) {
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
       IF(pcs[i,j] non è definito) {
          IF(a[i]==b[j]) {
             pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j − 1]) +1
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
       IF(pcs[i,j] non è definito) {
          IF(a[i]==b[j]) {
             pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j − 1]) +1
          } ELSE {
             pcs[i,j]=min{Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j]),
                          Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j − 1])}+1
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
       IF(pcs[i,j] non è definito) {
          IF(a[i]==b[j]) {
             pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j − 1]) +1
            } ELSE {
             pcs[i,j]=min{Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j]),
                          Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j − 1])}+1
 }}}
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
       IF(pcs[i,j] non è definito) {
          IF(a[i]==b[j]) {
             pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j − 1]) +1
            } ELSE {
             pcs[i,j]=min{Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j]),
                             Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j − 1])}+1
}}}
RETURN pcs[i,j]
```

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
IF(i==0||j==0) {
RETURN i+j
    } ELSE {
        IF(pcs[i,j] non è definito) {
            IF(a[i]==b[j]) {
                pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i-1], b[1...j-1]) +1
            } ELSE {
                pcs[i,j]=min{Calcola_PCS(a[1...i-1], b[1...j]),
                             Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j-1])}+1
}}}
RETURN pcs[i,j]
```

La complessità dell'algoritmo è chiaramente $\Theta(nm)$.

L'algoritmo

```
Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j])      % usa una tabella pcs[,]
1.  IF(i==0||j==0) {
2.  RETURN i+j
3.      } ELSE {
4.          IF(pcs[i,j] non è definito) {
5.            IF(a[i]==b[j]) {
6.              pcs[i,j]=Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j − 1]) +1
7.             } ELSE {
8.              pcs[i,j]=min{Calcola_PCS(a[1...i − 1], b[1...j]),
                             Calcola_PCS(a[1...i], b[1...j − 1])}+1
   }}}
9.  RETURN pcs[i,j]
```

La complessità dell'algoritmo è chiaramente $\Theta(nm)$.

Esercizio: si progetti ed analizzi un algoritmo che prendendo in input sequenze a e b e la tabella p calcolata da Calcola_PCS($a[1 \ldots n], b[1 \ldots m]$), produce in output una PCS($a[1 \ldots n], b[1 \ldots m]$).

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7,

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. subsequence

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. subsequence

2. subsequence

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \ldots s[n]$ e $p = p[1] \ldots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \ldots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. *subsequence*
2. *subsequence*
3. *subsequence*

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. *subsequence*
2. *subsequence*
3. *subsequence*
4. *subsequence*

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \ldots s[n]$ e $p = p[1] \ldots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \ldots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.
Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. *subsequence*
2. *subsequence*
3. *subsequence*
4. *subsequence*
5. *subsequence*

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \dots s[n]$ e $p = p[1] \dots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \dots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.
Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. *subsequence*
2. *subsequence*
3. *subsequence*
4. *subsequence*
5. *subsequence*
6. *subsequence*

Esercizio

Date due sequenze $s = s[1] \ldots s[n]$ e $p = p[1] \ldots p[m]$, diremo che p è una sottosequenza di s se esistono indici $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ tali che

$$s[i_1] = p[1], s[i_2] = p[2], \ldots, s[i_m] = p[m].$$

Il problema che vogliamo studiare è quello di calcolare il **numero** di volte che p compare come sottosequenza di s.

Ad esempio, per $s =$*subsequence* e $p =$*sue*, come output vorremmo 7, in quanto:

1. *subsequence*
2. *subsequence*
3. *subsequence*
4. *subsequence*
5. *subsequence*
6. *subsequence*
7. *subsequence*

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$.

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$ (ognuno di questi ci darà una distinta occorrenza di $p = p[1]...p[m]$ in $s = s[1]...s[n]$).

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$ (ognuno di questi ci darà una distinta occorrenza di $p = p[1]...p[m]$ in $s = s[1]...s[n]$). A questo numero occorre sommare il numero di volte in cui $p = p[1]...p[m]$ occorre in $s[1]...s[n-1]$

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$ (ognuno di questi ci darà una distinta occorrenza di $p = p[1]...p[m]$ in $s = s[1]...s[n]$). A questo numero occorre sommare il numero di volte in cui $p = p[1]...p[m]$ occorre in $s[1]...s[n-1]$
  Perchè ?

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$ (ognuno di questi ci darà una distinta occorrenza di $p = p[1]...p[m]$ in $s = s[1]...s[n]$). A questo numero occorre sommare il numero di volte in cui $p = p[1]...p[m]$ occorre in $s[1]...s[n-1]$
  Perchè ? Perchè sono occorrenze differenti da quelle prima calcolate che si riferivano solo alle occorrenze di p in s in cui i due ultimi simboli apparivano entrambi nell'ultima posizione.

Date $s = s[1]...s[n]$ e $p = p[1]...p[m]$, ci sono due casi:

- $s[n] = p[m]$. Allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p[1]...p[m-1]$ appare in $s[1]...s[n-1]$ (ognuno di questi ci darà una distinta occorrenza di $p = p[1]...p[m]$ in $s = s[1]...s[n]$). A questo numero occorre sommare il numero di volte in cui $p = p[1]...p[m]$ occorre in $s[1]...s[n-1]$
  Perchè ? Perchè sono occorrenze differenti da quelle prima calcolate che si riferivano solo alle occorrenze di p in s in cui i due ultimi simboli apparivano entrambi nell'ultima posizione.
- Se l'ultimo carattere di s è *diverso* dall'ultimo carattere di p, allora andiamo a contare il numero di volte in cui $p = p[1]...p[m]$ occorre in $s[1]...s[n-1]$

Denotiamo con $c[i, j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \left\{ \right.$$

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1] + c[i-1,j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ \end{cases}$$

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1] + c[i-1,j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ c[i-1,j] & \text{se } s[i] \neq p[j] \end{cases}$$

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1] + c[i-1,j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ c[i-1,j] & \text{se } s[i] \neq p[j] \end{cases}$$

I casi base sono i seguenti:

1. $c[0,0] = 1$

Denotiamo con $c[i, j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i, j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + c[i-1, j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ c[i-1, j] & \text{se } s[i] \neq p[j] \end{cases}$$

I casi base sono i seguenti:

1. $c[0, 0] = 1$
2. $c[i, 0] = 1, \forall i > 0$

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1] + c[i-1,j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ c[i-1,j] & \text{se } s[i] \neq p[j] \end{cases}$$

I casi base sono i seguenti:

1. $c[0,0] = 1$
2. $c[i,0] = 1, \forall i > 0$
3. $c[0,j] = 0, \forall j > 0$

Denotiamo con $c[i,j]$ il il numero di volte che $p[1]...p[j]$ compare come sottosequenza di $s[1]...[i]$.

La relazione di ricorrenza sarà :

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1] + c[i-1,j] & \text{se } s[i] = p[j] \\ c[i-1,j] & \text{se } s[i] \neq p[j] \end{cases}$$

I casi base sono i seguenti:

1. $c[0,0] = 1$
2. $c[i,0] = 1, \forall i > 0$
3. $c[0,j] = 0, \forall j > 0$

Il codice dell'algoritmo di Programmazione Dinamica e la sua analisi è per esercizio.