Progettazione di Algoritmi **Anno Accademico 2023–2024**

Note per la Lezione 23

Ugo Vaccaro

Nella lezione scorsa abbiamo introdotto la vista in ampiezza di grafi. Essenzialmente, esso è un metodo per esplorare in maniera sistematica un grafo non diretto $G = (V, E)$, a partire da un vertice input s. Il metodo consiste nel visitare prima tutti i nodi a distanza 1 da s, successivamente si visitano tutti i nodi a distanza 2 da s, poi tutti i nodi a distanza 3 da s, e così via... L'algoritmo termina quando sono stati visitati tutti i vertici raggiungibi da s, ovvero quando sono stati visitati tutti i vertici v per i quali esiste un cammino da s a v nel grafo. Inoltre, l'algoritmo produce in output anche i valori delle distanze di ogni nodo v da s (se v non è raggiungibile si assume che $d[v] = \infty$) ed inoltre produce un albero T radicato in s, tale che ogni percorso dalla radice s di T ad ogni altro nodo u nell'albero è anche un cammino di lunghezza minima da s a u nel grafo G. Un'ulteriore proprità della visita BFS è la seguente. Per ogni nodo $u \in V$ del grafo $G = (V, E)$, sia $C(u)$ il più grande sottoinsieme dei vertici V tale che

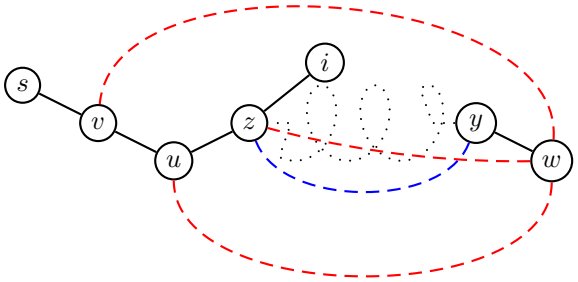
- $u \in C(u)$
- per ogni coppia di vertici $a, b \in C(u)$, esiste in G un cammino che parte in a ed ha come vertice terminale b.

Il sottoinsieme dei vertici $C(u)$ viene chiamata *componente connessa* di u. É evidente che l'insieme dei vertici dell'albero T prodotto dalla BFS quando essa viene chiamata a partire dal vertice S è proprio la componente connessa $C(s)$ di s. Infatti, per ogni coppia di vertici $a, b \in C(s)$ esiste in G un cammino che parte in a ed ha come vertice terminale b (basta andare da a alla radice s e poi dalla radice a b, ed eliminare vertici eventualmente ripetuti). Inoltre, è chiaramente il più grande insieme che contiene s con la proprietà di sopra. Infatti, per costruzione, la BFS termina quanco non ci sono più vertice in G raggiungibili da s.

In questa lezione introdurremo il metodo di visita in profondità (Depth First). Esso procede in maniera differente dalla visita in ampiezza, e consta essenzialmente dei suguenti passi:

1. Partendo da un nodo s si considera il primo arco uscente da s per raggiungere un nodo v
2. Dal nodo v si si considera il primo arco uscente da v per raggiungere un nuovo nodo u
3. e così via, iterando, fin quando non si raggiunge un "vicolo cieco", ovvero un nodo w di cui si sono stati esplorati *tutti* i vicini (cosicchè da w non è possibile raggiungere alcun nuovo nodo.
4. In tale caso, si torna indietro sul percorso fatto, fin quando non si incontra un qualche nodo z che ha invece almeno un vicino inesplorato
5. Come nella visita in ampiezza, si termina quando non ci cono più nuovi nodi da esplorare raggiungibili da s.

Una rappresentazione grafica del modo di operare della DFS è data di seguito, dove archi in nero corrispondono a visite da un nodo x ad un altro nodo y esplorato per la prima volta ed archi tratteggiati rappresentano archi che vanno da un qualche nodo ad un nodo già esplorato in precedenza, e la parte a puntini rappresenta il percorso all'indietro che la DFS fà alla ricerca di un qualche nodo che ha almeno un vicino non ancora esplorato.



Informalmente, l'algoritmo DFS della visita in profondità procede nel modo seguente:

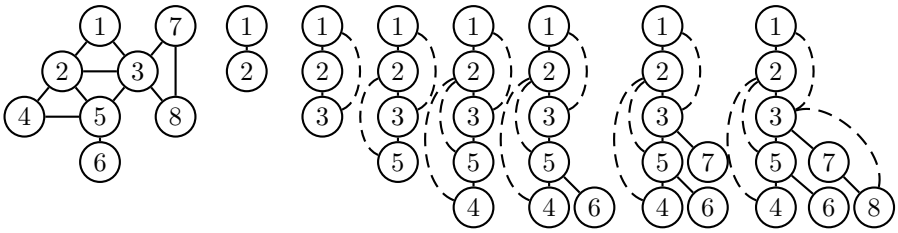
```
DFS(G, s)
Marca il nodo s ''Esplorato'' ed inseriscilo in T
For ogni arco (s, v) incidente su s
    If v non è marcato ''Esplorato''
    Inserisci (s, v) in T
    ricorsivamente chiama DFS(G, v)
```

L'algoritmo DFS(G, s) produce naturalmente un albero T (che chiameremo albero DFS) con

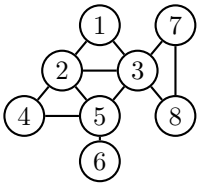
- s radice di T
- ogniqualvolta chiamiamo DFS(G, v) durante l'esecuzione di DFS(G, u) (cioè esploriamo v per la prima volta provenendo da u) allora inseriamo l'arco (u, v) in T

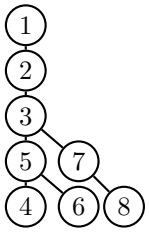
La complessità di DFS(u) su di un grafo con n vertici e m archi è $\Theta(n + m)$, dato che DFS(u) visita ogni nodo al più una volta ed ogni arco al più due volte.

Un esempio di esecuzione di DFS:

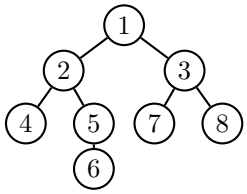


A differenza dell'albero BFS che tende ad essere "corto e largo", l'albero DFS tende ad essere "lungo e stretto":





Albero DFS



Albero BFS

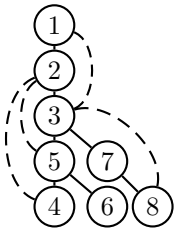
Qualche proprietà della visita `DFS`:

Fatto 1. Per ogni data chiamata ricorsiva di `DFS`(u), tutti i nodi che vengono marcati "`Esplorato`" dall'inizio della chiamata ricorsiva fino alla fine della ricorsione sono discendenti di u nell'albero `DFS` T.

Per come funziona `DFS`(u), il primo vertice v che viene marcato "`Esplorato`" durante l'esecuzione di `DFS`(u) è un vicino di u, ed esso diventa figlio di u nell'albero T

Successivamente viene chiamato `DFS`(v) che introduce (eventualmente) nell'albero T un nuovo nodo w che sarà figlio di v (ovvero discendente di u) e così via per tutti gli eventuali nuovi nodi inseriti in T (ovvero marcati "`Esplorato`")

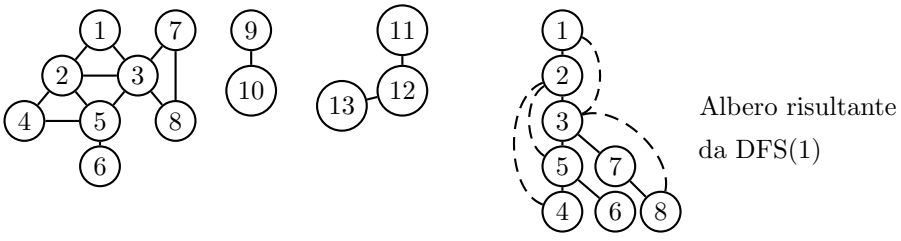
Fatto 2. Sia T un albero `DFS` e siano x e y due nodi in T. Sia (x, y) un arco del grafo G che non è un arco di T. Allora o x è un ancestore di y o y è un ancestore di x.



Sia (x, y) un tale arco e supponiamo che il nodo x sia raggiunto per primo dalla `DFS`. Per ipotesi, quando l'arco (x, y) è esaminato durante l'esecuzione di `DFS`(x) esso non viene aggiunto a T in quanto y è marcato "`Esplorato`". Poichè x è stato raggiunto prima di y dalla `DFS`, al momento della chiamata ricorsiva `DFS`(x) il nodo y *non* è marcato "`Esplorato`". Ciò vuol dire che y è stato scoperto in qualche momento successivo alla chiamata ricorsiva `DFS`(x) e prima del completamento della ricorsione in `DFS`(x). Dal Fatto 1 segue che y è un discendente di x nell'albero T.

Riassumendo:

- Alla fine dell'esecuzione di `DFS`(u) l'albero T generato contiene tutti i nodi raggiungibili da u, ovvero la componente connessa cui u appartiene (analoga proprietà valeva per l'albero generato dalla `BFS`).
- Alla fine dell'esecuzione di `DFS`(u), gli archi della parte di grafo G che costituisce la componente connessa di u sono suddivisi in due insiemi A e B disgiunti: **1.** A =archi dell'albero T, **2.** B=archi di G che connettono ancestori-discendenti di T ($\equiv$tali archi sono delle "scorciatoie in T)



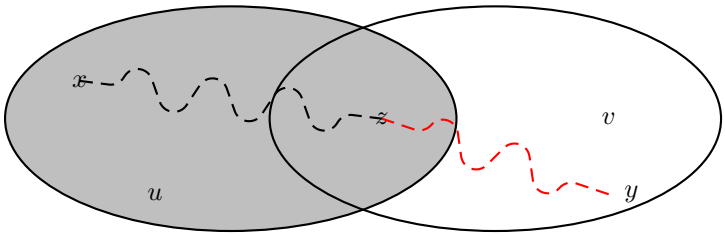
Albero risultante
da DFS(1)

Quindi anche `DFS` può essere usata per determinare le componenti connesse di G, nel senso che per ogni nodo u del grafo G, l'albero prodotto da `DFS`(u) (o `BFS`(u)) consiste della componente connessa contenente u (ovverosia l'albero consiste di tutti e soli i nodi raggiungibili da u)

Domanda che sorge spontanea: *dati due nodi u e v, che relazione sussiste tra la componente connessa di u e quella di v?*

Fatto 3. Per ogni coppia di nodi u e v nel grafo, le loro componenti connesse o sono uguali o sono disgiunte (cioè non hanno alcun nodo in comune)

Supponiamo per assurdo che le componenti connesse non siano nè uguali nè disgiunte. Allora le componenti connesse di u e v saranno fatte così (e ricordiamo due nodi sono in una stessa componente connessa se e solo se esiste un cammino tra di essi)



Consideriamo due nodi arbitrari x e y, con x nella componente connessa di u e y nella componente connessa di v, e z un nodo nella intersezione delle componenti. Per ipotesi, esiste un cammino da x a z, ed un cammino da z a y, *ergo* un cammino da x a y Ne segue che x e y sono in una stessa componente connessa e quindi la componente connessa di u =componente connessa di v.

Una conseguenza di questo risultato è che l'insieme dei vertici di un generico grafo $G = (V, E)$ si può partizionare in componenti connesse $C_1, \ldots, C_k$ (ovvero tali che $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = V$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$, per $i \neq j$), dove $\forall i = 1, \ldots, k$, $\forall a, b \in C_i$ esiste un cammino da a a b.

Come si possono calcolare tutte le componenti connesse di un grafo?

Visto che le componenti connesse di un grafo $G = (V, E)$ sono disgiunte tra di loro, le possiamo generare tutte, una alla volta, chiamando iterativamente `DFS` (o `BFS`) su nodi non ancora visitati, fin quando ve ne sono.

```
DFS(G)
For ciascun vertice u ∈ V
   marca u ''non Esplorato''
```

```
For ciascun vertice u ∈ V
   If (u ‘‘non Esplorato’’)
    then DFS(G, u)
```

Complessità: $\Theta(n+m)$, dove $n = |V|, m = |E|$

Abbiamo presentato la `DFS` nella sua versione ricorsiva. Usando uno stack (*first-in, last-out*) possiamo darne una versione esplicita:

```
DFS(s)
For ciascun vertice u ∈ V
   Explored[u] ←false
Inserisci s nello stack S
While S ≠ ∅
   Estrai un nodo u da S
   If Explored[u] =false then
     Explored[u] ← true
     For ogni arco (u, v) uscente da u
      Aggiungi v allo stack S
```

Questo algoritmo è essenzialmente lo stesso algoritmo ricorsivo prima presentato.

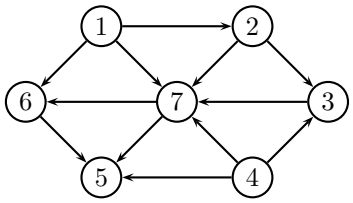
È interessante notare che la DFS e la BFS sono formalmente lo “stesso” algoritmo, la DFS usa uno stack mentre la BFS usa una coda (ignorando ovviamente il computo delle distanze dei nodi dalla sorgente s ed altre questioni accessorie).

DFS(s)
For ciascun vertice $u \in V$
  Explored[u] ←false
Inserisci s nello stack S
While $S \neq \emptyset$
  Estrai un nodo u da S
  If Explored[u] =false **then**
    Explored[u] ← true
    $\forall$ arco (u, v) uscente da u
      Aggiungi v allo stack S

`BFS`(G, s)
Poni `Scoperto`[s] =`true` e
`Scoperto`[v] =`false` $\forall v \neq s$
Inserisci s nella coda Q;
While Q non è vuota
Estrai il nodo u dalla testa della lista Q
    $\forall (u, v)$ incidente su u
    If Scoperto[v]=false **then**
      Poni Scoperto[v]=true
     Aggiungi v alla fine della coda Q

Parliamo ora di grafi diretti.

Grafo diretto $G = (V, E)$, in cui ogni arco $(u, v) \in E$ ha una direzione “dal nodo u al nodo v”. Di seguito un esempio di grafo diretto:



Es.: Grafo del Web – ogni hyperlink punta da una pagina web all'altra

Il grafo che rappresenta il Web (nodi≡pagine, archi≡hyperlink) è quindi naturalmente un grafo diretto, e la sua "direzionalità" è cruciale per i moderni motori di ricerca che classificano l'importanza di una pagina web sulla base della struttura del grafo risultante.

La visita BFS funziona anche in grafi diretti:

```
BFS(G, s)
1.  Poni Scoperto[s] =true e Scoperto[v] =false ∀v ≠ s
2.  Inizializza Q in modo che contenga s; d[s] ← 0
3.  Inizializza l'albero BFS T a ∅
4.  While Q non è vuota
5.  Estrai il nodo u dalla testa della lista Q
6.      Considera ciascun arco (u, v) ''uscente'' da u
7.      If Scoperto[v]=false then
8.        Poni Scoperto[v]=true
9.        Aggiungi l'arco (u, v) all'albero T
10.       Aggiungi v alla fine della coda Q; d[v] ← d[u] + 1
```

Così come per la BFS in grafi non diretti, anche nel caso di grafi diretti la BFS produce un alberto T. Tale albero contiene tutti i nodi dei vari livelli L_i, con un arco da $x \in L_i$ a $y \in L_{i+1}$ se e solo se il nodo y è stato scoperto da BFS *per la prima volta* partendo dal nodo x.

L'albero T ha la proprietà che esso contiene tutti e solo i nodi x per cui nel grafo esiste un cammino *diretto* (cioè un cammino in cui tutti gli archi sono nella direzione "giusta") dal nodo sorgente s della BFS ad x. Tali nodi x possono (*o possono anche non*) avere un cammino diretto da essi a s

Ed anche la DFS funziona in grafi diretti.

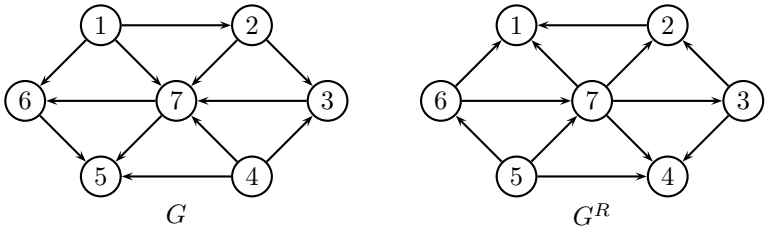
```
DFS(u)
Marca il nodo u ''Esplorato'' ed inseriscilo in R
For ogni arco (u, v) ''uscente'' da u
  If v non è marcato ''Esplorato''
    inserisci l'arco (u, v) in T e ricorsivamente chiama DFS(v)
```

Anche in questo caso l'albero T prodotto da DFS(u) ha la proprietà che esso contiene tutti i e solo i nodi x per cui nel grafo esiste un cammino *diretto* (cioè un cammino in cui tutti gli archi sono nella direzione "giusta") dal nodo u al nodo x.

E se volessimo invece conoscere i nodi x che hanno un cammino diretto *verso* u?

Basta invertire le direzioni degli archi di G. Più precisamente dato il grafo diretto $G = (V, E)$, possiamo definire il nuovo grafo diretto $G^R = (V, E^R)$, dove per ogni coppia di vertici $u, v \in V$ vale che $(u, v) \in E^R \Leftrightarrow (v, u) \in E$

Esempio:



G G^R

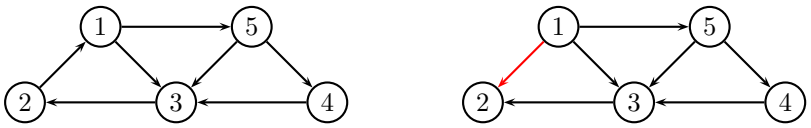
Chiamando `BFS`(u) o `DFS`(u) in G^R otterremo i nodi x per cui esiste un cammino diretto da u al nodo x in G^R, *ovvero* otterremo i nodi x per cui esiste un cammino diretto **da** x **al nodo** u **in** G.

Connettività forte in grafi diretti

I nodi u e v di un grafo G sono mutualmnente raggiungibili se e solo se esiste un cammino diretto da u e v ed un cammino diretto da v ad u.

Diamo la seguente:

Definizione: Un grafo diretto G è fortemente connesso se e solo se ogni coppia dei suoi nodi è mutualmente raggiungibile



Grafo fortemente connesso Grafo non fortemente connesso

Controllare se un grafo è fortemente connesso applicando la definizione ci costringerebbe a verificare che, per ogni coppia di nodi u, v nel grafo, vale la proprietà che esiste un cammino diretto da u a v ed uno da v ad u. Se il grafo ha n nodi, questo vorrebbe dire che dovremmo controllare una proprietà per $\Theta(n^2)$ coppie. Il seguente fatto ci permette di poter verificare la proprietà che un grafo sia, o meno, fortemente connesso verificando la proprietà *solo* su $\Theta(n)$ coppie di nodi.

Fatto 4. Sia s un qualsiasi *fissato* nodo di G. Abbiamo che G è fortemente connesso $\Leftrightarrow$ ogni nodo u in G è raggiungibile da s ed inoltre s è raggiungibile da qualsiasi nodo u di G.

L'implicazione $\Rightarrow$ segue dalla definizione di grafo fortemente connesso.

Per provare l'impicazione $\Leftarrow$, consideriamo due arbitrari nodi x e y. Per ipotesi esiste un cammino diretto da s a x e da x a s, ed esiste anche un cammino diretto da s a y e da y a s. Quindi esiste un cammino diretto da x a y (che passa per s) ed un cammino diretto da y ad x (che passa per s). Quindi ogni coppia di nodi x e y è mutualmente raggiungibile e di conseguenza G è fortemente connesso.