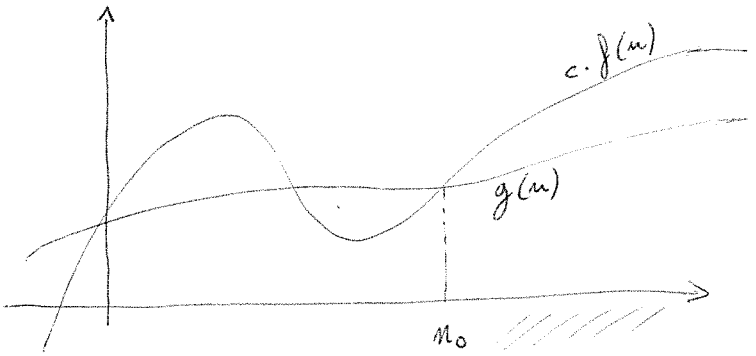
Notazione asintotica: formalizzazione attraverso insiemi di funzioni $f : N \to \mathbb{R}_+$

- $O(f(n))$ denota l'insieme di funzioni $g(n)$ tali che esistono delle costanti $c > 0$, $n_0 > 0$ per cui vale $g(n) \leq c \cdot f(n)$ $\forall n > n_0$.

l'appartenenza di $g(n)$ all'insieme $O(f(n))$ viene solitamente indicata con $g(n) = O(f(n))$



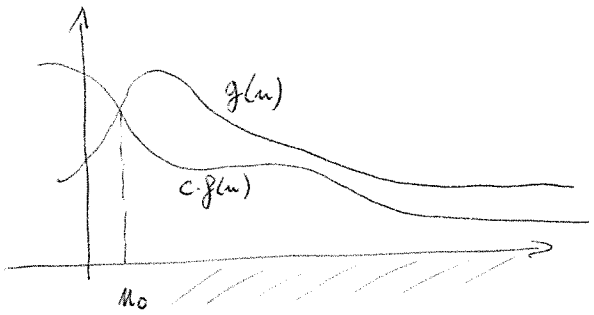
$\forall n > n_0$ $g(n)$ "cresce meno" di $c \cdot f(n)$

$O(f(n))$ è l'insieme di funzioni $g(n)$ che "da un certo punto in poi sono limitate superiormente da $c \cdot f(n)$, per qualche c

- $\Omega(f(n))$ denota l'insieme di funzioni $g(n)$ tali che esistono delle costanti $c > 0$, $n_0 > 0$ per cui vale $g(n) \geq c \cdot f(n)$

$\forall n > n_0$

l'appartenenza di $g(n)$ all'insieme $\Omega(f(n))$ viene solitamente indicata con $g(n) = \Omega(f(n))$



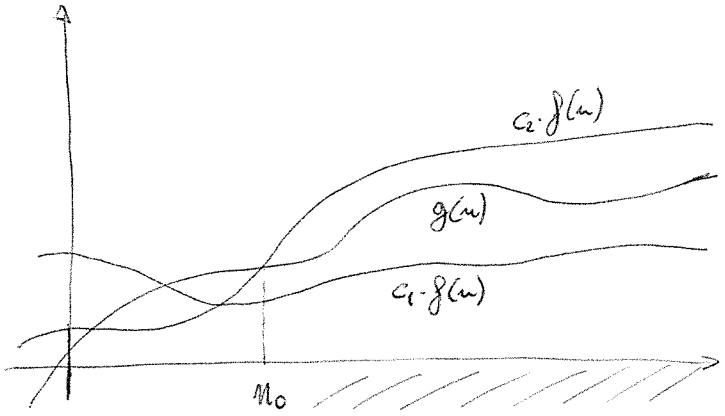
Per ogni $n > n_0$ $g(n)$ "cresce più" di $c \cdot f(n)$

$\Omega(f(n))$ è l'insieme di funzioni $g(n)$ che "da un certo punto" in poi sono limitate inferiormente da $c \cdot f(n)$, per qualche c.

- $\Theta(f(n))$ denota l'insieme di funzioni $g(n)$ tali che esistono delle costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $n_0 > 0$ per cui vale $0 \leq c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$

$\forall n > n_0$

l'appartenenza di $g(n)$ all'insieme $\Theta(f(n))$ viene solitamente indicata con $g(n) = \Theta(f(n))$



Per ogni $n > n_0$ $g(n)$ essenzialmente "si comporta come $f(n)$" (limitata inferiormente da $c_1 \cdot f(n)$ e superiormente da $c_2 \cdot f(n)$, per qualche c_1, c_2)

Osservazioni utili

- Solitamente le dimensioni dell'input dei problemi da studiamo sono definite soltanto per numeri interi. Perciò è comodo esprimere il tempo di esecuzione (spazio...) con funzioni definite sugli interi

$$f : N \to \mathbb{R}_+$$

- Ha senso studiare gli algoritmi asintoticamente perché di solito un algoritmo che è asintoticamente più efficiente è più efficiente su tutti gli input, tranne eventualmente su quelli più piccoli. Inoltre spesso gli algoritmi si usano su input grandi.

- Esiste una analogia con il confronto tra due numeri reali a e b

$$f(n) = O(f(n)) \quad \simeq \quad a \leq b$$

$$g(n) = \Omega(f(n)) \quad \simeq \quad a \geq b$$

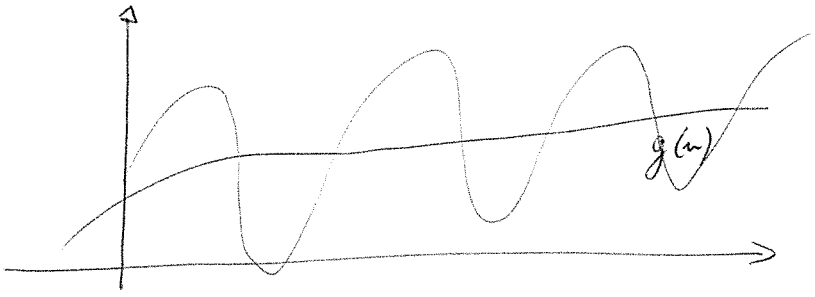
$$g(n) = \Theta(f(n)) \quad \simeq \quad a = b$$

Tuttavia non vale la legge di tricotomia: se a e b sono due numeri reali deve essere vera una delle 3

$$a > b \quad , \quad a = b \quad , \quad a < b$$

Per le relazioni asintotiche NON è vero.

Esistono funzioni INCONFRONTABILI



- Abuso della notazione utile

. $\Theta(1)$ e $O(1)$ usate per esprimere qualsiasi funzione costante

. espressioni tipo $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$ significano che $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$ dove $f(n)$ è una funzione "anonima" dell'insieme $\Theta(n)$. I dettagli di $f(n)$, cioè, non ci interessano.

- l'espressione $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$ si interpreta:
  "indipendentemente dalle costanti scelte per la funzione anonima a sinistra del segno uguale, esiste un modo di scegliere le costanti per la funzione anonima a destra in modo da rendere vera l'eguaglianza"

Esistono anche due notazioni per esprimere limiti inferiori e superiori NON STRETTI. Sono le notazioni o (o piccolo) e ω (ω piccolo)

- $o(f(n))$ denota l'insieme di funzioni $g(n)$ tali che per qualsiasi costante $c > 0$, esiste un $n_0 > 0$ per cui vale che $g(n) \leq c \cdot f(n) \quad \forall n > n_0$

- $\omega(f(n))$ denota l'insieme di funzioni $g(n)$ tali che per qualsiasi costante $c > 0$, esiste una costante $n_0 > 0$ per cui vale che $g(n) \geq c \cdot f(n) \quad \forall n > n_0$

L'appartenenza di $g(n)$ all'insieme $o(f(n))$ si denota con $g(n) = o(f(n))$

L'appartenenza di $g(n)$ all'insieme $\omega(f(n))$ si denota con $g(n) = \omega(f(n))$

Osservazione chiave:

O, Ω, Θ esistono delle costanti $c, n_0 > 0$ (a, c_1, n_0) tali che...

o, ω $\forall$ costante $c > 0$, $\exists$ una costante $n_0 > 0$ tale che...

ORIZZONTALE

Esempi.

① Provare che $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$.

Occorre mostrare che $\exists\ c_1, c_2, n_0 > 0$ tali che

$$0 \le c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2 n^2, \quad \forall n > n_0.$$

Pertanto, scegliendo $c_2 = \frac{1}{2}$ risulta $\frac{1}{2}n^2 - 3n \le \frac{1}{2}n^2 \quad \forall n \ge 1 = n_0$

D'altra parte $\frac{1}{2}n^2 - 3n \ge c_1 \cdot n^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \ge c_1$.

Notiamo che $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 3 \Leftrightarrow n = 6$

e $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} > 0 \quad \forall n \ge 7$ poiché $\frac{1}{2} > \frac{3}{n} \quad \forall n \ge 4$.

Ponendo allora $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7-6}{14} = \frac{1}{14}$

risulta $\frac{1}{2}n^2 - 3n \ge \frac{1}{14}n^2 \quad \forall n > n_0 = 7$

Pertanto $c_1 = \frac{1}{14}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ e $n_0 = \max\{1, 7\} = 7$

provano che $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

② Provare che $6n^3 \neq O(n^2)$

Se esistessero costanti $c_2, n_0 > 0$ tali che $6n^3 \leq c_2 n^2$ $\forall n \geq n_0$ risulterebbe $6n \leq c_2$ $\forall n > n_0$

ovvero $n \leq \frac{c_2}{6}$ $\forall n > n_0$! ASSURDO

③ Provare che $an^2 + bn + c = O(n^2)$

per ogni scelta delle costanti a, b e c, con $a > 0$.

Occorre mostrare che $\exists$ costanti d, n_0 tali che

$$a \cdot n^2 + bn + c \leq d \cdot n^2 \qquad \forall n > n_0$$

Risulta facile vedere che:

$$\begin{aligned} a \cdot n^2 + bn + c &\leq a \cdot n^2 + |b| \cdot n + |c| \\ &\leq a \cdot n^2 + |b| \cdot n^2 + |c| \cdot n^2 \\ &\leq \underbrace{(a + |b| + |c|)}_{d} \cdot n^2 \\ &= d \cdot n^2 \end{aligned}$$

Pertanto, $d = a + |b| + |c|$ e $n_0 = 1$ provano l'assunto.

Nota che la tecnica è generalizzabile e può essere usata per provare che

$$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 = O(n^k)$$

per ogni scelta delle costanti $a_k, a_{k-1}, a_{k-2} \dots a_1, a_0$, con $a_k > 0$.

Provare che $a \cdot n^2 + bn + c = \Omega(n^2)$, per $a > 0$.

Occorre mostrare che $\exists\ d, n_0 > 0$ per cui vale

$$a n^2 + bn + c \geq d n^2 \qquad \forall n > n_0$$

Dividendo per n^2 entrambi i membri, si ha

$$a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \geq d$$

Intuitivamente, per n sufficientemente grande $\frac{b}{n}$ e $\frac{c}{n^2}$ tendono a zero e, quindi, la precedente è asintoticamente vera per ogni $d < a$.

Formalmente

$$a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \geq a - \frac{|b|}{n} - \frac{|c|}{n^2} \qquad \left(\begin{array}{c} x\ b \text{ e } c \text{ sono} \\ \text{negativi vale} = \end{array}\right)$$

$$\geq a - \frac{|b|}{n} - \frac{|c|}{n} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{essendo} \\ \frac{|c|}{n^2} < \frac{|c|}{n} \end{array}\right)$$

$$\geq a - \frac{2 \overbrace{\max\{|b|, |c|\}}^{p}}{n}$$

$$\geq a - \frac{2p}{n}$$

Pertanto

$$a - \frac{2p}{n} \geq d \iff a - d \geq \frac{2p}{n} \iff n \geq \frac{2p}{a-d}$$

Scegliendo $\underline{d < a}$ (il denominatore è positivo)

basta prendere $n_0 > \frac{2p}{a-d}$.

La tecnica può essere generalizzata per provare che $a_k > 0$

$$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 = \Omega(n^k)$$

Pertanto possiamo concludere che

$$a \cdot n^2 + bn + c = \Theta(n^2) \quad , \quad a > 0$$

e, in generale,

$$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 = \Theta(n^k) \quad , \quad a_k > 0$$

Esempi concreti: $5n^2 - 2n - 7 = \Omega(n^2)$

(a, b, c)

$$5 - \frac{2 \max\{2,7\}}{n} \geq d \iff 5 \cdot \frac{14}{n} \geq d \iff 5 - d \geq \frac{14}{n}$$

$$\iff n \geq \frac{14}{5-d} \quad . \text{ Scegliamo } d = 3, \text{ la precedente vale } \forall n \geq n_0 = 7.$$

$$5n^2 - 2n - 7 = O(n^2)$$

$$5n^2 - 2n - 7 \leq 5n^2 + 2n + 7 \leq 5n^2 + 2n^2 + 7n^2 \leq 14n^2$$

Quindi, le costanti $d = 14$ e $n_0 = 1$ provano l'asserto

In generale, possiamo tranquillamente dire:

$$n^5 + 100n^2 - 50n = \Theta(n^5)$$

$$18n^3 - 12n^2 + 50n + 7 = \Theta(n^3) \quad \dots \text{ e così via.}$$

$$11n^8 - 150n^2 - 300n + 80 = \Theta(n^8)$$

Generalizzazione ai polinomi

Un polinomio asintoticamente positivo di grado k

"cresce come n^k".

$$f(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0, \quad a_k > 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = \Theta(n^k)$$

Proviamo innanzitutto che $f(n) = O(n^k)$, ovvero che

$$\exists\, c_2, n_0 > 0 \;:\; f(n) \leq c_2 \cdot n^k, \quad \forall n > n_0$$

Infatti, risulta

$$f(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$$

$$\leq a_k \cdot n^k + |a_{k-1}| \cdot n^{k-1} + \dots + |a_1| \cdot n + |a_0|$$

$$\leq a_k \cdot n^k + |a_{k-1}| \cdot n^k + \dots + |a_1| \cdot n^k + |a_0| \cdot n^k$$

$$\leq \underbrace{\left(a_k + |a_{k-1}| + \dots + |a_0|\right)}_{c_2} \cdot n^k$$

$$\leq c_2 \cdot n^k$$

che risulta vera $\forall\, n > n_0 = 1$.

Viceversa, per far vedere che $f(n) = \Omega(n^k)$, dobbiamo far vedere che

$$\exists\ c_1, n_0 > 0 \quad \text{tali che} \quad f(n) \geq c_1 \cdot n^k, \quad \forall\ n > n_0$$

Si noti che:

$$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 > c_1 n^k \qquad \text{se e solo se}$$

$$a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots \quad + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k} > c_1$$

$$a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k} \geq a_k - \frac{|a_{k-1}|}{n} - \dots - \frac{|a_0|}{n^k}$$

$$\geq a_k - \frac{|a_{k-1}|}{n} - \dots - \frac{|a_0|}{n}$$

$$\geq a_k - \frac{(|a_{k-1}| + \dots + |a_0|)}{n}$$

Per cui, richiedendo che

$$a_k - \frac{(|a_{k-1}| + \dots + |a_0|)}{n} \geq c_1 \iff$$

$$a_k - c_1 \geq \frac{(|a_{k-1}| + \dots + |a_0|)}{n} \iff n \geq \frac{|a_{k-1}| + \dots + |a_0|}{a_k - c_1}$$

possiamo scegliere opportunamente $c_1 < a_k$

e derivare il valore di $n_0 = \left\lceil \frac{|a_{k-1}| + \dots + |a_0|}{a_k - c_1} \right\rceil$

Vediamo come crescono vari tipi di funzione

al crescere di n:

	valori di n				
$f(n)$	10	100	1000	10000	tipo
$\log n$	3	6	9	13	logaritmico
$\sqrt{n}$	3	10	31	100	sublineare
n	10	100	1000	10000	lineare
$n \log n$	30	664	9965	132877	loglineare
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8	quadratico
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	cubico
2^n	1024	10^{30}	10^{300}	10^{3000}	esponenziale

Tra queste funzioni è possibile dimostrare che esistono relazioni asintotiche ben precise.

In generale vale il seguente ordinamento tra funzioni:

Espressione	nome
c	costante
$\log \log n$	log log
$\log n$	logaritmico
$\sqrt[c]{n}$, $c>1$	sub-lineare
n	lineare
$n \log n$	log lineare
n^2	quadratico
n^3	cubico
n^k, $k \geq 1$	polinomiale
a^n $a>1$	esponenziale
$n!$	fattoriale

O

↓

↑

Ω

e.g. $n^2 = O(n^3)$, $n^3 = \Omega(n^2)$

④ Proviamo che $\log_2 n = O(n)$

Occorre mostrare che $\exists\, c, n_0$ tali che $\log_2 n \le c \cdot n \quad \forall n \ge n_0$

Poniamo $c = 1$ ed $n_0 = 1$ e usiamo l'induzione.

Base dell'induzione: $n = 1$. Risulta:

$$\log_2 n = \log_2 1 = 0 \le 1 = n$$

Ipotesi induttiva: vera per $n > 1$. Cioè $\log n \le n$

Passo induttivo: $n+1$. Risulta:

$$\log_2 (n+1) \le \log_2 (n+n) \le \log_2 2n$$

$$= \log_2 2 + \log_2 n \qquad (\log(ab) = \log a + \log b)$$

$$\le 1 + n \qquad (\text{per ipotesi induttiva } \log_2 n \le n)$$

Pertanto $\log_2 n \le n \quad \forall n \ge 1$.

Nota che se il logaritmo non è in base 2 non cambia niente.

Notazione usuale	
$\lg n = \log_2 n$	(logaritmo binario)
$\ln n = \log_e n$	(logaritmo naturale)

Ricordate che vale, per ogni $a, b, c > 0$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Cambio di base

Pertanto

$$\log_2 n = \frac{\log_c n}{\log_c 2} \iff \log_c n = (\log_c 2) \cdot \log_2 n .$$

Quindi, avendo mostrato che $\log_2 n \leq n$, è facile vedere che

$$\log_c n = \log_c 2 \cdot (\log_2 n) \leq (\log_c 2)\, n \iff \underline{\log_c n = O(n)} .$$

La stessa conclusione può essere ottenuta se consideriamo invece di $\log_2 n$ la funzione $\log n^a$, con $a > 1$

Infatti, ricordando che

$$\boxed{\log n^a = a \cdot \log n}$$

risulta

$$\log n^a = a \cdot \log n \leq a \cdot c \cdot n, \text{ cioè } \underline{\log n^a = O(n)} ;$$

Riferimenti:

- La notazione asintotica è rinvenibile in
  "Introduzione agli algoritmi e alle strutture dati" 3ed
  di T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest e C. Stein

- Alcuni esempi sono rinvenibili (insieme a diversi altri)
  nelle slide del corso di Algoritmi del Prof. V. Vaccaro,
  di questo Dipartimento.

Polilogaritmi contro polinomi

Vogliamo dimostrare che $\forall\, a, b, K > 0$ vale $\log^a n^b = O(n^K)$

Occorre far vedere che, per ogni $a, b, K > 0$

$$\exists\, c, n_0 > 0 \text{ tali che } (\log^a n^b) \leq c \cdot n^K, \quad \forall n > n_0$$

Proviamolo innanzitutto per il caso $a = 1$.

Ricordiamo che:

$$\log x^y = y \log x$$

e abbiamo dimostrato che

$$\log x \leq d \cdot x, \quad d \geq 1, \quad \forall x \geq 1$$

Pertanto,

$$\log n^b = b \log n = b \cdot \left(\frac{1}{K} \cdot K\right) \cdot \log n = b \cdot \frac{1}{K} \cdot \log n^K$$

$$\leq \underbrace{b \cdot \frac{1}{K} \cdot d}_{c} \cdot n^K, \qquad \forall n \geq 1 = n_0$$

Per dimostrare il caso generale, si noti che la precedente vale per $a = 1$, ma $\forall\, b$ e K.

Quindi

$$\log^a n^b = (\log n^b)^a \leq (c \cdot n^{K/a})^a = c^a \cdot n^K$$

sfruttando la precedente

$a=1$ e $K' = K/a$

Polinomi contro esponenziali

$$\forall K > 0, \; a > 1, \quad n^K = O(a^n)$$

Occorre provare che $\exists \; c, n_0 > 0$ tale che $n^K \leq c \cdot a^n, \; \forall n > n_0$

Osserviamo innanzitutto che:

$$n^K \leq n^{n/\log_a n}, \quad \forall n \text{ tale che } K \leq n/\log_a n$$

Sia n_0 il primo valore di n per cui risulta $K \leq n/\log_a n$.

Risulta:

$$n^K \leq n^{n/\log_a n} = \left(a^{\log_a n}\right)^{n/\log_a n} = a^{\frac{n \cdot \log_a n}{\log_a n}} = a^n$$

per ogni $n \geq n_0$.

Esponenziali con base diversa

Qual è il rapporto tra 2^n e 3^n ?

Ovviamente $2^n = O(3^n)$.

$\exists\, c, n_0 > 0$ tali che $2^n \leq c \cdot 3^n \quad \forall n > n_0$

c: $\downarrow$ 1 — n_0: $\downarrow$ 1

Vale il contrario? $3^n \overset{?}{=} O(2^n)$.

Dovrebbero $\exists\, c, n_0 > 0$ tali che $3^n \leq c \cdot 2^n, \quad \forall n > n_0$

Ma

$$3^n = \left(3 \cdot \frac{2}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow \quad c \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{(impossibile)}$$

Quindi $3^n \neq O(2^n)$

$$2^{n+1} \quad \grave{e} \quad \Theta(2^n) \quad ?$$

Se e solo se $\exists\, c_1, c_2, n_0 > 0$ tali che

$$c_1 \cdot 2^n \leq 2^{n+1} \leq c_2 \cdot 2^n \quad \forall n > n_0$$

$$c_1 \cdot 2^n \leq 2^{n+1} \leq c_2 \cdot 2^n$$

$$\downarrow$$

$$c_1 \cdot 2^n \leq 2 \cdot 2^n \leq c_2 \cdot 2^n$$

Basta scegliere: $c_1 \leq 2$ $\quad$ $c_2 \geq 2$ $\quad$ $n_0 = 1$

Abbiamo mostrato prima che:

$$\forall a, b, k > 0 \quad \log^a n^b = O(n^k)$$

Tramite essa possiamo risolvere diverse situazioni:

$$\log^5 n^6 = O(\sqrt[3]{n})$$

Infatti, basta porre $a = 5$, $b = 6$ e $k = 1/3$.

$$\log^2 n^{10} = O(\sqrt[6]{n})$$

Ancora, basta porre $a = 2$, $b = 10$ e $k = 1/6$.

$$\log n = O(\sqrt{n})$$

Basta porre $a = 1$, $b = 1$ e $k = 1/2$

Regole utili per maneggiare la notazione O

① $d(n) = O(f(n)) \Rightarrow a \cdot d(n) = O(f(n)), \quad \forall a > 0$

② $d(n) = O(f(n)), \; e(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n) + e(n) = O(f(n) + g(n))$

③ $d(n) = O(f(n)), \; e(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n) \cdot e(n) = O(f(n) \cdot g(n))$

④ $d(n) = O(f(n)), \; f(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n) = O(g(n))$

Esempi d'applicazione

① $\log n = O(n) \Rightarrow 5 \log n = O(n)$

② $\log n = O(n), \; \sqrt{n} = O(n) \Rightarrow (\log n) + \sqrt{n} = O(n)$

③ $\log n = O(\sqrt{n}), \; \sqrt{n} = O(\sqrt{n}) \Rightarrow (\log n) \cdot \sqrt{n} = O(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = O(n)$

④ $\log n = O(\sqrt{n}), \; \sqrt{n} = O(n) \Rightarrow \log n = O(n)$

Proviamo la ①

$$d(n) = O(f(n)) \Rightarrow a \cdot d(n) = O(f(n)), \ \forall a > 0$$

$d(n) = O(f(n))$ significa dire che

$\exists c > 0, n_0 > 0$ tale che $d(n) \leq c \cdot f(n) \quad \forall n > n_0$

$$\Rightarrow a \cdot d(n) \leq \underbrace{a \cdot c}_{c'} \cdot f(n) = c' \cdot f(n), \ \forall n > n_0$$

$c' > 0, n_0 > 0$

$$\Rightarrow a \cdot d(n) = O(f(n)), \ \forall a > 0.$$

Proviamo la ②

$$d(n) = O(f(n)), \quad e(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n) + e(n) = O(f(n) + g(n))$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\exists c > 0, n_0 > 0$: $\exists \bar{c} > 0, \bar{n}_0 > 0$:

$d(n) \leq c \cdot f(n)$ $e(n) \leq \bar{c} \cdot g(n)$ (sommando membro a membro)

$\forall n > n_0$ $\forall n > \bar{n}_0$

$$d(n) + e(n) \leq c \cdot f(n) + \bar{c}\, g(n) \leq \underbrace{\max\{c, \bar{c}\}}_{c'} (f(n) + g(n)), \ \forall n > \max\{n_0, \bar{n}_0\}$$