Alberi

Rappresentano una generalizzazione delle liste: ogni elemento di un albero, detto NODO, può avere più di un successore.

Ogni nodo ha associata una lista di nodi "figli" (eventualmente vuota) collegati da un arco. I nodi senza figli sono detti FOGLIE. I restanti, nodi INTERNI.

L'albero associa a tutti i nodi, eccetto al primo che viene detto RADICE, un unico "genitore", detto PADRE. I nodi figli dello stesso padre sono detti FRATELLI.

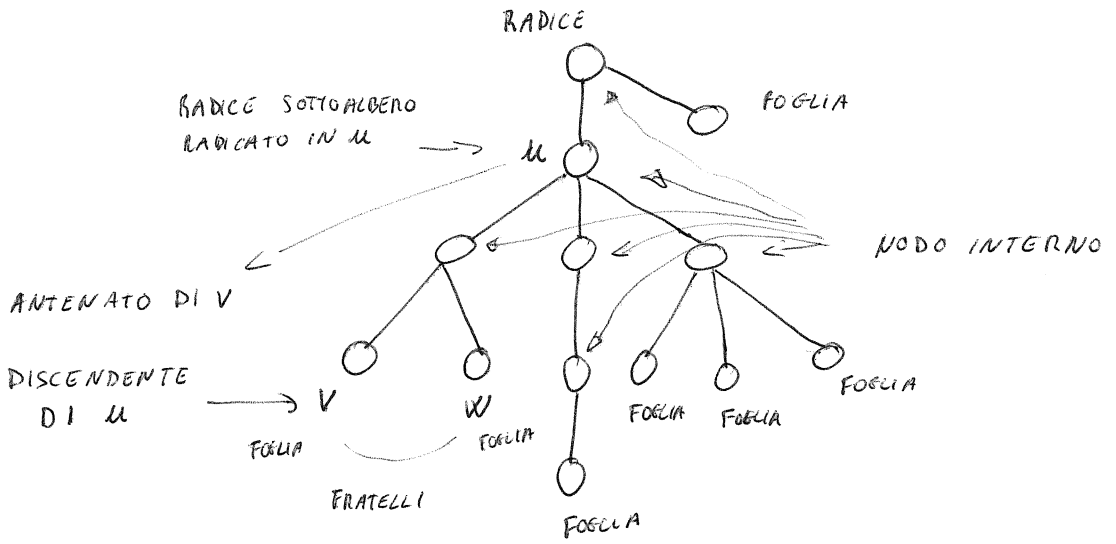
Ad ogni nodo interno è associato un sottoalbero di cui tale nodo è radice.

Se un nodo u è la radice di un sottoalbero contenente un nodo v, diciamo che u è un antenato di v e v è un discendente di u.

La DISTANZA tra due nodi dell'albero è il numero di archi che separano i due nodi.

L'ALTEZZA dell'albero è la distanza massima di una foglia dalla radice.

La PROFONDITÀ di un nodo è la sua distanza dalla radice.



DISTANZA $(u, v) = 2$ ALTEZZA $= \infty$ PROFONDITÀ $(w) = 3$

Alberi binari

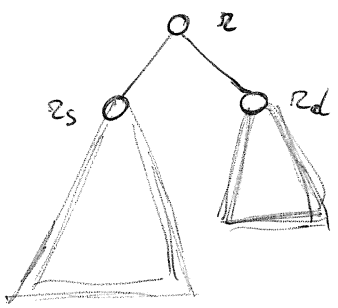
Ogni nodo ha <u>al più due</u> figli e ogni figlio ha un ruolo determinato: figlio destro o figlio sinistro.

Solitamente sono definiti ricorsivamente.

1) Albero vuoto = albero senza nodi, indicato con NULL.

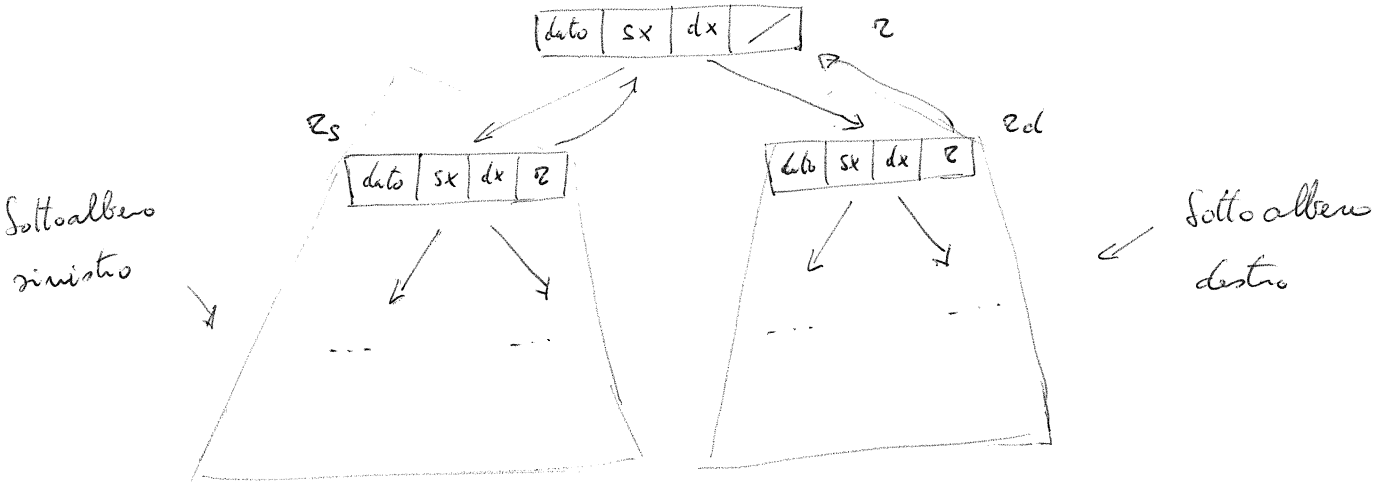
2) Albero binario <u>non vuoto con n elementi</u> = radice r "a capo" di due sottoalberi binari contenenti i <u>restanti n-1 elementi</u> e radicati nei figli r_S (sinistro) ed r_d (destro) della radice r.

NULL
(albero binario vuoto)



In un calcolatore solitamente un albero binario viene rappresentato facendo uso di tre campi.

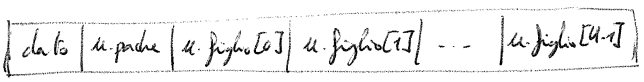
Un nodo u contiene: $u.dato$, $u.sx$, $u.dx$ (e $u.padre$ a volte)



Alberi cardinali e ordinali

Gli alberi binari sono un caso particolare degli alberi K-ari, detti anche CARDINALI, in cui ogni nodo ha K figli, numerati da 0 a K-1.

Un nodo u ha i campi $u.dato$, $u.padre$ e un array $u.figlio$ dove $u.figlio[i]$ corrisponde al figlio in posizione i, per $0 \le i \le K-1$.



Per $K=2$ ritroviamo gli alberi binari, cioè $u.figlio[0] = u.sx$ e $u.figlio[1] = u.dx$. Per $K=3, 4$ si ottengono alberi ternari e quaternari, che possono essere definiti ricorsivamente come gli alberi binari.

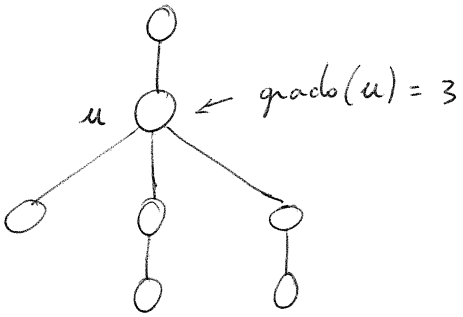
Gli alberi ordinali si differenziano dai cardinali perché ogni nodo memorizza soltanto la lista ordinata dei riferimenti non nulli ai suoi figli.

Il numero di figli, variabile da nodo a nodo, viene detto GRADO del nodo.

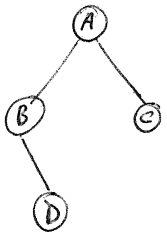
Se il numero di nodi dell'albero è n, un nodo ha grado

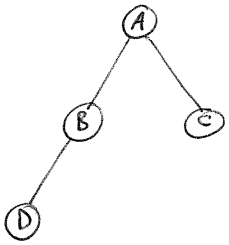
$$0 \leq d \leq n-1.$$

(foglia) (radice, e tutti figli)



Alberi K-ari e alberi ordinali sono due strutture di dati DIFFERENTI



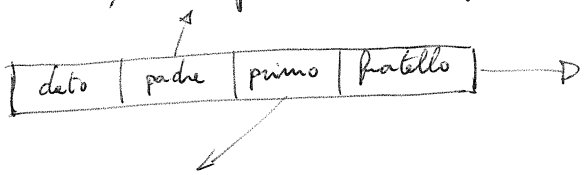


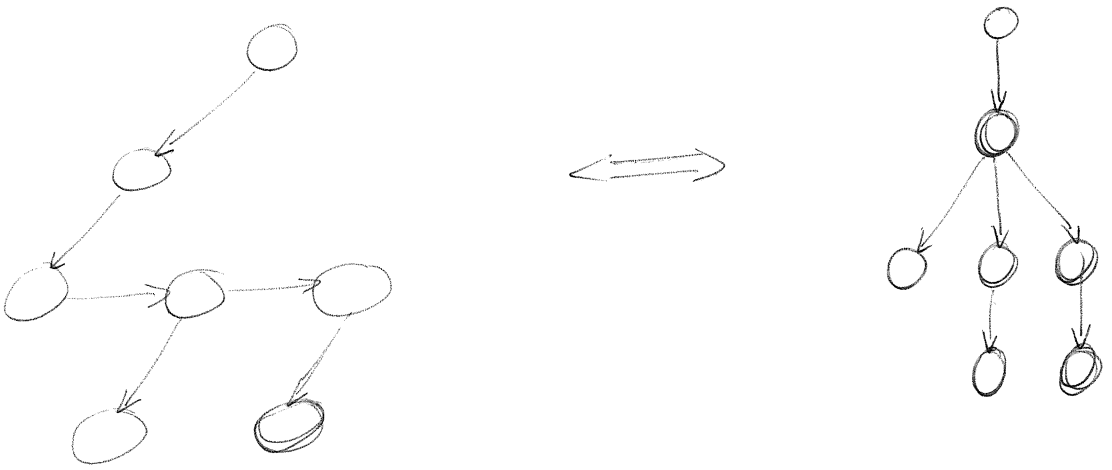
Per esempio i due alberi a destra sono DISTINTI se considerati come alberi binari, uguali se visti come alberi ordinali (D unico figlio del nodo B)

Inoltre, negli alberi ordinali, NON è possibile preallocare un nodo in modo da poter ospitare il massimo numero di figli, essendo il suo grado variabile.

Si usa la "memorizzazione binarizzata".

Nodo u : u.dato, u.padre, u.primo e u.fratello.



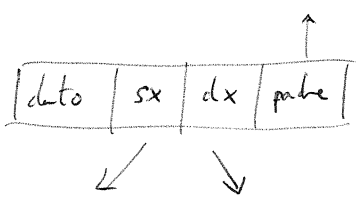


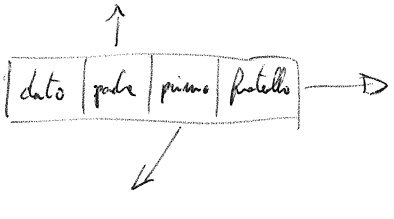
Si noti che mentre negli alberi binari l'accesso ad un nodo figlio richiede sempre tempo $O(1)$, negli alberi ordinali per raggiungere il figlio i è necessario tempo $O(i)$.

Codice per scorrere la lista dei figli

```
p = u.primo;
j = 0;
WHILE ((p != NULL) && (j < i)){
    p = p.fratello;
    j = j + 1;
}
```

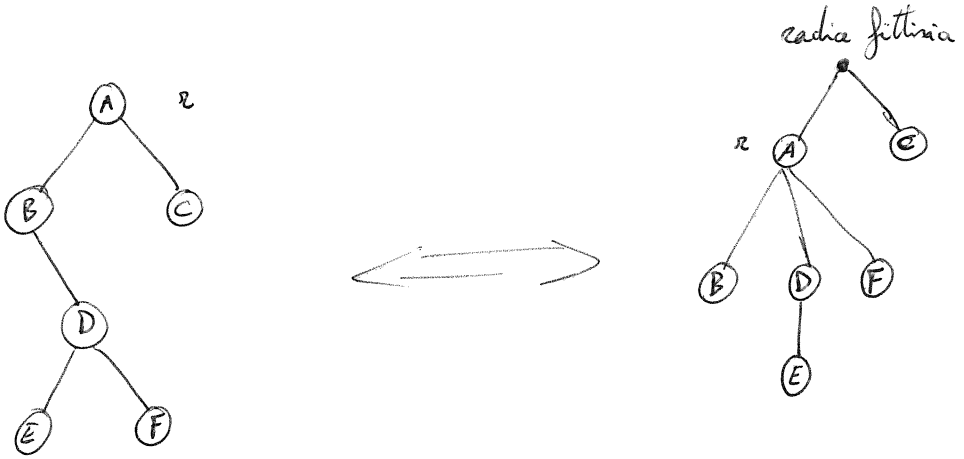
La rappresentazione in memoria dei nodi di un albero ordinale è analoga a quella dei nodi di un albero binario. Entrambe usano due riferimenti. Tuttavia la SEMANTICA è ben diversa





D'altra parte esiste una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA tra gli alberi binari e gli alberi ordinali.

Ogni albero binario di n nodi con radice r è la memorizzazione binarizzata di un albero distinto ordinale di $n+1$ nodi in cui viene introdotto una radice fittizia il cui primo figlio è r.



Il campo $u.sx$ degli alberi binari coincide con il campo $u.primo$ della memorizzazione binarizzata degli alberi ordinali, e il campo $u.dx$ coincide con il campo $u.fratello$.

Esercizio. Un nodo unario di un albero è un nodo interno con un solo figlio. Dimostrare che in un albero T non vuoto che non abbia nodi unari, il numero di nodi interni n è strettamente minore del numero delle foglie f.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n.

Se $n = 0$, poiché l'albero T non è vuoto, ha solo la radice. Pertanto $n = 0 < 1 = f$.
(Foglia)

Supponiamo che l'asserto sia vero per ogni $K < n$ e dimostriamolo per n. Sia T un albero con n nodi interni.

Sia x un nodo interno i cui figli siano tutti foglie (deve necessariamente esistere).

Costruiamo un nuovo albero T' cancellando da T tutti i figli di x. Il numero di nodi interni di T' è $n-1$, mentre il numero di foglie è $f' = f - c + 1$, dove c sono i figli cancellati e 1 rappresenta il fatto che x è diventato foglia.

Per l'assenza di nodi interni unari, $c \geq 2$ e, quindi, $f' \leq f - 1$. Poiché, per ipotesi induttiva, $n' < f'$, ovvero $n - 1 < f - 1$, risulta $n < f$.

L'affermazione è dimostrata.