Costruzioni teoriche

Paolo D'Arco
pdarco@unisa.it

Universitá di Salerno

Elementi di Crittografia

Contenuti

Motivazioni

Pseudocasualitá in tre forme

- Generatori PRG
- Funzioni PRF
- Permutazioni PRP

Blocchi di base per tutta la crittografia a chiave privata

Funzioni one-way: facili da calcolare, difficili da invertire

Se esistono, é possibile costruire PRG, PRF e PRP.

Si puó dimostrare che le funzioni one-way sono necessarie per la crittografia a chiave privata.

One-way Function

Sia $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ una funzione. Siano A ppt, n par. di sicurezza.

$Invert_{A,f}(n)$

1. Il challenger sceglie uniformemente $x \in \{0,1\}^n$ e calcola $y = f(x)$
2. A riceve in input 1^n e y e dà in output x'
3. L'output dell'esperimento è 1 se $f(x') = y$; altrimenti, 0.

Nota: A non deve trovare necessariamente x. Basta una pre-immagine x' tale che $f(x') = y = f(x)$

One-way Function

Definizione 8.1. Una funzione $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ é one way se

1. (Facile da calcolare): esiste un algoritmo di tempo polinomiale M_f per calcolare f, i.e., per ogni x risulta $M_f(x) = f(x)$
2. (Difficile da invertire): per ogni A ppt, esiste una funzione trascurabile $negl(n)$ tale che

$$Pr[Invert_{A,f}(n) = 1] \leq negl(n)$$

Nota: il secondo requisito equivale a dire che: $\forall$ A ppt, $\exists$ $negl(n)$:

$$Pr_{x \leftarrow \{0,1\}^n}[A(1^n, f(x)) \in f^{-1}(f(x)))] \leq negl(n)$$

One-way Function

Una funzione che non é one-way **non** é necessariamente facile da invertire sempre. Piuttosto, l'inverso é:

$\exists$ A ppt ed una funzione γ non trascurabile tale A inverte $f(x)$ con prob. almeno $\gamma(n)$

$$\Downarrow$$

$\exists$ un polinomio positivo $p(\cdot)$ tale che, per infiniti valori di n, A inverte $f(x)$ con prob. almeno $1/p(n)$

Per esempio, se esiste A che inverte f con prob. n^{-10} per tutti i valori pari di n (ma fallisce sui dispari), allora f non é one-way.

One-way Function

In tempo esponenziale, ogni funzione one-way puó essere invertita in ogni punto, provando tutti i possibili $x \in \{0,1\}^n$

$$\Downarrow$$

L'esistenza delle funzioni one-way é inerentemente una assunzione circa la difficoltá *computazionale*, i.e., riguarda un problema risolvibile in principio, supposto difficile da risolvere efficientemente

One-way Function

Spesso saremo interessati a funzioni one-way con proprietá strutturali aggiuntive

$$f \text{ preserva la lunghezza se } |f(x)| = |x|, \text{ per ogni } x$$

Una funzione one-way che preserva la lunghezza ed é 1-a-1 é una permutazione one-way

$$\Downarrow$$

Ogni valore y ha un'unica pre-immagine $x = f^{-1}(x)$. Nonostante ció, é ancora difficile trovare x in tempo polinomiale.

One-way Function

La definizione precedente considera una singola funzione su dominio e codominio infiniti.

Tuttavia molte papabili funzioni one-way sono definite per certi parametri I.

La funzione f_I dovrebbe essere one-way sulle scelte di I.

Conviene considerare allora famiglie di funzioni (permutazioni) one-way.

Famiglia di funzioni

Definizione 8.2. Una tripla $\Pi = (Gen, Samp, f)$ di algoritmi ppt é una famiglia di funzioni se:

1. L'algoritmo di generazione dei parametri $Gen(1^n)$ dá in output I, con $|I| \geq n$. Ciascun I definisce D_I ed R_I tali che

$$f_I : D_I \to R_I$$

2. L'algoritmo di campionamento $Samp(I)$ dá in output un elemento uniformemente distribuito di D_I
3. L'algoritmo di valutazione f deterministico, su input I ed $x \in D_I$, dá in output $y \in R_I$. Scriveremo $y := f_I(x)$

Famiglia di permutazioni

Π é una famiglia di permutazioni se, per ogni $I \leftarrow$ restituito da $Gen(1^n)$, risulta $D_I = R_I$ e la funzione $f_I : D_I \rightarrow R_I$ é una biiezione.
L'esperimento $Invert_{A,\Pi}(n)$ é definito come segue:

$Invert_{A,\Pi}(n)$

1. Il challenger sceglie $I \leftarrow Gen(1^n)$, $x \leftarrow Samp(I)$ e calcola $y := f_I(x)$.
2. A riceve in input I e y e dà in output x'
3. L'output dell'esperimento è 1 se $f_I(x') = y$; altrimenti, 0.

Famiglie di funzioni one-way

Definizione 8.3. Una famiglia di funzioni (permutazioni) $\Pi = (Gen, Samp, f)$ é one way se, per ogni A ppt, esiste una funzione trascurabile $negl(n)$ tale che

$$Pr[Invert_{A,\Pi}(n) = 1] \leq negl(n)$$

$\triangle$

Allo stato attuale delle nostre conoscenze non sappiamo se esistono.

Congetturiamo (assumiamo) la loro esistenza.

Congettura basata sul fatto che diversi problemi computazionali naturali hanno ricevuto notevole attenzione ma non sono stati trovati algoritmi risolutivi di tempo polinomiale.

Possibili famiglie di funzioni one-way

Problema piú famoso, fattorizzazione di interi.

É facile prendere due numeri e farne il prodotto.

Difficile prendere un intero grande e trovarne i fattori

$$f_{mult}(x, y) = x \cdot y$$

Se non poniamo alcuna restrizione, f_{mult} é facile da invertire.

Con alta probabilitá $x \cdot y$ é pari e quindi $(2, \frac{x \cdot y}{2})$ é un inverso per $f_{mult}(x, y)$

Restringeremo il dominio a x e y primi grandi e della stessa lunghezza.

Possibili famiglie di funzioni one-way

Un'altra funzione papabile é basata sul problema Subset Sum ed é definita da

$$f_{SS}(x_1, \ldots, x_n, J) = (x_1, \ldots, x_n, \Sigma_{j \in J} x_j \bmod 2^n),$$

dove

- $x_1, \ldots, x_n$ sono stringhe di n bit viste come interi
- J stringa di n bit che specifica un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$

Invertire f_{SS} su $(x_1, \ldots, x_n, y)$ significa trovare un

$$Z \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ tale che } y = \Sigma_{j \in Z} x_j \bmod 2^n$$

Ricordo che Subset Sum é NP-Completo.

$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ necessario ma non sufficiente

Nota peró che:

$$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} \textbf{ non implica che } f_{SS} \text{ é one-way}$$

$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} \Rightarrow$ ogni algoritmo di tempo polinomiale fallisce nel risolvere il problema Subset Sum su **almeno** un input.

D'altra parte f_{SS}, per essere one-way, richiede che ogni algoritmo di tempo polinomiale fallisca nel risolvere il problema (almeno per certi parametri) **quasi sempre**.

Pertanto, la nostra convinzione che f_{SS} sia one-way é basata sul fatto che non conosciamo algoritmi polinomiali che risolvono il problema **anche con probabilitá bassa** su **istanze casuali**, piuttosto che sul fatto che il problema sia $\mathcal{NP}$ Completo.

Possibile famiglia di permutazioni one-way

Sia $\Pi = (Gen, Samp, f)$ definita come segue

- $Gen(1^n) \rightarrow (p, g)$, dove p é un primo di n bit e $g \in \{2, \ldots, p-1\}$ é un elemento speciale detto generatore di Z_p^* (ci torneremo ...)
- $Samp(p, g) \rightarrow x \in \{1, \ldots, p-1\}$ restituisce un x scelto uniformemente
- $f_{p,g}(x) = [g^x \bmod p]$

$f_{p,g}$ risulta efficientemente calcolabile e 1-a-1, e dunque é una permutazione.

La difficoltá di inversione é basata sulla difficoltá congetturata del **problema del logaritmo discreto**.

Predicati Hard-core

Dire che una funzione é one-way significa dire che é difficile da invertire: dato $y = f(x)$, il valore x non puó essere calcolato **nella sua interezza** in tempo polinomiale.

Non significa che **nulla** possa essere calcolato su x in tempo polinomiale!

Per esempio, se g é one-way, allora

$$f(x_1, x_2) = (x_1, g(x_2)), \qquad \text{dove } |x_1| = |x_2|$$

risulta one-way anche se rivela metá del suo input.

In molte applicazioni abbiamo bisogno di identificare un pezzo di informazione relativo ad x "nascosto da $f(x)$."

Predicati Hard-core

Un predicato hard-core $hc : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ di f ha la proprietá che $hc(x)$ é difficile da calcolare con probabilitá significativamente migliore di $1/2$, dato $f(x)$.

In modo piú formale:

Definizione 8.4. Una funzione $hc : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ é un predicato hard-core di una funzione f se hc puó essere calcolato in tempo polinomiale e, per ogni A ppt, esiste una funzione trascurabile $negl(n)$ tale che

$$Pr_{x \leftarrow \{0,1\}^n}[A(1^n, f(x)) = hc(x)] \leq 1/2 + negl(n)$$

Non é facile costruire predicati hard-core.

Predicati Hard-core

Si consideri

$$hc(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{dove } x = x_1 \dots x_n$$

Idea alla base: f one-way $\Rightarrow$ almeno un bit di x_i é nascosto da $f(x)$

$$\Downarrow$$

hc é un predicato hard-core **per qualsiasi** funzione one-way.

Purtroppo non funziona ...

Predicati Hard-core

Sia g una funzione one-way e sia

$$f(x) = (g(x), \bigoplus_{i=1}^{n} x_i)$$

f é one-way ma non nasconde $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i$, che é parte del suo output!

Pertanto, hc non é un predicato hard-core per f

Predicati hard-core

Nota: alcune funzioni hanno predicati hard-core banali

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1, \ldots, x_{n-1} \quad \text{(butta via l'ultimo bit di input)}$$

É difficile determinare x_n dato $f(x_1, \ldots, x_n)$ poiché x_n é indipendente da f.

La funzione f non é neanche one-way.

Nelle costruzioni crittografiche, predicati di questo tipo non sono utili.

Domanda: *esiste un predicato hard-core per qualsiasi funzione one-way?*

Non ha ancora risposta, ma possiamo mostrare qualcosa di piú debole, utile ai nostri scopi

Predicati Hard-core

Teorema 8.5 **(Goldreich-Levin).** Supponiamo che le funzioni (permutazioni) one-way esistano. Allora esiste una funzione (permutazione) one-way g ed un predicato hardcore hc di g.

Sia f una funzione one-way. Le funzioni g ed hc sono costruite come segue

$$g(x,r) = (f(x), r), \quad \text{dove} \quad x = x_1 \dots x_n, \quad r = r_1 \dots r_n$$

$$hc(x,r) = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i, \text{ dove } x_i \text{ (risp. } r_i) \text{ é i-esimo bit di } x \text{ (risp. } r)$$

Se r é uniforme, allora $hc(x,r)$ é l'xor di un sottoinsieme casuale di bit di x.

Essenzialmente il teorema di Goldreich-Levin afferma che, se f é one-way, allora $f(x)$ nasconde l'xor di un sottoinsieme casuale dei bit di x.

PRG da predicati hardcore

Mostriamo come un predicato hard-core di una permutazione one-way possa essere usato per costruire un generatore pseudo-casuale

Teorema 8.6. Sia f una permutazione one-way, e sia hc un predicato hardcore di f. Allora

$$G(s) = f(s)||hc(s)$$

é un generatore pseudocasuale con fattore di espansione $\ell(n) = n + 1$.

Perché funziona? Intuizione:

- s uniforme $\Rightarrow$ $f(s)$ uniformemente distribuito, essendo f una permutazione, ovvero i primi n bit di $G(s)$ sono uniformi
- $hc(s)$ predicato hard-core di f $\Rightarrow$ $hc(s)$ sembra casuale dato il valore di $f(s)$

Pertanto, l'intero output di G é pseudocasuale

PRG da predicati hardcore

Per applicazioni abbiamo bisogno di PRG con espansione maggiore

Teorema 8.7. Se esiste un PRG con fattore di espansione $\ell(n) = n + 1$ allora, per ogni polinomio $poly(n)$, esiste un PRG con fattore di espansione $poly(n)$.

Pertanto, PRG con fattori di espansione arbitraria possono essere costruiti a partire da una qualsiasi permutazione one-way.

Ricordo che

- PRG sono sufficienti per costruire schemi di cifratura a chiave privata EAV-sicuri
- Per schemi di cifratura CPA-sicuri e schemi di autenticazione di messaggi occorro PRF.

PRF e PRP forti da PRG

Teorema 8.8. Se esiste un PRG con fattore di espansione $\ell(n) = 2n$, allora esiste una PRF.

In realtá possiamo mostrare un risultato piú forte

Teorema 8.9. Se esiste una PRF, allora esiste una PRP forte.

Discendono immediatamente i seguenti corollari

Corollario 8.10. Assumendo l'esistenza di **permutazioni one-way**, esistono PRG con fattore di espansione polinomiale, PRF e PRP forti

$$OWP \Rightarrow PRG, PRF, SPRP$$

Schemi di cifratura e di autenticazione

Corollario 8.11. Assumendo l'esistenza di **permutazioni one-way**, esistono schemi di cifratura a chiave privata *CCA*-sicuri e schemi di autenticazione di messaggi sicuri

$$OWP \Rightarrow CCA - \text{secure encryption}, \ \text{secure} - MAC$$

É possibile dimostrare (ma é piú complicato) che gli stessi risultati valgono a partire dalla sola esistenza di **funzioni one-way** (OWF invece di OWP).

Teorema di Goldreich-Levin

Teorema 8.5 **(Goldreich-Levin).** Supponiamo che le funzioni (permutazioni) one-way esistano. Allora esiste una funzione (permutazione) one-way g ed un predicato hardcore hc di g.

Il risultato viene provato "per passi".

Se esiste A ppt che calcola **sempre correttamente**

$$gl(x,r) = hc(x,r) \text{ data } g(x,r) = (f(x),r),$$

per ogni n e per ogni $x, r \in \{0,1\}^n$, allora esiste A' tale che

$$A'(1^n, f(x)) = x \qquad \forall n \text{ e } \forall x \in \{0,1\}^n$$

Questo é il caso semplice.

$A'(1^n, y)$ calcola $x_i = A(y, e^i)$, per $i = 1, \ldots, n$, e dá in output $x_1, \ldots, x_n$

Teorema di Goldreich-Levin

Infatti, essendo e_i la stringa di n bit con un solo 1 in posizione i,

$$x_i = A(f(x^*), e^i) = gl(x^*, e^i) = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j^* \cdot e_j^i = x_i^*$$

Pertanto, $x_i = x_i^*$, per tutti gli i, ed A' dá in output l'inversa corretta x.

Il risultato generale viene provato mostrando

- prima il caso in cui A calcola con **prob.** $> 3/4$ il predicato $gl(x, r)$. Questa analisi é complicata
- poi, raffinando ulteriormente la prova, che se A calcola con **prob. non trascurabile** $gl(x, r)$, allora A' inverte con prob. non trascurabile.

Se interessati, i dettagli sono nella sottosezione 8.3.

PRG con espansione polinomiale

Supponiamo di disporre di un PRG $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n+1}$

Usiamo G "ripetutamente" per costruire $\hat{G}$ come segue. Per capire l'idea, costruiamo $\hat{G} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n+2}$

Dato $s \in \{0,1\}^n$, calcola $t_1 = G(s)$.

Degli $n+1$ bit di t_1, cioé $t_1^1 \dots t_1^n \mathrm{t}_1^{n+1}$, i primi n vengono usati come seme per G.

Vale a dire, ponendo $t = t_1^1 \dots t_1^n$, calcola $w_2 = G(t)$.

Agli $n+1$ bit di w_2, cioé $w_2^1 \dots w_2^{n+1}$, viene concatenato t_1^{n+1}.

Pertanto,

$$\hat{G}(s) = w_2^1 \dots w_2^{n+1} \mathrm{t}_1^{n+1}.$$

PRG con espansione polinomiale

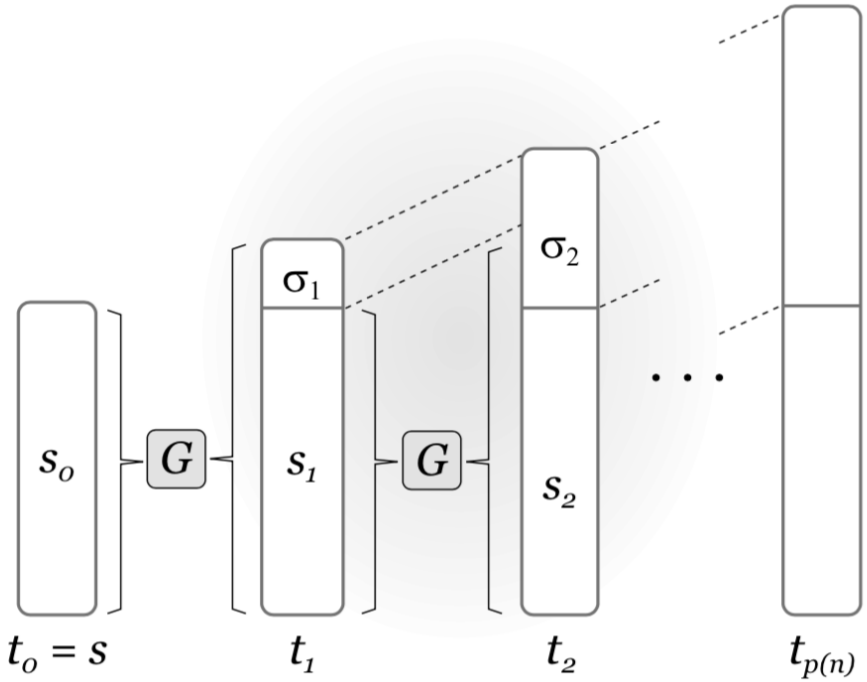
Indicando con $p(n)$ il fattore di espansione voluto, il caso generale diventa:

1. Set $t_0 := s$. For $i = 1, \ldots, p(n)$ do:
   (a) Let s_{i-1} be the first n bits of t_{i-1}, and let σ_{i-1} denote the remaining $i-1$ bits. (When $i = 1$, $s_0 = t_0$ and σ_0 is the empty string.)
   (b) Set $t_i := G(s_{i-1}) \| \sigma_{i-1}$.
2. Output $t_{p(n)}$.

Ogni iterazione allunga "il suffisso" σ_i di un bit. L'ultima iterazione aggiunge $n+1$ bit "in testa".

PRG con espansione polinomiale

Graficamente:



PRG con espansione polinomiale

Se usiamo come PRG di partenza il generatore

$$G(s) = f(s)||hc(s) \quad (f \text{ perm. one-way e } hc \text{ predicato hardcore})$$

allora la costruzione generale precedente dá luogo a

$$\hat{G} = f(f^{\ell-1}(s))||hc(f^{\ell-1}(s))||\ldots||hc(f^{i}(s))||\ldots||hc(s),$$

dove f^i, per $i = 1, \ldots, \ell$, denota l'applicazione iterata i volte di f.
Il fattore di espansione del generatore é $\ell + n$ bits.

Costruzioni di PRF

Mostreremo come costruire una PRF a partire da un qualsiasi PRG che raddoppia la lunghezza dell'input.

Restringeremo l'attenzione a funzioni che preservano la lunghezza, i.e., per ogni $k \in \{0,1\}^n$,

$$F_k : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$$

Per familiarizzare con la costruzione, consideriamo un caso semplice. Sia $n = 2$. Disponiamo di $G : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}^4$ e vogliamo realizzare

$$F : \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}^2$$

Sia $G(k) = G_0(k)||G_1(k)$ (cioé, G_0 prima metá di $G(k)$, G_1 seconda)

Costruzioni di PRF

Definiamo F come segue

$$F_k(00) = G_0(G_0(k)), \qquad F_k(10) = G_1(G_0(k))$$

$$F_k(01) = G_0(G_1(k)), \qquad F_k(11) = G_1(G_1(k))$$

Intuitivamente F é pseudocasuale perché, se G é un PRG, allora

- $G_0(k)||G_1(k)$ é indistinguibile da $K_0||K_1$ uniforme
- e, parimenti,

$$G_0(G_0(k))||G_0(G_1(k))||G_1(G_0(k))||G_1(G_1(k))$$

é indistinguibile da

$$G_0(K_0)||G_0(K_1)||G_1(K_0)||G_1(K_1).$$

Costruzione di Goldreich-Goldwasser-Micali

Il caso generale diventa quindi:

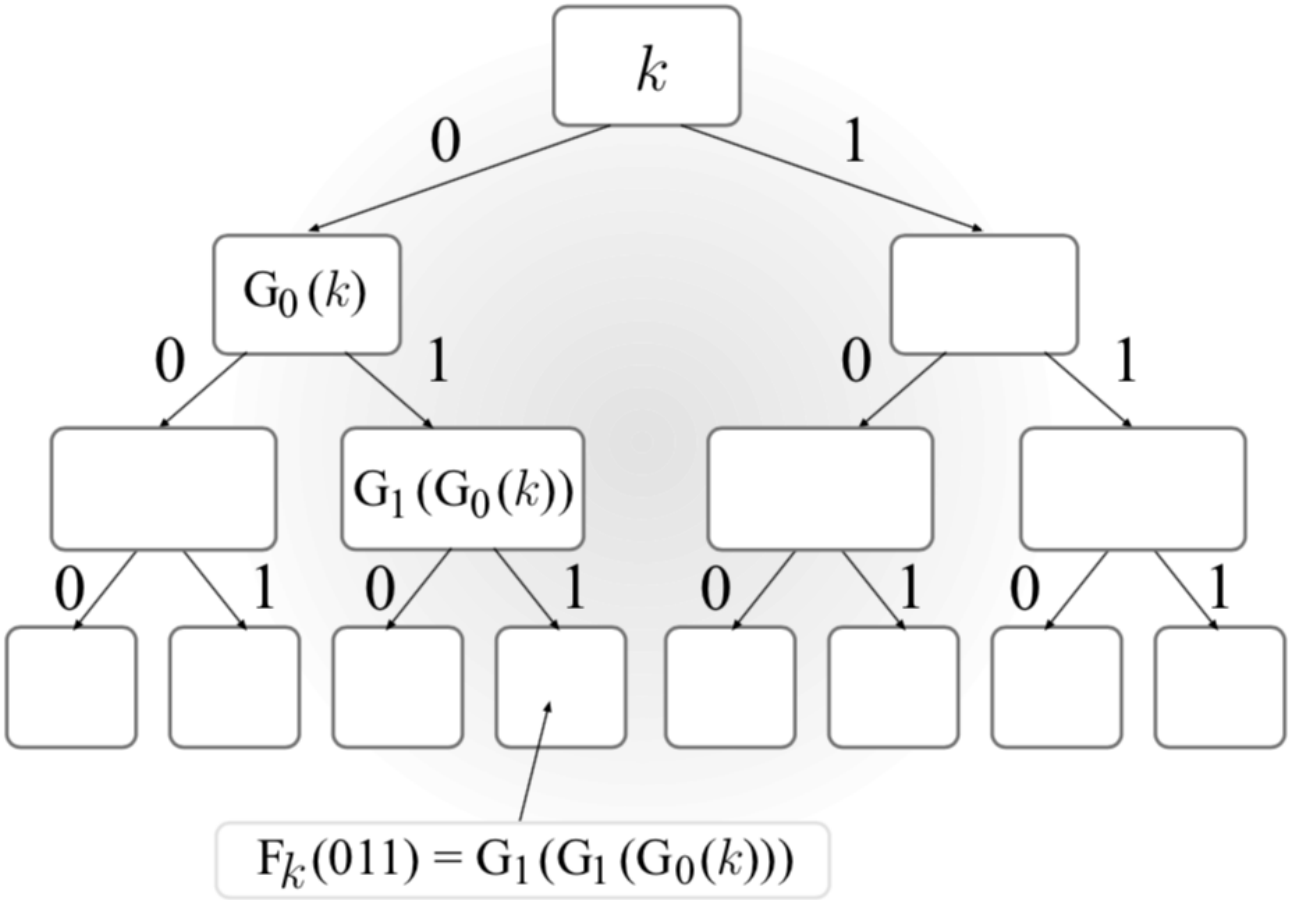
CONSTRUCTION 8.20

Let G be a pseudorandom generator with expansion factor $\ell(n) = 2n$, and define G_0, G_1 as in the text. For $k \in \{0,1\}^n$, define the function $F_k : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ as:

$$F_k(x_1 x_2 \cdots x_n) = G_{x_n}\left(\cdots\left(G_{x_2}\left(G_{x_1}(k)\right)\right)\cdots\right).$$

Costruzione di Goldreich-Goldwasser-Micali

Graficamente:



Costruzione di Goldreich-Goldwasser-Micali

La taglia dell'albero é esponenziale in n

Nonostante ció si noti che per calcolare F_k **non** occorre costruire tutto l'albero e memorizzarlo. Bastano n valutazioni di G

Teorema 7.22. Se G é un PRG con fattore di espansione $\ell(n) = 2n$, allora la Costruzione 7.21 produce una funzione pseudocasuale.

La dimostrazione utilizza una tecnica di prova elegante detta "dell'argomento ibrido."

É possibile costruire permutazioni pseudocasuali e permutazioni pseudocasuali forti usando una funzione pseudocasuale F e reti di Feistel a 3 round (PRP) e a 4 round (SPRP).

Per dettagli si vedano il Teorema 8.22 e la Costruzione 8.23.