

Costruzioni di primitive simmetriche

Paolo D'Arco
pdarco@unisa.it

Università di Salerno

Elementi di Crittografia

- 1 Costruzioni pratiche di primitive simmetriche
- 2 Stream cipher
- 3 Block cipher
- 4 Paradigma della confusione e della diffusione
- 5 Reti SPN e reti di Feistel

Abbiamo visto che, dati **PRG**, **PRF** e funzioni **Hash**, esistono:

- schemi simmetrici di cifratura sicuri in accordo a diverse nozioni
- codici per l'autenticazione dei messaggi di lunghezza arbitraria
- protocolli vari per funzionalità di base utili nelle applicazioni

Due domande si pongono:

- 1 Esistono questi "oggetti"?
- 2 Come possono essere costruiti?

Vedremo: costruzioni **euristiche** efficienti di queste primitive

Non possono essere provate sicure a partire da nessuna assunzione piú debole ma sono basate su principi di progettazione che a volte possono essere **giustificati** dall'analisi teorica.

Queste costruzioni hanno resistito per molti anni al pubblico scrutinio. É ragionevole assumere che siano sicure. Non c'è differenza fondamentale ma **qualitativa** tra assumere che:

- La **Fattorizzazione** é difficile
 - sembra un requisito piú debole
 - piú naturale
- **AES** é una permutazione pseudocasuale
 - assunzione piú forte
 - meno naturale e meno studiata

Obiettivi delle prossime lezioni

- presentare alcuni **principi** di progettazione usati nella costruzione delle moderne primitive crittografiche
- introdurre **costruzioni** popolari ed ampiamente usate

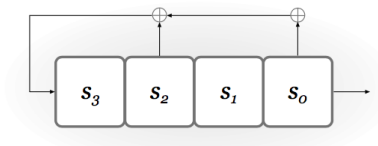
Due algoritmi deterministici: (*Init*, *Next*)

- *Init*: prende in input una chiave ed (opzionalmente) *IV* e dá in output uno stato iniziale *st*
- *Next*: può essere invocata ripetutamente per avere in output una sequenza infinita di bit y_1, y_2, \dots a partire da *st*

⇒ l'output deve essere:

- senza *IV* (PRG): **indistinguibile** da una sequenza di bit scelti indipendentemente ed uniformemente
- con *IV* (PRF): per IV_1, \dots, IV_ℓ le ℓ sequenze di output **indistinguibili** da sequenze di bit scelti indipendentemente ed uniformemente

Linear-feedback Shift Registers: *LFSR*



Storicamente usati per la generazione di numeri pseudocasuali. Di per sé non danno generatori pseudocasuali forti.

Tecnicamente: array di n registri con un meccanismo di retroazione (feedback loop) specificato da n coefficienti di feedback c_0, c_1, \dots, c_{n-1}

Nell'esempio $c_0 = c_2 = 1$ e $c_1 = c_3 = 0$

Il numero n di registri é il **grado** dell'*LFSR*.

Se lo stato al tempo t é s_{n-1}^t, \dots, s_0^t , allora il prossimo stato, dopo il tick del clock, é:

$$\begin{aligned}s_i^{t+1} &= s_{i+1}^t, \quad \text{per } i = 0, \dots, n-2 \\ s_{n-1}^{t+1} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} c_i \cdot s_i^t\end{aligned}$$

Se denotiamo con y_i i bit di output, allora:

$$\begin{aligned}y_i &= s_{i-1}^0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n \\ y_i &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} c_j \cdot y_{i-n+j-1} \quad \text{per } i > n.\end{aligned}$$

I primi n bit sono pertanto lo stato iniziale.

Un LFSR trasla i bit a destra, producendo un bit di output e liberando il registro piú a sinistra. Nell'esempio precedente, se lo stato iniziale é $(0, 0, 1, 1)$:

(0, 0, 1, 1)

(1, 0, 0, 1)

(1, 1, 0, 0)

(1, 1, 1, 0)

(1, 1, 1, 1)

La sequenza di output é 1, 1, 0, 0, 1

Un *LFSR* può ciclare attraverso al più 2^n stati.

Un *LFSR* di **lunghezza massima** cicla attraverso $2^n - 1$ stati prima di ripetere la sequenza (lo stato $(0, \dots, 0)$ va escluso: entrando in esso non se ne esce più).

La lunghezza dipende dai coefficienti di feedback.

Gli *LFSR* hanno buone proprietà statistiche

La stringa di output presenta approx lo stesso numero di 0 e di 1.

Tuttavia, **non** sono imprevedibili i bit prodotti.

Un attaccante può ricostruire l'intero stato di un LFSR di grado n dopo aver visto $2n$ bit di output

$$y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}$$

I primi rappresentano lo stato iniziale. Dei secondi la forma è nota.

Pertanto possiamo determinare i coefficienti di feedback c_0, \dots, c_{n-1}

$$y_{n+1} = c_{n-1} y_n \oplus \dots \oplus c_0 y_1$$

$$\vdots$$

$$y_{2n} = c_{n-1} y_{2n-1} \oplus \dots \oplus c_0 y_n.$$

Si può dimostrare che per un *LFSR* di grado n di lunghezza massima, le n equazioni sono *linearmente indipendenti modulo 2*

⇒ $\exists!$ sol. per c_0, \dots, c_{n-1} . Facilmente calcolabile con i metodi dell'algebra lineare.

⇒ Tutti i bit seguenti sono noti.

Soluzioni. Aggiunta di **non linearità**.

- Prima soluzione: rendere il feedback non lineare.

$$\begin{aligned}s_i^{t+1} &= s_{i+1}^t, \quad \text{per } i = 0, \dots, n-2 \\ s_{n-1}^{t+1} &= g(s_0^t, \dots, s_{n-1}^t)\end{aligned}$$

dove g è una funzione non lineare. È possibile progettare *FSR* (non lineari) di lunghezza massima e con buona proprietà statistiche.

- Seconda soluzione: combinazione.

Introduce la non linearit  nella sequenza di output. Nella configurazione pi  semplice abbiamo un *LFSR* modificato, in cui il bit di output   ottenuto calcolando una funzione non lineare g di **tutti** i registri

\Rightarrow g deve essere bilanciata, cio 

$$Pr[g(s_0^t, \dots, s_{n-1}^t) = 1] \approx 1/2$$

Una variante della precedente consiste

- nell'usare diversi *LFSR*, combinando assieme i bit di output dei singoli *LFSR*, attraverso una funzione non lineare g (generatore della combinazione)

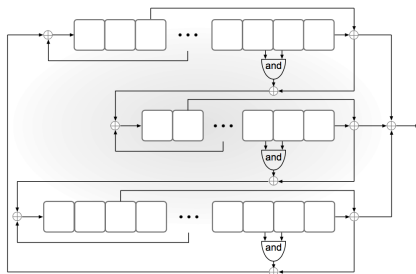
Gli *LFSR* non é richiesto che abbiano lo stesso grado.

In realtà la lunghezza del ciclo viene massimizzata se i gradi sono diversi.

Cura va posta nel far sí che il bit di l'output **non** dipenda maggiormente da uno degli *LFSR* tra i tanti.

Trivium (estream project, 2008)

Usa tre *FSR* non lineari *A* (grado 93), *B* (grado 84) e *C* (grado 111) accoppiati



Ha uno stato di 288 bit. Fu progettato per avere una descrizione semplice e un'implementazione **hardware** compatta.

Trivium (estream project, 2008)

L'output é l'xor dei tre bit piú a destra dei registri A , B e C .

$Init(\cdot)$ accetta

- una chiave di 80 bit, caricata nei registri di A piú a sinistra
- un vettore IV di 80 bit, caricato nei registri di B piú a sinistra

I registri restanti sono posti a 0, **eccetto** i tre registri piú a destra di C , posti a 1.

Lo stato st_0 si ottiene eseguendo $Next$ 4288 volte (buttando via i bit di output).

É stata notevole la resistenza alla crittoanalisi mostrata nonostante la sua semplicitá ed efficienza. Tuttavia, gli attacchi sviluppati nel tempo ne hanno ridotto i margini di sicurezza.

I *FSR* hanno ottime performance in hardware ma sono lenti nelle *implementazioni software*. *RC4*, progettato da R. Rivest nel 1987, è semplice e veloce.

ALGORITHM 6.1

Init algorithm for RC4

Input: 16-byte key k **Output:** Initial state (S, i, j)

(Note: All addition is done modulo 256)

for $i = 0$ to 255: $S[i] := i$ $k[i] := k[i \bmod 16]$ $j := 0$ **for** $i = 0$ to 255: $j := j + S[i] + k[i]$ Swap $S[i]$ and $S[j]$ $i := 0, j := 0$ **return** (S, i, j)

Nota che $S[]$ contiene sempre una permutazione di $0, \dots, 255$. Invece il vettore $k[]$ contiene i 16 byte della chiave ripetuti (può gestire chiavi fino a 255 byte).

GetBits funziona come segue:

ALGORITHM 6.2**GetBits algorithm for RC4****Input:** Current state (S, i, j) **Output:** Output byte y ; updated state (S, i, j)

(Note: All addition is done modulo 256)

 $i := i + 1$ $j := j + S[i]$ Swap $S[i]$ and $S[j]$ $t := S[i] + S[j]$ $y := S[t]$ **return** $(S, i, j), y$

Osservazioni su $Init(\cdot)$ e $GetBits(\cdot)$ in RC4.

- $Init(\cdot)$: ciascun byte di S viene "swappato" almeno una volta in una locazione pseudocasuale
- $GetBits(\cdot)$: lo stato di S viene usato per generare la sequenza di output
 - i viene incrementato di 1 ad ogni invocazione
 - di nuovo, ciascun byte di S viene "swappato" almeno una volta ogni 256 iterazioni, assicurando un buon mix della permutazione S .

Nota: RC4 non fu progettato per usare un IV . Tuttavia, diverse implementazioni lo fanno, introducendo IV nell'array che contiene la chiave (prima o dopo la chiave)

Sfortunatamente questa modalità introduce debolezze in RC4. Intuitivamente la ragione é che IV viene inviato in chiaro quando il cifrario é usato in modo asincrono.

⇒ parte dell'array $k[]$ é nota.

Un attacco statistico semplice contro RC4

Mostra che RC4 é "leggermente sbilanciato verso zero."

Siano S_t , lo stato di S dopo t iterazioni di *GetBits*, ed S_0 lo stato iniziale.

Trattando S_0 come una permutazione *uniforme* di $\{0, \dots, 255\}$ risulta:

$$\Pr[S_0[2] = 0 \wedge X = S_0[1] \neq 2] = \frac{1}{256} \cdot \left(1 - \frac{1}{255}\right) \approx \frac{1}{256}.$$

Supponiamo sia cosí.

Nella prima iterazione di *GetBits*, $i := 1$ ed il valore $j := S_0[i] = S_0[1] = X$.

Quindi, $S_0[1]$ ed $S_0[X]$ vengono scambiati $\Rightarrow S_1[X] = S_0[1] = X$

Nella seconda iterazione di *GetBits*, $i := 2$, mentre j diventa

$$j + S_1[i] = X + S_1[2] = X + S_0[2] = X$$

Un attacco statistico semplice contro RC4

Poi $S_1[2]$ ed $S_1[X]$ vengono scambiati, e quindi

$$S_2[X] = S_1[2] = S_0[2] = 0 \quad \text{e} \quad S_2[2] = S_1[X] = X.$$

Infine, il valore di S_2 in posizione

$S_2[i] + S_2[j] = S_2[2] + S_2[X] = 0 + X = X$ viene dato in output.

Ma questo valore é esattamente $S_2[X] = 0$.

D'altra parte, quando $S_0[2] \neq 0$, il secondo byte di output é uniformemente distribuito. Pertanto, risulta $Pr[\text{il secondo byte di output sia } 0]$

$$= 1 \cdot Pr[S_0[2] = 0 \wedge X = S_0[1] \neq 2] + \frac{1}{256} \cdot Pr[S_0[2] \neq 0]$$

$$\approx 1 \cdot \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \cdot (1 - Pr[S_0[2] = 0])$$

$$\approx \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \cdot \left(1 - \frac{1}{256}\right) \approx \frac{2}{256}$$

(2 volte quanto ci si aspetterebbe se fosse una perm. uniforme)

Un attacco utilizzando il vettore IV

IV viene usato nello standard di cifratura WEP

Il cuore dell'attacco sta nella possibilità di estendere la conoscenza dei primi n byte di k alla conoscenza dei primi $n + 1$ byte

Nota: se IV viene anteposto alla chiave k' , allora $k = IV || k'$

\Rightarrow i primi byte di k sono noti.

Supponiamo IV sia lungo 3 byte.

Adv aspetta fino a quando IV é di una determinata forma. Una buona per l'attacco é

$IV = (3, 255, X)$, con X byte generico.

$\Rightarrow k[0] = 3, k[1] = 255$ e $k[2] = X$.

Un attacco utilizzando il vettore IV

É possibile verificare che, dopo le prime 4 iterazioni del secondo ciclo di $Init(\cdot)$, risultano:

$$S[0] = 3, \quad S[1] = 0, \quad \text{e } S[3] = X + 6 + k[3].$$

Nelle successive 252 iterazioni, $S[0]$, $S[1]$ ed $S[3]$ non vengono modificati fino a quando $j \notin \{0, 1, 3\}$.

Se j assume valori in accordo alla distribuzione uniforme, allora la

$$Pr[j \notin \{0, 1, 3\}] = \left(\frac{253}{256}\right)^{252} \approx 0,05$$

⇒ il 5% delle volte, $S[0]$, $S[1]$ ed $S[3]$ **non** vengono piú modificati.

Pertanto, il primo byte che *GetBits* dá in output sará $S[3] = X + 6 + k[3]$

⇒ $k[3]$ viene rivelato.

Un attacco utilizzando il vettore IV

Quindi Adv sa che il 5% delle volte il primo byte di output é correlato a $k[3]$.

Indovinare a caso $k[3]$ ha prob. di successo $\frac{1}{256} \approx 0,4\%$ delle volte, molto meno del 5%

⇒ Collezionando un numero sufficientemente grande di campioni del primo byte di output per diversi IV di inizializzazione della forma giusta, Adv ottiene una stima molto accurata di $k[3]$

Questo attacco puó quindi essere usato per recuperare la chiave.

Molto piú importante del precedente, che indica una lieve debolezza strutturale dell'algoritmo $RC4$.

- Introdotto nel 2008, per implementazioni software efficienti, in sostituzione di RC4
- Usato con il Mac Poly1305 per produrre cifratura autenticata
- Richiede solo tre operazioni di base, che lavorano su parole di 32 bit: \boxplus , Rot() e Xor (esempio di progettazione ARX-based, addition-rotate-xor)
- Usa una permutazione fissa P (costruita accuratamente) su stringhe di 512 bit
- Tramite P definisce la funzione $F(k, x)$, con chiave di 256 bit, input di 128 bit e output di 512 bit

$$F_k(x) = P(const || k || x) \boxplus const || k || x$$

dove \boxplus indica la somma mod 2^{32} , parola per parola.

- Lo stream cipher ChaCha20 viene costruito usando $F_k(x)$.
- Precisamente, dati $s \in \{0, 1\}^{256}$ ed $IV \in \{0, 1\}^{64}$, l'output dello stream cipher é

$$F_s(IV \parallel \langle 0 \rangle), F_s(IV \parallel \langle 1 \rangle), \dots,$$

dove $\langle i \rangle$ é la codifica binaria dell'intero i con 64 bit.

- Può essere provato sicuro nel **Modello della permutazione causale**
 - accesso oracolare a P e P^{-1} , unico modo per valutare
 - se P é casuale, allora $F(\cdot, \cdot)$ é una PRF

Un cifrario a blocchi é una permutazione con chiave efficientemente calcolabile, cioé $F : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$ tale che, $\forall k$:

$$F_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(k, x) \quad \text{é una permutazione}$$

ed F_k ed F_k^{-1} sono efficientemente calcolabili.

n é la lunghezza della chiave ed ℓ la lunghezza di blocco (funzioni del par. di sicurezza).

In pratica n ed ℓ sono **costanti fissate**.

Un cifrario a blocchi viene generalmente considerato buono se l'attacco migliore che si conosce ha complessità di tempo **equivalente** ad una ricerca esaustiva di k .

Differenza:

- analisi teorica, attacco con complessità $2^{n/2} \Rightarrow$ cifrario buono
- scenario concreto: $n = 256$, attacco con complessità $2^{128} \Rightarrow$ cifrario non buono

I cifrari a blocchi vengono progettati per esibire un comportamento pari a permutazioni pseudocasuali (forti).

Modellare poi un cifrario a blocchi con una *PRP* permette di fornire prove di sicurezza per costruzioni basate sui cifrari a blocchi.

Per esempio, nella *Call* per *AES* (Advanced encryption standard, ci torneremo a breve) la richiesta di pseudocasualità era esplicita.

I cifrari a blocchi **non** sono schemi di cifratura. Tuttavia, la terminologia standard per attacchi contro un cifrario a blocchi F é la stessa.

Parliamo di (k non é nota in tutti i casi):

- *Known-plaintext attack*: $\{(x_i, F_k(x_i))\}$, x_i fuori dal controllo di *Adv*
- *Chosen-plaintext attack*: $\{(x_i, F_k(x_i))\}$, x_i scelti da *Adv*
- *Chosen-ciphertext attack*: $\{(x_i, F_k(x_i))\}$, $\{(y_i, F_k^{-1}(y_i))\}$, x_i, y_i scelti da *Adv*

Obiettivi di *Adv*:

- *distinguere* F_k da una permutazione uniforme
- *recuperare* la chiave k

Nota che:

- Una permutazione pseudocasuale non può essere distinta da una permutazione uniforme rispetto ad un attacco di tipo chosen-plaintext
- Una permutazione pseudocasuale **forte** non può essere distinta da una permutazione uniforme rispetto ad un attacco di tipo chosen-ciphertext

Sfida nel costruire un cifrario a blocchi:

⇒ costruire un insieme di permutazioni con una rappresentazione concisa (i.e., chiave corta) che si comporti come una permutazione casuale

Cosa significa in pratica?

Intuizione: in una permutazione casuale, cambiare un singolo bit nell'input



ottenere un output **quasi del tutto** (non possono essere uguali) indipendente dall'output associato all'input precedente

Similmente, cambiando un bit nell'input di $F_k(\cdot)$ (k uniforme), dovrebbe



ottenere un output **quasi del tutto** indipendente dall'output precedente (ogni bit dell'output cambia con prob. $1/2$)

Paradigma della confusione e della diffusione

Idea: costruire una permutazione F che sembra casuale con una lunghezza di blocco grande da *molteplici* permutazioni $\{F_i\}_i$ piú piccole *casuali* o che sembrano casuali.

Definiamo F come segue: vogliamo lunghezza di blocco pari a 128 bits.

La chiave k specifica 16 permutazioni f_1, \dots, f_{16} con lung. blocco di 8 bit.

Dato $x \in \{0, 1\}^{128}$, lo vediamo come $x = x_1 x_2 \dots x_{16}$ e poniamo

$$F_k(x) = f_1(x_1) || f_2(x_2) || \dots || f_{16}(x_{16}).$$

In termini di memoria la strategia richiede per

$$f_i : \{0, 1\}^8 \rightarrow \{0, 1\}^8 \text{ circa } 8 \cdot 2^8 \approx 2000 \text{ bit}$$

$\Rightarrow F_k$ richiede circa $16 \cdot 2000$ (pochi kbyte), molto meno dei circa $128 \cdot 2^{128}$ richiesti da una permutazione casuale

Paradigma della confusione e della diffusione

Le funzioni f_i - dette funzioni di "round" - introducono **confusione** in F .
Tuttavia:

F_k **non** é pseudocasuale

Se x ed x' differiscono nel primo byte $\Rightarrow F_k(x)$ ed $F_k(x')$ sono differenti nel primo byte



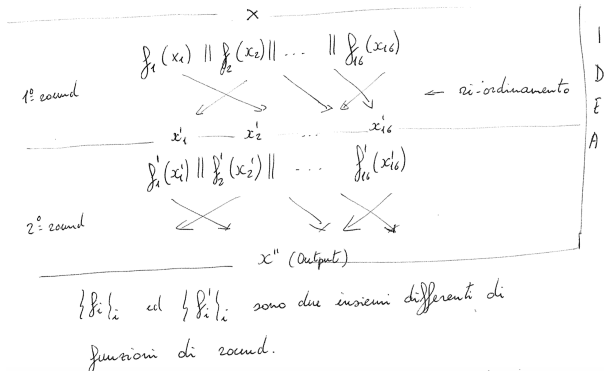
La confusione é *locale* al byte.

Abbiamo bisogno di un passo che introduca **diffusione**.

I bit dell'output vengono pertanto permutati (mixing permutation).
L'effetto é diffondere i cambiamenti locali.

I passi che realizzano confusione e diffusione formano un **round**. Vanno ripetuti piú volte.

Paradigma della confusione e della diffusione



Solitamente le round function sono progettate specificamente e con cura, e sono fissate.

Sono un'implementazione diretta del paradigma della confusione e della diffusione.

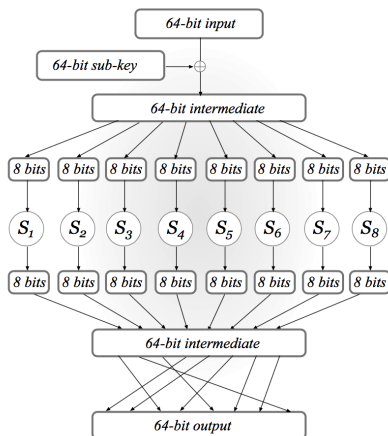
Idea di fondo:

- invece di usare una porzione della chiave k per scegliere una f_i , fissiamo una **funzione di sostituzione** pubblica S
- diremo che S é una S -box e useremo la chiave k o una porzione di essa per specificare la funzione f come

$$f(x) = S(k \oplus x).$$

Consideriamo una rete a sostituzione e permutazione (SPN in breve) con un blocco lungo 64 bit, basata su una collezione di S -box S_1, S_2, \dots, S_8 di 8 bit.

Reti a sostituzione e permutazione



La computazione procede attraverso una serie di round, dove in ciascun round ci sono i passi

- **Key mixing:** Poni $x := x \oplus k$, con k sottochiave del round corrente
- **Substitution:** Poni $x := S_1(x_1) || \dots || S_8(x_8)$, con x_i i -esimo byte di x
- **Mixing Permutation:** Permuta i bit, producendo l'output del round

Le S -box e la mixing permutation sono **pubbliche** (Kerckoff's principle)

Sottochiavi **differenti** vengono usate in ciascun round

La chiave del cifrario a blocchi é una sorta di **master key**

Le sottochiavi sono derivate dalla master key in accordo ad un algoritmo di schedulazione delle chiavi (**key schedule**) spesso semplice.

Una SPN ad r round ha r round pieni con key mixing, S-box substitution e mixing permutation piú un **passo finale** di key mixing.

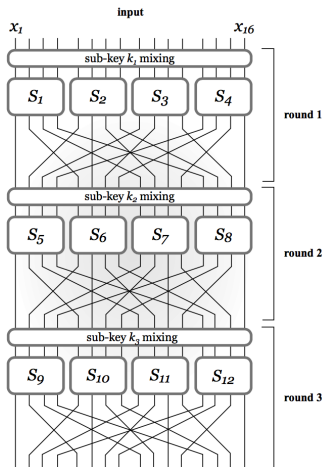
Una SPN é invertibile (data la chiave).

Proposizione 6.3. Sia F una funzione con chiave definita da una SPN in cui le S-box sono tutte permutazioni. Allora, indipendentemente dal numero di round e dall'algorithmo di schedulazione delle chiavi, F_k é una **permutazione** per qualsiasi valore di k .

Dim. Basta mostrare che il singolo round é invertibile \Rightarrow tutta F_k é invertibile.

- **Mixing permutation** \Rightarrow invertibile
- **S-Box**, permutazioni \Rightarrow invertibili
- **Key mixing (xor)** \Rightarrow invertibile, utilizzando la sottochiave opportuna

Struttura di una SPN



Il numero di round, le S-box, le mixing permutation e la schedulazione delle chiavi determinano la robustezza o la debolezza di uno schema.

Un piccolo cambiamento nell'input deve avere "effetto" su tutti i bit dell'output. Un modo per assicurare ciò in una SPN é garantendo due proprietà:

- 1 le S -box sono tali che modificando **un singolo** bit di input si modificano almeno **due** bit di output della S -box
- 2 le mixing permutation sono progettate in modo tale che i **bit di output** di una data S -box sono usati **come input** in molteplici S -box nel round successivo

Perché funziona? Consideriamo due input che differiscono in **un solo** bit

- 1 Durante il primo round, i bit intermedi differiscono di un bit. Relativamente alla *S*-box in cui differiscono, l'output della *S*-Box differirà in due bit. La mixing permutation cambia le posizioni, ma i due output differiscono in **due bit** ancora
- 2 Nel secondo round ci sono due *S*-Box che ricevono input che differiscono in un bit. Pertanto, ragionando come prima, alla fine del round i valori intermedi differiscono in **quattro bit**.
- 3 Iterando il ragionamento ci aspettiamo che 8 bit vengano influenzati al termine del terzo round, 16 al termine del quarto ... e così via. Alla fine del 7-mo round tutti i 128 bit sono stati influenzati dalla computazione della SPN.

Nota: é sempre possibile che alla fine di un round ci siano meno bit differenti di quanti ce ne si aspetta \Rightarrow Solitamente si usano piú di 7 round.

Sette round sono un **lower bound** per l'effetto valanga: meno round non possono produrlo.

S -Box scelte a caso **non** sono una buona scelta. Per esempio, sia S una S -Box con input di 4 bit, scelta a caso. Dati x ed x' , siano $y = S(x)$ ed $y' = S(x')$

S casuale $\Rightarrow y'$ scelta uniformemente a caso.

Ci sono 4 stringhe che differiscono da y soltanto in un bit \Rightarrow con prob. $4/15$ y' **non** differisce da y in almeno due bit.

Ovviamente il problema si amplifica quando consideriamo tutte le coppie di input che differiscono in un solo bit.

Pertanto, le S -Box **devono** essere progettate con cura.

Effetto valanga in PRP forti

Se un cifrario a blocchi deve realizzare una permutazione pseudocasuale **forte**, allora l'effetto valanga deve essere prodotto anche dalla permutazione inversa



Cambiare un singolo bit dell'output deve aver effetti su **tutti** i bit di input.

É sufficiente che le *S*-box siano progettate in modo tale che, cambiando un singolo bit dell'output, si ottengano cambi in almeno due bit dell'input.

Ottenere l'effetto valanga in **entrambe** le direzioni é un'altra ragione per incrementare il numero di round.

Attacchi contro SPN con un numero di round ridotto

Il numero di round é cruciale.

Un caso semplice. Un solo round senza passo finale di key-mixing.

Un Adv, data una **sola** coppia (x, y) recupera la chiave. A partire da y , valore di output:

- Inverte la mixing permutation \rightarrow pubblica
- Inverte le S -Box \rightarrow pubbliche
- Calcola l'xor tra l'input alle S -box ed x

In questo modo ottiene la sottochiave \equiv chiave del singolo round.

Attacchi contro SPN con un numero di round ridotto

Consideriamo ora una SPN con un round ed il passo di key mixing finale.

Assumiamo che:

- la lunghezza del blocco sia 64 bit
- le S-box abbiano 8 bit di lunghezza di input/output
- le sottochiavi K_1 e K_2 usate nei due passi di key mixing sono **indipendenti**
- la master key é pertanto $K = K_1 || K_2$ (128 bit)

Idea: estendere l'attacco semplice precedente per ottenere un attacco per il **recupero** della chiave che usa molto meno di 2^{128} passi

Adv dispone di una coppia (x, y)

- enumera tutte le possibili chiavi K_2 (2^{64} in totale)
- per ognuna di esse, può invertire il passo finale di key mixing
- usando l'attacco precedente ottiene, per ogni K_2 , un singolo valore di K_1
- in 2^{64} passi produce una lista di 2^{64} chiavi $K = K_1 || K_2$
- usando coppie (x_i, y_i) aggiuntive riduce la lista fino ad individuare la chiave giusta

Osservazione: un attacco migliore può essere ottenuto notando che bit individuali dell'output dipendono **soltanto da una parte** della master key.

Adv dispone di una coppia (x, y)

- enumera tutti i possibili valori di **un byte** di K_2 (2^8 in totale)
 - ⇒ le posizioni dei bit scelti dipendono dalla mixing permutation usata nel round (pubblica)
- per ognuno di essi, può invertire il passo finale di key mixing, ottenendo l'output di una S-Box
- usando l'attacco precedente ottiene, per il byte di K_2 , i valori di un byte di K_1

Per ogni ipotesi sul byte di K_2 ottiene un'unica scelta possibile per il byte di K_1 . Ripete il processo per ognuna delle S-box.

Attacchi contro SPN con un numero di round ridotto

Ripetendo l'attacco per tutti gli 8 byte di K_2 , Adv ottiene 8 liste, ciascuna contenente 2^8 coppie che complessivamente rappresentano tutte le possibili master key

$$2^8 \cdot \dots \cdot 2^8 \quad (8 \text{ volte}) = 2^{64} \quad \text{possibili master key.}$$

Il tempo totale richiesto per far ciò é $8 \cdot 2^8 = 2^3 \cdot 2^8 = 2^{11}$

⇒ precedentemente era 2^{64}

Nota che la chiave giusta deve essere consistente con ogni nuova coppia (x', y')

Attacchi contro SPN con un numero di round ridotto

Euristicamente, un elemento in ogni lista di 2^8 coppie é consistente con (x', y') con probabilit  essentially uniforme.

Poich , dato x' , ogni 16 bit della lista permettono di calcolare **un** byte di output

⇒ la prob. che il byte calcolato sia consistente con il byte di y'   $\frac{1}{2^8}$

⇒ coincide con la prob. con cui i 16 bit della chiave sono consistenti con (x', y')

Un piccolo numero di coppie (x_i, y_i) aggiuntive permette di far s  che le 8 liste contengano tutte un solo valore di 16 bit.

Attacchi contro SPN con un numero di round ridotto

L'attacco é possibile perché parti differenti della chiave possono essere **isolate** da altre

⇒ ulteriore diffusione é necessaria per essere sicuri che **tutti i bit** della chiave influenzino **tutti i bit** dell'output

⇒ piú round sono necessari

Le idee precedenti possono essere estese per ottenere un attacco migliore della ricerca esaustiva contro una SPN a due round che usa sottochiavi indipendenti nei due round

D'altra parte é facile vedere che una SPN a 2 round **non** é pseudocasuale.
Infatti:

se Adv ottiene il risultato della valutazione della SPN su due input, x ed x' ,
che differiscono in **un solo** bit, allora gli output corrispondenti differiranno
in pochi bit

⇒ in una funzione casuale é molto diverso

Un altro approccio alla costruzione di cifrari a blocchi

Vantaggio: le funzioni sottostanti, usate nelle reti di Feistel, contrariamente alle S-Box usate nelle SPN, **non** devono essere invertibili

⇒ rappresentano un modo per costruire una funzione invertibile tramite componenti non invertibili

Rispetto alle SPN c'è meno **struttura** nella rete.

Una rete di Feistel (FN in breve) opera attraverso una serie di round

In ogni round, viene applicata una funzione con chiave (del round)



tipicamente costruita tramite S-Box e mixing permutation

Nelle FN bilanciate (le uniche che considereremo) la i -esima funzione di round \hat{f}_i

- prende in input una sottochiave K_i ed una stringa R di $\ell/2$ bit
- dá in output una stringa di $\ell/2$ bit.

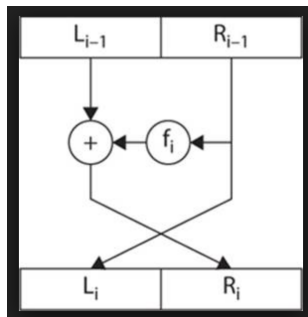
Una volta scelta una master key K , che determina le sottochiavi K_i , definiamo

$$f_i : \{0, 1\}^{\ell/2} \rightarrow \{0, 1\}^{\ell/2} \quad \text{come} \quad f_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_i(K_i, R)$$

Nota:

- le \hat{f}_i sono **fissate** e **pubblicamente** note
- le f_i dipendono dalla master key (**non** nota ad Adv)

La lunghezza di blocco é ℓ bit. L'input é rappresentato da due sottostringhe di $\ell/2$ bit.



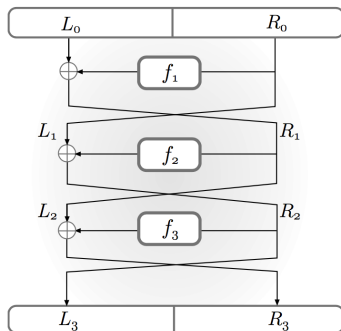
Il round i -esimo opera come segue:

Input: L_{i-1} ed R_{i-1} .

Output: $L_i = R_{i-1}$ ed $R_i = L_{i-1} \oplus f_i(R_{i-1})$

In una rete di Feistel ad r round: $(L_0, R_0) \rightarrow (L_r, R_r)$

Esempio di rete a 3 round.



Le reti di Feistel sono invertibili.

Proposizione 6.4. Sia F una funzione con chiave definita da una FN. Indipendentemente dalle funzioni di round $\{\hat{f}_i\}_i$ e dal numero di round, F_K é una permutazione efficiente invertibile per qualsiasi valore di K .

Prova. Per rendersene conto, basta considerare un singolo round e notare che:

$$(L_i, R_i) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_{i-1} = L_i \\ L_{i-1} = R_i \oplus f_i(R_{i-1}) \end{cases}$$

In particolare, si noti che le f_i vengono valutate in **una sola** direzione.