Cifratura CPA sicura da funzioni pseudocasuali

Paolo D'Arco
pdarco@unisa.it

Università di Salerno

Elementi di Crittografia

Contenuti

Cifratura CPA sicura da funzioni pseudocasuali

Costruiremo uno schema di cifratura per messaggi di lunghezza fissa

Ne possiamo ottenere facilmente uno per lunghezze arbitrarie applicando i risultati precedenti

Primo tentativo:

$$Enc_k(m) = F_k(m)$$

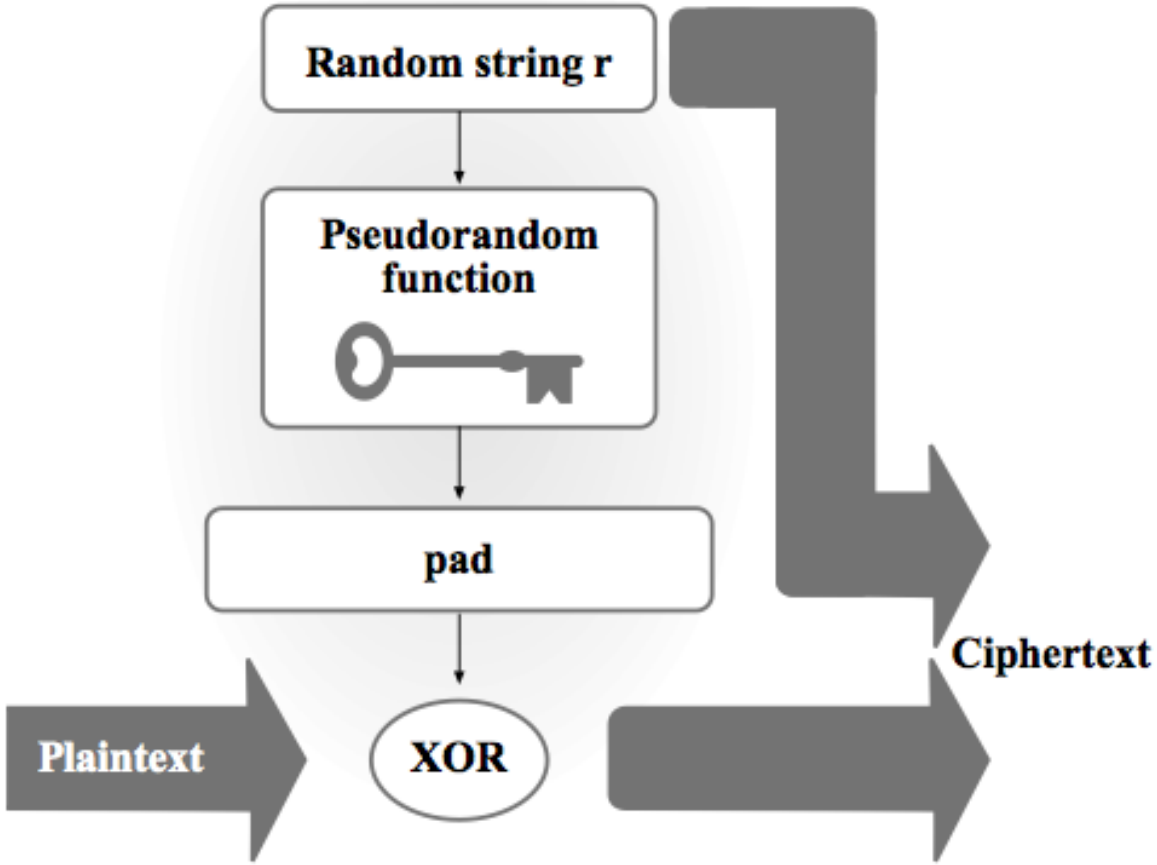
Deterministico ... non funziona ... (stesso messaggio $\Rightarrow$ stesso cifrato)

Approccio giusto:

Applichiamo F_k ad una stringa casuale r per produrre un "pad" pseudocasuale.

Cifriamo calcolando l'xor tra il pad ed il messaggio m.

Idea


Random string r
Pseudorandom function
pad
Plaintext
XOR
Ciphertext

Specifica dello schema

CONSTRUCTION 3.30

Let F be a pseudorandom function. Define a private-key encryption scheme for messages of length n as follows:

- Gen: on input 1^n, choose uniform $k \in \{0,1\}^n$ and output it.
- Enc: on input a key $k \in \{0,1\}^n$ and a message $m \in \{0,1\}^n$, choose uniform $r \in \{0,1\}^n$ and output the ciphertext

$$c := \langle r, F_k(r) \oplus m \rangle.$$

- Dec: on input a key $k \in \{0,1\}^n$ and a ciphertext $c = \langle r, s \rangle$, output the plaintext message

$$m := F_k(r) \oplus s.$$

Proprietà

Teorema 3.31. Se F è pseudocasuale, allora la Costruzione 3.30 realizza uno schema di cifratura CPA-sicuro per messaggi di lunghezza n.

Dim. Nota preliminare: le prove di sicurezza per schemi basati su PRF procedono solitamente in due fasi

- Prima fase: consideriamo una versione "ipotetica" della costruzione in cui la funzione pseudocasuale viene sostituita da una funzione casuale. Mostriamo che questa modifica *non* influisce sulla probabilità di successo di Adv
- Seconda fase: analizziamo lo schema ipotetico che utilizza la funzione casuale

Dimostrazione

Sia $\widetilde{\Pi}= (\widetilde{Gen}, \widetilde{Enc}, \widetilde{Dec})$ costruito a partire da $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$, tale che

- $\widetilde{\Pi}$ usa $f \in Func_n$ scelta uniformemente a caso
- Π usa F_k, dove k è scelta uniformemente a caso

Ovviamente, $\widetilde{\Pi}$ *non* è efficiente: f richiede spazio esponenziale in n per la memorizzazione.

Per ogni Adv A PPT sia $q(n)$ un limite superiore al numero di query che $A(1^n)$ rivolge al suo oracolo per la cifratura ($q(n)$ deve essere un polinomio)

Mostriamo che esiste una funzione trascurabile *negl* tale che

$$|Pr[PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n) = 1] - Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1]| \leq negl(n).$$

Dimostrazione

Procediamo per riduzione: usiamo A per costruire un distinguisher D per la funzione pseudocasuale F

$$\text{Se } A \text{ ha successo} \Rightarrow D \text{ distingue}$$

Precisamente:

- D ha accesso all'oracolo $O(\cdot)$ ed il suo scopo è stabilire se la funzione è "F_k, per k uniforme in $\{0,1\}^n$" oppure "$f \in Func_n$, uniforme".
- D *emula* l'esperimento $PrivK^{cpa}_{A,?}(n)$ per A ed osserva se A ha successo.

Distinguisher

Distinguisher D:
D is given input 1^n and access to an oracle $\mathcal{O} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$.

1. Run $\mathcal{A}(1^n)$. Whenever $\mathcal{A}$ queries its encryption oracle on a message $m \in \{0,1\}^n$, answer this query in the following way:
   (a) Choose uniform $r \in \{0,1\}^n$.
   (b) Query $\mathcal{O}(r)$ and obtain response y.
   (c) Return the ciphertext $\langle r, y \oplus m \rangle$ to $\mathcal{A}$.
2. When $\mathcal{A}$ outputs messages $m_0, m_1 \in \{0,1\}^n$, choose a uniform bit $b \in \{0,1\}$ and then:
   (a) Choose uniform $r \in \{0,1\}^n$.
   (b) Query $\mathcal{O}(r)$ and obtain response y.
   (c) Return the challenge ciphertext $\langle r, y \oplus m_b \rangle$ to $\mathcal{A}$.
3. Continue answering encryption-oracle queries of $\mathcal{A}$ as before until $\mathcal{A}$ outputs a bit b'. Output 1 if $b' = b$, and 0 otherwise.

Analisi

D computa in tempo polinomiale poichè A computa in tempo polinomiale. Inoltre, si noti che:

1. Se l'oracolo di D contiene al suo interno una funzione **pseudocasuale**

$$\text{Vista di } A \text{ come subroutine di } D = \text{ Vista di } A \text{ in } PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n)$$

2. Se l'oracolo di D contiene al suo interno una funzione **casuale**

$$\text{Vista di } A \text{ come subroutine di } D = \text{ Vista di } A \text{ in } PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n)$$

Pertanto, possiamo dire che:

Analisi

1. $\Rightarrow Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n}[D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1] = Pr[PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n) = 1]$
2. $\Rightarrow Pr_{f \leftarrow Func_n}[D^{f(\cdot)}(1^n) = 1] = Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1]$

Ma l'assunzione che F è pseudocasuale implica che $\exists\ negl(n)$ tale che:

$$|Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n}[D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1] - Pr_{f \leftarrow Func_n}[D^{f(\cdot)}(1^n) = 1]| \leq negl(n)$$

$$\Updownarrow$$

$$|Pr[PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n) = 1] - Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1]| \leq negl(n)$$

Pertanto possiamo analizzare lo schema ipotetico.

Successo di A nello schema ipotetico

Mostriamo che

$$Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1] \leq 1/2 + q(n)/2^n.$$

Nota che, ogni volta che un messaggio m viene cifrato, in $PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n)$ viene scelto un $r \in \{0,1\}^n$ uniforme, ed il cifrato risulta

$$< r, f(r) \oplus m >$$

Sia r^* la stringa usata per produrre il cifrato di sfida, cioè

$$c^* :=< r^*, f(r^*) \oplus m_b >$$

Possono verificarsi due casi:

Successo di A nello schema ipotetico

- Il valore di r^* *non* è mai usato prima da $O(\cdot)$ per rispondere alle query di A

  $\Rightarrow$ A non sa nulla circa $f(r^*)$, che risulta uniforme ed indipendentemente distribuito dal resto dell'esperimento

  $\Rightarrow Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1] = Pr[b' = b] = 1/2$

- Il valore di r^* è stato usato in precedenza

  $\Rightarrow$ A può capire facilmente se è stato cifrato m_0 o m_1. Infatti, disponendo di $f(r^*)$, poichè $c^* :=< r^*, f(r^*) \oplus m_b >$, risulta

  $$f(r^*) \oplus (f(r^*) \oplus m_b) = m_b.$$

Il valore $f(r^*)$ può essere recuperato dalla query in cui r^* è usato: se A ha ricevuto dall'oracolo, per qualche m, il cifrato $c :=< r^*, s >=< r^*, f(r^*) \oplus m >$, allora

$$s \oplus m = f(r^*).$$

Successo di A nello schema ipotetico

Tuttavia, poichè A effettua al più $q(n)$ query all'oracolo, al più $q(n)$ valori distinti di r vengono usati, scelti indip. e uniformemente in $\{0,1\}^n$.

Pertanto, la prob. che r^*, scelto uniformemente, sia uguale ad un r precedente è al più $q(n)/2^n$.

Indichiamo con **Repeat** l'evento che r^* sia uguale a qualche r scelto prima.

Risulta $Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1]$ uguale a

$$
\begin{aligned}
& Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1 \wedge \ \mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1 \wedge \ \overline{\mathbf{Repeat}}] \\
\leq \ & Pr[\ \mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1 | \ \overline{\mathbf{Repeat}}] \cdot Pr[\ \overline{\mathbf{Repeat}}] \\
\leq \ & Pr[\ \mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1 | \ \overline{\mathbf{Repeat}}] \\
\leq \ & q(n)/2^n + 1/2.
\end{aligned}
$$

Successo di A nello schema ipotetico

Poichè abbiamo mostrato che

$$|Pr[PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n) = 1] - Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1]| \leq negl(n)$$

si ha:

$$\begin{aligned} Pr[PrivK^{cpa}_{A,\Pi}(n) = 1] &\leq Pr[PrivK^{cpa}_{A,\widetilde{\Pi}}(n) = 1] + negl(n) \\ &\leq q(n)/2^n + 1/2 + negl(n) \\ &\leq 1/2 + q(n)/2^n + negl(n) \\ &\leq 1/2 + negl'(n). \end{aligned}$$

Pertanto, Π è CPA-sicuro.