Assunzione della Fattorizzazione $\Rightarrow$ Una funzione one-way

$Gen(1^n) \longrightarrow (N, p, q)$. $N = p \cdot q$

$\downarrow$ $\downarrow$ primi di n bit (circa con prob $\geq$)

$\downarrow$

algoritmo ppt

$\hookrightarrow$ usa un numero polinomiale di bit casuali

Idea: possiamo definire una funzione f_{Gen} che usa il suo input x come "random bits" per l'esecuzione di $Gen(1^n)$. Modifichiamo allora $Gen(1^n)$ portando la randomness fuori, i.e., $Gen(1^n, x)$

Algoritmo per calcolare f_{Gen}

Input: stringa x di n bit

Output: intero N di n bit

Calcola $(N, p, q) \leftarrow Gen(1^n, x)$ ← random bit fissati forniti come input a Gen

return N

} f_{Gen} è facile da calcolare poly time

$f_{Gen} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ risulta one-way osservando che

- i moduli N restituiti da $f_{Gen}(x)$ con $x \in \{0,1\}^n$ uniforme
- i moduli N restituiti da $Gen(1^n)$

sono distribuiti identicamente.

Pertanto ...

Se i moduli generati da $Gen(1^n)$ sono difficili da fattorizzare, così risultano quelli generati da $f_{Gen}(x)$.

Discende che, trovare una qualsiasi preimmagine x' di N rispetto a f_{Gen}, cioè tale che

$$f_{Gen}(x') = f_{Gen}(x) = N,$$

deve essere difficile. Altrimenti, eseguendo

$$Gen(1^n, x') \longrightarrow (N, p, q)$$

Gen: poly time

(N, p, q): fattorizzazione di N

si otterrebbe la fattorizzazione di N.

L'assunzione RSA $\Rightarrow$ Una famiglia di permutazioni one-way

$\Pi = (Gen, Samp, f)$

1. $Gen(1^n) \to I : |I| \geq n$

   $f_I : D_I \to D_I$

2. $Samp : x \in_R D_I$

3. L'alg di valutazione di f, su input I ed x, dà

   $y = f_I(x)$

1. Gen : su input 1^n, esegui

   $Gen_{RSA}(1^n) \to (N, e, d)$

   e dai in output

   $I = (N, e)$, $D_I = \mathbb{Z}_N^*$

2. $Samp$: su input $I = (N, e)$ scegli

   unif $x \in \mathbb{Z}_N^*$ $(x \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\})$

   fino a quando $\gcd(x, N) = 1$)

3. f : su input $I = (N, e)$ ed $x \in \mathbb{Z}_N^*$

   dai in output

   $x^e \bmod N$

È immediato constatare che, se il problema RSA è difficile relativamente a GenRSA, allora la famiglia di permutazioni proposta è one-way

Procedendo in modo simile si può costruire una famiglia di permutazioni one-way sulla difficoltà del problema DL in $\mathbb{Z}_p^*$ (p primo)

$Gen(1^n) \rightarrow (p, g, p-1)$

$Samp \rightarrow x \in_R \mathbb{Z}_p^*$ $\quad \{1, \dots, p-1\}$

$f : g^x \bmod p$ $\quad \{g^1 \dots g^{p-1}\} = \{1, \dots p-1\}$

Funzioni hash resistenti a collisioni

$\mathcal{G}(1^n) \longrightarrow (G, q, g)$

- $\mathcal{G}$: algoritmo ppt generazione gruppi
- G: gruppo ciclico
- $|q| = n$: primo (ordine di G)
- g: generatore

(Gen, H) funzione hash a lunghezza fissata

Gen: su input 1^n, esegui $\mathcal{G}(1^n) \to (G, q, g)$, seleziona $h \in G$ in modo uniforme e dà in output $s = (G, q, g, h)$

H: data una chiave $s = (G, q, g, h)$ e un input $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$

dà in output $H^s(x_1, x_2) = g^{x_1} h^{x_2} \in G$

Note

G ed H possono essere calcolate in tempo polinomiale

H^s prende in input una stringa di $2(n-1)$ bit

Se gli elementi del gruppo G possono essere rappresentati con meno di $2 \cdot (n-1)$ bit, allora H^s comprime

$$H^s : \{0,1\}^{2\cdot(n-1)} \longrightarrow \{0,1\}^{l} \qquad l < 2(n-1$$

Th: Se il problema DL è difficile relativamente a G, allora H è una funzione hash resistente a collisioni di lunghezza fissata.

Dim. Sia A ppt e sia

$$Pr\left[Hash\text{-}coll_{A,\Pi}(n) = 1\right] = \varepsilon(n)$$

Possiamo usare A per costruire A' che risolve il problema DL con prob di successo $\varepsilon(n)$.

Algoritmo A'

Riceve in input $G, q, g, \underline{h}$ ← (target per il DLP)

1. Sia $s = \langle G, q, g, h \rangle$ ← (seme per H)

   Esegui $A(s)$ ed ottieni x ed x' (collisione)

2. Se $x \neq x'$ e $H^s(x) = H^s(x')$

(a) se $h = 1$, return $\emptyset$

(b) altrimenti ($h \neq 1$), interpreta

x come (x_1, x_2), $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_q$

x' come (x_1', x_2') $x_1', x_2' \in \mathbb{Z}_q$

e return

$$\left[(x_1 - x_1')(x_2' - x_2)^{-1} \bmod q \right]$$ ← $\log_g h$

Osservazioni: A' esegue in tempo polinomiale

Il valore s dato ad A è distribuito esattamente come nell'esperimento $\text{Hash-coll}_{A,\Pi}(n)$, per lo stesso valore del parametro di sicurezza n

$\Rightarrow$ con prob. $\varepsilon(n)$ viene prodotta una collisione

$$H^s(x_1, x_2) = H^s(x_1', x_2') \iff g^{x_1} h^{x_2} = g^{x_1'} h^{x_2'}$$

$$\iff \left(g^{x_1} \cdot h^{x_2}\right) g^{-x_1'} \cdot h^{-x_2} = \left(g^{x_1'} h^{x_2'}\right) \cdot g^{-x_1'} h^{-x_2}$$

$$\iff g^{x_1 - x_1'} = h^{x_2' - x_2}$$

Nota che $x_2' - x_2 \neq 0 \bmod q$, altrimenti sarebbe

$$g^{x_1 - x_1'} = h^0 = 1 = g^0 \implies x_1 = x_1' \text{ e } x_2 = x_2'$$

Poiché q è primo, esiste $(x_2' - x_2)^{-1} \bmod q$

$$\implies g^{(x_1 - x_1')(x_2' - x_2)^{-1}} = h^{(x_2' - x_2)(x_2' - x_2)^{-1}} = h^1 = h$$

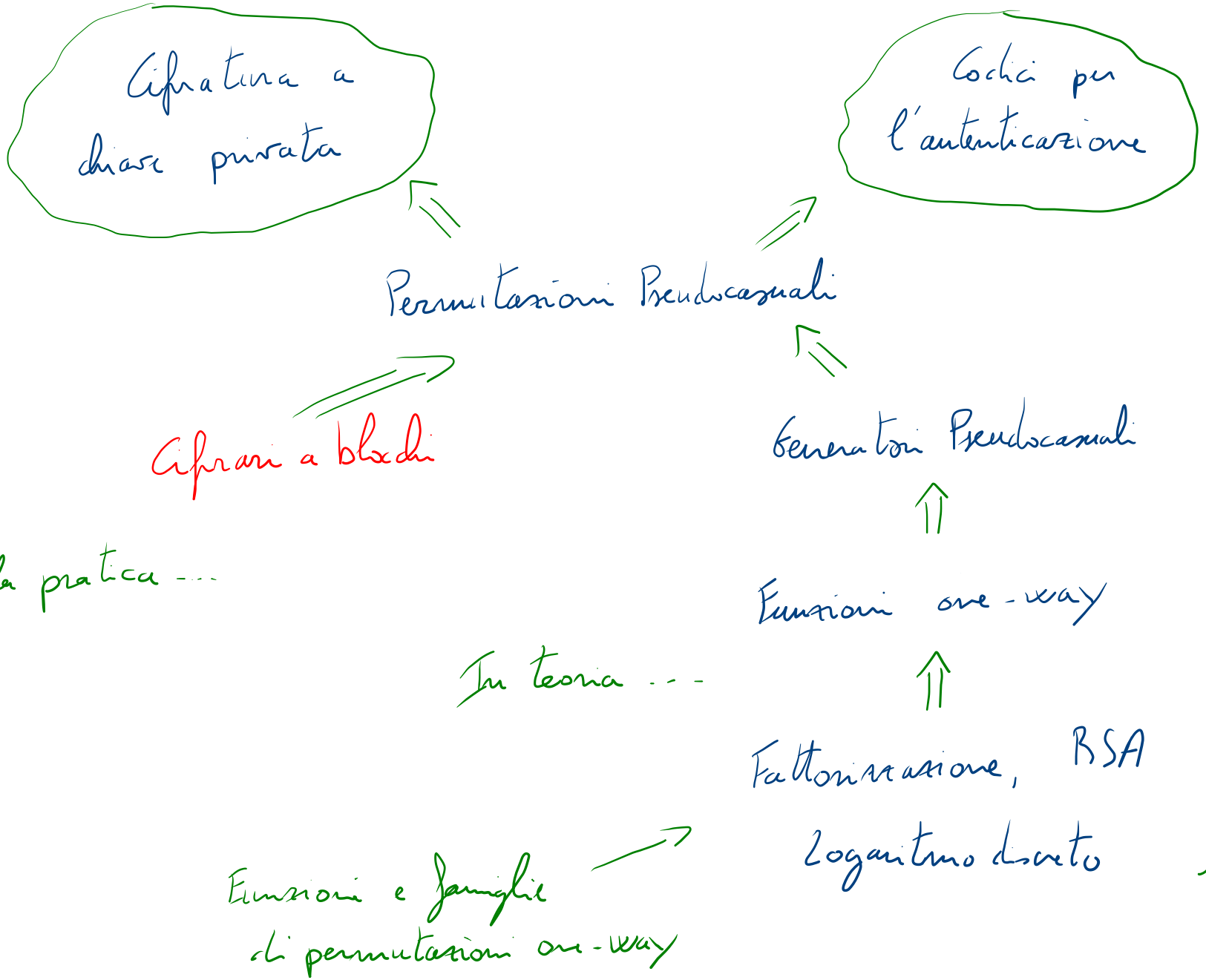
$$\implies \log_g h = (x_1 - x_1')(x_2' - x_2)^{-1}$$

Pertanto, A' risolve il problema DL con probabilità esattamente $\varepsilon(n)$.

Poiché, per assunzione, il problema è difficile relativamente a $\mathcal{G}(1^n)$, allora $\varepsilon(n)$ è trascurabile

$\Downarrow$

H è collision resistant!


Cifratura a chiave privata
Codici per l'autenticazione
Permutazioni Pseudocasuali
Cifrari a blocchi
Generatori Pseudocasuali
Nella pratica ...
Funzioni one-way
In teoria ...
Fattorizzazione, RSA
Logaritmo discreto
Funzioni e famiglie di permutazioni one-way