

Cifratura CPA sicura da funzioni pseudocasuali

Paolo D'Arco
pdarco@unisa.it

Università di Salerno

Elementi di Crittografia

1 Cifratura CPA sicura

2 Schema

3 Riduzione

Cifratura CPA sicura da funzioni pseudocasuali

Costruiremo uno schema di cifratura per messaggi di lunghezza fissa

Ne possiamo ottenere facilmente uno per lunghezze arbitrarie applicando i risultati precedenti

Primo tentativo:

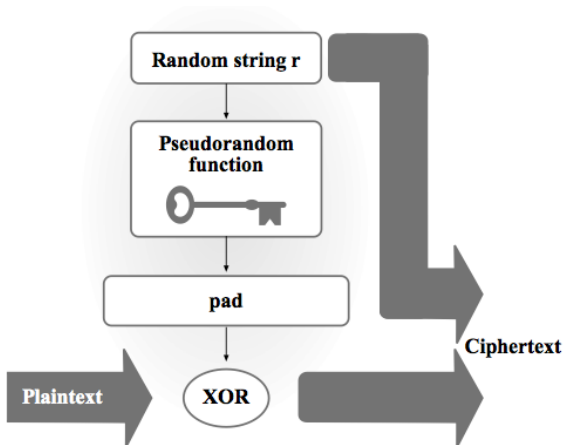
$$Enc_k(m) = F_k(m)$$

Deterministico ... non funziona ... (stesso messaggio $\Rightarrow$ stesso cifrato)

Approccio giusto:

Applichiamo F_k ad una stringa casuale r per produrre un "pad" pseudocasuale.

Cifriamo calcolando l'xor tra il pad ed il messaggio m .



CONSTRUCTION 3.30

Let F be a pseudorandom function. Define a private-key encryption scheme for messages of length n as follows:

- Gen: on input 1^n , choose uniform $k \in \{0, 1\}^n$ and output it.
- Enc: on input a key $k \in \{0, 1\}^n$ and a message $m \in \{0, 1\}^n$, choose uniform $r \in \{0, 1\}^n$ and output the ciphertext

$$c := \langle r, F_k(r) \oplus m \rangle.$$

- Dec: on input a key $k \in \{0, 1\}^n$ and a ciphertext $c = \langle r, s \rangle$, output the plaintext message

$$m := F_k(r) \oplus s.$$

Teorema 3.31. Se F è pseudocasuale, allora la Costruzione 3.30 realizza uno schema di cifratura CPA-sicuro per messaggi di lunghezza n .

Dim. Nota preliminare: le prove di sicurezza per schemi basati su PRF procedono solitamente in due fasi

- Prima fase: consideriamo una versione "ipotetica" della costruzione in cui la funzione pseudocasuale viene sostituita da una funzione casuale. Mostriamo che questa modifica *non* influisce sulla probabilità di successo di Adv
- Seconda fase: analizziamo lo schema ipotetico che utilizza la funzione casuale

Sia $\tilde{\Pi} = (\tilde{Gen}, \tilde{Enc}, \tilde{Dec})$ costruito a partire da $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$, tale che

- $\tilde{\Pi}$ usa $f \in Func_n$ scelta uniformemente a caso
- Π usa F_k , dove k è scelta uniformemente a caso

Ovviamente, $\tilde{\Pi}$ non è efficiente: f richiede spazio esponenziale in n per la memorizzazione.

Per ogni Adv A PPT sia $q(n)$ un limite superiore al numero di query che $A(1^n)$ rivolge al suo oracolo per la cifratura ($q(n)$ deve essere un polinomio)

Mostriamo che esiste una funzione trascurabile $negl$ tale che

$$|Pr[PrivK_{A,\Pi}^{cpa}(n) = 1] - Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1]| \leq negl(n).$$

Procediamo per riduzione: usiamo A per costruire un distinguisher D per la funzione pseudocasuale F

Se A ha successo $\Rightarrow D$ distingue

Precisamente:

- D ha accesso all'oracolo $O(\cdot)$ ed il suo scopo è stabilire se la funzione è " F_k , per k uniforme in $\{0,1\}^n$ " oppure " $f \in \text{Func}_n$, uniforme".
- D emula l'esperimento $\text{PrivK}_{A,?}^{cpa}(n)$ per A ed osserva se A ha successo.

Distinguisher D :

D is given input 1^n and access to an oracle $\mathcal{O} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$.

1. Run $\mathcal{A}(1^n)$. Whenever $\mathcal{A}$ queries its encryption oracle on a message $m \in \{0, 1\}^n$, answer this query in the following way:
 - (a) Choose uniform $r \in \{0, 1\}^n$.
 - (b) Query $\mathcal{O}(r)$ and obtain response y .
 - (c) Return the ciphertext $\langle r, y \oplus m \rangle$ to $\mathcal{A}$.
2. When $\mathcal{A}$ outputs messages $m_0, m_1 \in \{0, 1\}^n$, choose a uniform bit $b \in \{0, 1\}$ and then:
 - (a) Choose uniform $r \in \{0, 1\}^n$.
 - (b) Query $\mathcal{O}(r)$ and obtain response y .
 - (c) Return the challenge ciphertext $\langle r, y \oplus m_b \rangle$ to $\mathcal{A}$.
3. Continue answering encryption-oracle queries of $\mathcal{A}$ as before until $\mathcal{A}$ outputs a bit b' . Output 1 if $b' = b$, and 0 otherwise.

D computa in tempo polinomiale poichè A computa in tempo polinomiale.
Inoltre, si noti che:

- 1 Se l'oracolo di D contiene al suo interno una funzione **pseudocasuale**

Vista di A come subroutine di $D =$ Vista di A in $\text{PrivK}_{A,\Pi}^{cpa}(n)$

- 2 Se l'oracolo di D contiene al suo interno una funzione **casuale**

Vista di A come subroutine di $D =$ Vista di A in $\text{PrivK}_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n)$

Pertanto, possiamo dire che:

$$\textcircled{1} \Rightarrow \Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n} [D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1] = \Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{cpa}(n) = 1]$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \Pr_{f \leftarrow \text{Func}_n} [D^{f(\cdot)}(1^n) = 1] = \Pr[\text{PrivK}_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1]$$

Ma l'assunzione che F è pseudocasuale implica che $\exists \text{negl}(n)$ tale che:

$$|\Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n} [D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1] - \Pr_{f \leftarrow \text{Func}_n} [D^{f(\cdot)}(1^n) = 1]| \leq \text{negl}(n)$$



$$|\Pr[\text{PrivK}_{A,\Pi}^{cpa}(n) = 1] - \Pr[\text{PrivK}_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1]| \leq \text{negl}(n)$$

Pertanto possiamo analizzare lo schema ipotetico.

Successo di A nello schema ipotetico

Mostriamo che

$$\Pr[\text{PrivK}_{A, \tilde{\Pi}}^{\text{cpa}}(n) = 1] \leq 1/2 + q(n)/2^n.$$

Nota che, ogni volta che un messaggio m viene cifrato, in $\text{PrivK}_{A, \tilde{\Pi}}^{\text{cpa}}(n)$ viene scelto un $r \in \{0, 1\}^n$ uniforme, ed il cifrato risulta

$$\langle r, f(r) \oplus m \rangle$$

Sia r^* la stringa usata per produrre il cifrato di sfida, cioè

$$c^* := \langle r^*, f(r^*) \oplus m_b \rangle$$

Possono verificarsi due casi:

Successo di A nello schema ipotetico

- Il valore di r^* non è mai usato prima da $O(\cdot)$ per rispondere alle query di A

$\Rightarrow A$ non sa nulla circa $f(r^*)$, che risulta uniforme ed indipendentemente distribuito dal resto dell'esperimento

$$\Rightarrow Pr[PrivK_{A, \tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1] = Pr[b' = b] = 1/2$$

- Il valore di r^* è stato usato in precedenza

$\Rightarrow A$ può capire facilmente se è stato cifrato m_0 o m_1 . Infatti, disponendo di $f(r^*)$, poichè $c^* := \langle r^*, f(r^*) \oplus m_b \rangle$, risulta

$$f(r^*) \oplus (f(r^*) \oplus m_b) = m_b.$$

Il valore $f(r^*)$ può essere recuperato dalla query in cui r^* è usato: se A ha ricevuto dall'oracolo, per qualche m , il cifrato $c := \langle r^*, s \rangle = \langle r^*, f(r^*) \oplus m \rangle$, allora

$$s \oplus m = f(r^*).$$

Successo di A nello schema ipotetico

Tuttavia, poichè A effettua al più $q(n)$ query all'oracolo, al più $q(n)$ valori distinti di r vengono usati, scelti indip. e uniformemente in $\{0,1\}^n$.

Pertanto, la prob. che r^* , scelto uniformemente, sia uguale ad un r precedente è al più $q(n)/2^n$.

Indichiamo con **Repeat** l'evento che r^* sia uguale a qualche r scelto prima.

Risulta $Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1]$ uguale a

$$\begin{aligned} & Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1 \wedge \mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1 \wedge \overline{\mathbf{Repeat}}] \\ \leq & Pr[\mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1 \mid \mathbf{Repeat}] \cdot Pr[\mathbf{Repeat}] \\ \leq & Pr[\mathbf{Repeat}] + Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1 \mid \overline{\mathbf{Repeat}}] \\ \leq & q(n)/2^n + 1/2. \end{aligned}$$

Poichè abbiamo mostrato che

$$|Pr[PrivK_{A,\Pi}^{cpa}(n) = 1] - Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1]| \leq \text{negl}(n)$$

si ha:

$$\begin{aligned} Pr[PrivK_{A,\Pi}^{cpa}(n) = 1] &\leq Pr[PrivK_{A,\tilde{\Pi}}^{cpa}(n) = 1] + \text{negl}(n) \\ &\leq q(n)/2^n + 1/2 + \text{negl}(n) \\ &\leq 1/2 + q(n)/2^n + \text{negl}(n) \\ &\leq 1/2 + \text{negl}'(n). \end{aligned}$$

Pertanto, Π è CPA-sicuro.