

Schemi computazionalmente sicuri

Paolo D'Arco
pdarco@unisa.it

Università di Salerno

Elementi di Crittografia

- 1 Schemi di cifratura computazionalmente sicuri
- 2 Indistinguibilità
- 3 Sicurezza Semantica

Definizione 3.7. Uno schema di cifratura a chiave privata è una tripla $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ di algoritmi PPT tale che

- ① $k \leftarrow Gen(1^n)$, algoritmo probabilistico di generazione della chiave k
 - dove la chiave $k \in K$ è tale che $|k| \geq n$
- ② $c \leftarrow Enc_k(m)$, algoritmo probabilistico di cifratura
 - dove il messaggio $m \in \{0, 1\}^*$, la chiave $k \in K$ e il cifrato $c \in \{0, 1\}^*$
- ③ $m := Dec_k(c)$, algoritmo deterministico di decifratura
 - dove il cifrato $c \in \{0, 1\}^*$, la chiave $k \in K$ e il messaggio $m \in \{0, 1\}^*$
 - $Dec(c)$ restituisce $\perp$ in caso di errore

Correttezza. Per ogni n , per ogni k restituito da $Gen(1^n)$ e per ogni $m \in \{0, 1\}^*$, risulta

$$Dec_k(Enc_k(m)) = m$$

Note e osservazioni:

- se lo spazio dei messaggi è $\{0, 1\}^{\ell(n)}$, allora Π è uno schema di cifratura a chiave privata a lunghezza fissa, per messaggi di lunghezza $\ell(n)$.
- solitamente $Gen(1^n)$ restituisce stringhe di n bit scelte uniformemente a caso
- la definizione è senza stato (occasionalmente considereremo schemi con stato)

Definizione di sicurezza di base:

- 1 **Modello delle minacce.** Adv è PPT. Osserva un singolo cifrato ottenuto usando una certa chiave. Può applicare qualsiasi strategia d'attacco.
- 2 **Garanzie di sicurezza.** Adv non deve essere in grado di acquisire *alcuna informazione aggiuntiva* sul messaggio in chiaro m a partire dal cifrato c .

La nozione di *sicurezza semantica* formalizza ciò.



È difficile da maneggiare



Esiste una definizione *equivalente* più semplice



È la nozione di *Indistinguibilità*

Nel contesto della segretezza perfetta abbiamo considerato l'esperimento $\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}$

$\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}$

- 1 $m_0, m_1 \leftarrow A$ (sceglie due messaggi)
- 2 il challenger calcola $c \leftarrow \text{Enc}_k(m_b)$, dove $b \leftarrow \{0, 1\}$ e $k \leftarrow \text{Gen}(1^n)$
- 3 A riceve c e dà in output $b' \in \{0, 1\}$
- 4 Se $b = b'$, l'output dell'esperimento è 1 (A vince); altrimenti, 0.

Lo schema Π è sicuro se A vince con probabilità $1/2$, i.e., non c'è strategia migliore per indovinare che *scegliendo a caso*

Nel caso computazionale:

- A è PPT
- A può vincere con probabilità *trascurabilmente* migliore di $1/2$
- L'esperimento dipende da n , il parametro di sicurezza

$\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}(n)$

- 1 A ottiene 1^n e dà in output $m_0, m_1 \leftarrow A$ tali che $|m_0| = |m_1|$
- 2 il challenger calcola $c \leftarrow \text{Enc}_k(m_b)$, dove $b \leftarrow \{0, 1\}$ e $k \leftarrow \text{Gen}(1^n)$
- 3 $A(1^n)$ riceve c e dà in output $b' \in \{0, 1\}$
- 4 Se $b = b'$, l'output dell'esperimento è 1 ($A(1^n)$ vince); altrimenti, 0.

Definizione 3.8. Uno schema di cifratura a chiave privata $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ ha *cifrature indistinguibili* in presenza di un avversario che ascolta (eavesdropper) o è EAV-sicuro se, per ogni Adv A PPT, esiste una funzione trascurabile $negl$ tale che:

$$Pr[PrivK_{A,\Pi}^{eav}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + negl(n),$$

dove la probabilità è calcolata su

- randomness usata da A
- randomness usata nell'esperimento
 - scelta della chiave
 - scelta del bit b
 - random bit usati da $Enc_k(\cdot)$

Nota: qualsiasi schema di cifratura *perfettamente segreto* ha cifrature indistinguibili in presenza di un eavesdropper.

Faremo vedere che esistono schemi con "chiavi più corte"

Esiste una formulazione equivalente: l'idea di fondo è che *ogni Adv PPT si comporta allo stesso modo sia che veda una cifratura di m_0 che di m_1*

Definendo $\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}(n, b)$ con $b \in \{0, 1\}$ e l'output di A con $\text{out}_A(\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}(n, b))$, diamo la seguente

Definizione 3.9. $\Pi = (\text{Gen}, \text{Enc}, \text{Dec})$ è EAV-sicuro se, per ogni Adv A PPT, esiste una funzione trascurabile negl tale che, per tutti gli n si ha:

$$|\Pr[\text{out}_A(\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}(n, 0)) = 1] - \Pr[\text{out}_A(\text{PrivK}_{A,\Pi}^{\text{eav}}(n, 1)) = 1]| \leq \text{negl}(n).$$

Nota: nella definizione *non* richiediamo ad uno schema di nascondere la lunghezza del messaggio da cifrare. Nei casi in cui questa informazione è importante occorre porre rimedio (e.g., estendendo i messaggi ad una lunghezza fissa)

Il concetto di indistinguibilità ricorda il concetto di travestimento. E le proprietà che desideriamo sono all'incirca le seguenti:

- Due persone travestite sono indistinguibili: una modella bellissima e l'uomo più brutto del mondo, travestiti, non possono essere distinti
- Ma le due persone devono essere della stessa altezza: altrimenti è immediato distinguere un gigante da un nano
- Se le due persone travestite si mostrano, vanno via e poi ritornano con nuovi travestimenti, devono essere nuovamente indistinguibili.

Dovrebbe essere impraticabile per un Adv acquisire *alcuna informazione aggiuntiva* sul messaggio in chiaro dal cifrato.

Cominciamo con due nozioni più deboli:

- 1 il cifrato non rivela alcuna informazione sui singoli bit del messaggio in chiaro
- 2 il cifrato non aiuta un Adv PPT nel *calcolo* di qualsiasi funzione del messaggio in chiaro

Proveremo che la nozione di indistinguibilità implica 1. e 2.

Notazione: solitamente Gen genera chiavi distribuite uniformemente a caso. Quando assumeremo ciò, useremo per semplicità $\Pi = (Enc, Dec)$

Teorema 3.10. Sia $\Pi = (Enc, Dec)$ uno schema di cifratura a chiave privata per messaggi di lunghezza ℓ EAV-sicuro. Allora, per ogni Adv A PPT ed ogni $i \in \{1, \dots, \ell\}$, esiste una funzione trascurabile $negl$ tale che:

$$Pr[A(1^n, Enc_k(m)) = m^i] \leq \frac{1}{2} + negl(n),$$

dove la probabilità è calcolata su

- scelta uniforme di $m \in \{0, 1\}^\ell$
- scelta uniforme di $k \in \{0, 1\}^n$
- random bit usati da A
- random bit usati da $Enc_k(\cdot)$

Dim. Idea: se fosse possibile, con probabilità non trascurabile, calcolare l' i -esimo bit m^i



sarebbe anche possibile, con probabilità non trascurabile, distinguere m_0 da m_1 che differiscono nell' i -esimo bit.

Useremo una dimostrazione *per riduzione* (... ci torneremo su a breve).

Fissiamo un Adv arbitrario A PPT ed $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Vogliamo usare A (e la sua capacità di calcolare m^i con prob. non trascurabile) per costruire un Adv A' che *usa* A per distinguere con prob. non trascurabile m_0 da m_1 che differiscono nell' i -esimo bit.

Siano:

$I_0 \subset \{0, 1\}^\ell$ insieme di stringhe con i -esimo bit uguale a 0

$I_1 \subset \{0, 1\}^\ell$ insieme di stringhe con i -esimo bit uguale a 1

Essendo $|I_0| = |I_1| = 2^{\ell-1}$ ed m scelto in modo uniforme, risulta

$$\begin{aligned} Pr[A(1^n, Enc_k(m)) = m^i] &= Pr[m \in I_0] \cdot Pr[A(1^n, Enc_k(m)) = 0 | m \in I_0] \\ &\quad + Pr[m \in I_1] \cdot Pr[A(1^n, Enc_k(m)) = 1 | m \in I_1] \\ &= \frac{1}{2} \cdot Pr[A(1^n, Enc_k(m_0)) = 0] + \frac{1}{2} \cdot Pr[A(1^n, Enc_k(m_1)) = 1] \end{aligned}$$

Costruiamo A' come segue:

Adv A'

- ① sceglie uniformemente $m_0 \in I_0$ e $m_1 \in I_1$ e li passa al challenger
- ② dopo aver ricevuto c dal challenger, invoca $A(1^n, c)$
- ③ Se A dà in output 0, allora dà in output $b' = 0$; altrimenti, $b' = 1$.

A' gioca nell'esperimento $\text{PrivK}_{A', \Pi}^{\text{eav}}(n)$ e usa A , che calcola m^i , come subroutine.

A' è PPT poichè A è PPT.

Dalla definizione di $\text{PrivK}_{A', \Pi}^{\text{eav}}(n)$, A' ha successo se e solo se A restituisce b dopo aver ricevuto $\text{Enc}_k(m_b)$. Pertanto, risulta:

$$\Pr[\text{PrivK}_{A', \Pi}^{\text{eav}}(n) = 1] = \Pr[A(1^n, \text{Enc}_k(m_b)) = b]$$

(dato che b viene scelto uniform. nell'esperimento)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \Pr[A(1^n, \text{Enc}_k(m_0)) = 0] + \frac{1}{2} \cdot \Pr[A(1^n, \text{Enc}_k(m_1)) = 1] \\ &= \Pr[A(1^n, \text{Enc}_k(m)) = m^i] \end{aligned}$$

Poichè abbiamo assunto che $\Pi = (\text{Enc}, \text{Dec})$ è EAV-sicuro, esiste una funzione trascurabile *negl* tale che

$$\Pr[\text{PrivK}_{A', \Pi}^{\text{eav}}(n) = 1] \leq 1/2 + \text{negl}(n)$$

$\Downarrow$

$$\Pr[A(1^n, \text{Enc}_k(m)) = m^i] \leq 1/2 + \text{negl}(n).$$

Circa il punto 2., mostreremo che:

un Adv A che calcola $f(m)$ con una certa probabilità quando riceve $Enc_k(m)$



un Adv A' che calcola $f(m)$ con la *stessa* probabilità, *senza* conoscere $Enc_k(m)$.

Teorema 3.11. Sia $\Pi = (Enc, Dec)$ uno schema di cifratura a chiave privata per messaggi di lunghezza ℓ EAV-sicuro. Allora, per ogni Adv A PPT, esiste un Adv A' PPT tale che, per ogni $S \subseteq \{0, 1\}^\ell$ ed ogni $f : \{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}$ esiste una funzione trascurabile $negl$ tale che:

$$|Pr[A(1^n, Enc_k(m)) = f(m)] - Pr[A'(1^n) = f(m)]| \leq negl(n),$$

dove la prima probabilità è calcolata su

- scelta uniforme di $m \in S$ e $k \in \{0, 1\}^n$
- random bit usati da A
- random bit usati da $Enc_k(\cdot)$

e la seconda su

- scelta uniforme di $m \in S$ e dei random bit usati da A'

Dim. (Sketch) Poichè Π è EAV-sicuro, per ogni $S \subseteq \{0, 1\}^\ell$, nessun Adv PPT può distinguere tra $Enc_k(m)$ ed $Enc_k(1^\ell)$

Consideriamo la probabilità con cui A calcola $f(m)$ data $Enc_k(m)$.

A dovrebbe calcolare $f(m)$ data $Enc_k(1^\ell)$ con $\approx$ la stessa probabilità.

Altrimenti A potrebbe essere usato per distinguere tra $Enc_k(m)$ ed $Enc_k(1^\ell)$.

Distinguisher

- 1 sceglie uniformemente $m \in S$ e passa al challenger $m_0 = m$ e $m_1 = 1^\ell$
- 2 dopo aver ricevuto c dal challenger, invoca $A(1^n, c)$
- 3 Se A dà in output $f(m)$, allora dà in output $b' = 0$; altrimenti, $b' = 1$.

Se A dà in output $f(m)$ con una probabilità *significativamente* migliore nel caso in cui riceve $Enc_k(m)$ rispetto a quando riceve $Enc_k(1^\ell)$, allora l'algoritmo Distinguisher viola la Definizione 3.9.

Detto ciò, possiamo costruire A' come segue

Adv $A'(1^n)$

- 1 sceglie uniformemente $k \in \{0, 1\}^n$
- 2 invoca $A(1^n, Enc_k(1^\ell))$
- 3 dà in output qualsiasi cosa A dà in output

A dà in output $f(m)$ quando viene eseguito come subroutine di A' con $\approx$ la stessa probabilità di quando riceve $Enc_k(m)$. Pertanto A' ha i requisiti richiesti dal teorema.

La garanzia offerta dalla sicurezza semantica è più forte della garanzia offerta dal Teorema 3.11

- la lunghezza dei messaggi dipende dal parametro di sicurezza n
- la distribuzione di probabilità su M è arbitraria
 - unica condizione: sia efficientemente campionabile (samplable). Cioè, esiste $Samp(1^n)$, algoritmo PPT, che dà in output messaggi in accordo alla distribuzione di probabilità definita su M
- inoltre, la definizione tiene anche conto di eventuali informazioni aggiuntive $h(m)$ sul messaggio m che l'avversario può ottenere attraverso altri mezzi

Definizione 3.12. Uno schema di cifratura a chiave privata $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$ è semanticamente sicuro in presenza di un eavesdropper se, per ogni Adv A PPT, esiste un Adv A' PPT tale che, per qualsiasi $Samp(1^n)$ PPT e per ogni coppia di funzioni f ed h , calcolabili in tempo polinomiale, esiste una funzione trascurabile $negl$ per cui si ha:

$$|Pr[A(1^n, Enc_k(m), h(m)) = f(m)] - Pr[A'(1^n, |m|, h(m)) = f(m)]| \leq negl(n),$$

dove la prima probabilità è calcolata su

- scelta uniforme di $k \in \{0, 1\}^n$
- random bit usati da $Samp(1^n)$
- random bit usati da A
- random bit usati da $Enc_k(\cdot)$

e la seconda su

- random bit usati da $Samp(1^n)$ e random bit usati da A'

Teorema 3.13. $\Pi = (Enc, Dec)$ ha cifrature indistinguibili in presenza di un eavesdropper *se e solo se* è semanticamente sicuro in presenza di un eavesdropper.



Possiamo usare la definizione più semplice di indistinguibilità come definizione di lavoro!