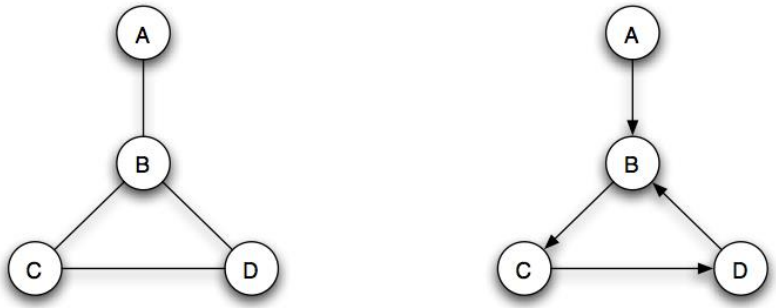
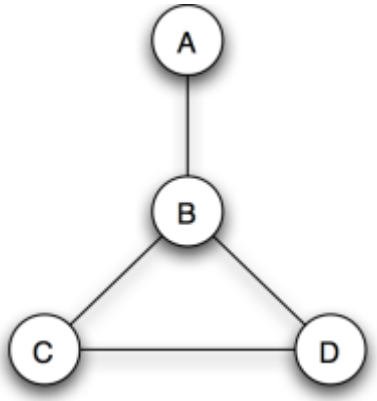
Grafi e rappresentazione delle Reti

Una buona scelta della rappresentazione della rete determina la nostra capacità di utilizzare il sistema con successo

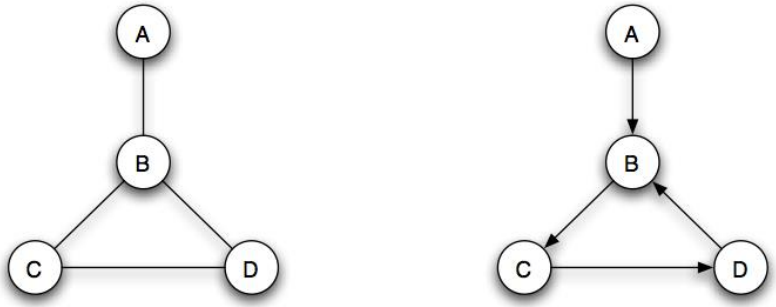


Grafi e rappresentazione delle Reti

- Una rete consiste di
  - *Un insieme di nodi (vertici)*
  - *Un insieme di archi (collegamenti)*
    - *Un arco collega due nodi*



Grafi e rappresentazione delle Reti

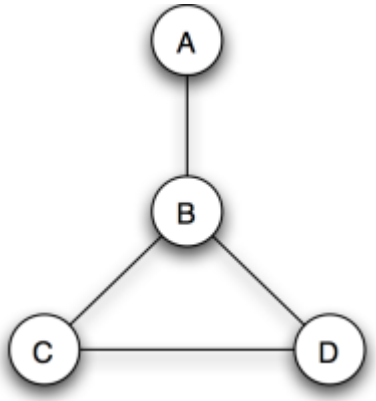


- I Grafi forniscono un linguaggio unificante per descrivere la struttura di una rete

- La possibilità di raccogliere dati su larga scala usando computer e reti di computer consente nuovi approcci
  - individuare proprietà statistiche che caratterizzano la struttura delle network e fornire modi per misurarle
  - creare modelli di network e descrivere la loro formazione
  - Prevedere evoluzione della rete sulla base dei modelli e delle proprietà strutturali

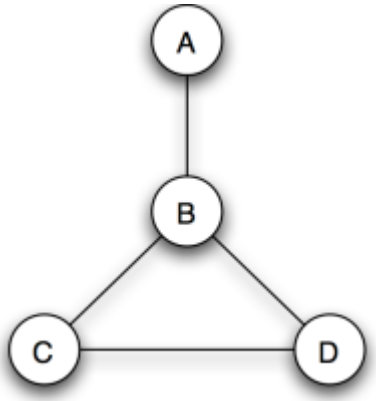
Definizione di Grafo

- Un *grafo* *G=(V,E)* consiste di
  - *Un insieme V di nodi (vertici)*
  - *Un insieme E di archi (collegamenti)*
    - *Un arco collega due nodi*

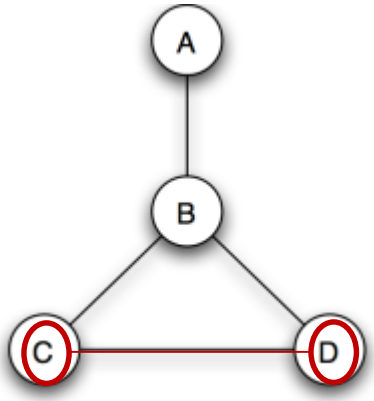


Definizione di Grafo

- Un *grafo* *G=(V,E)* consiste di
  - *Un insieme V di nodi (vertici)*
  - *Un insieme E di archi (collegamenti)*
    - *Un arco collega due nodi*

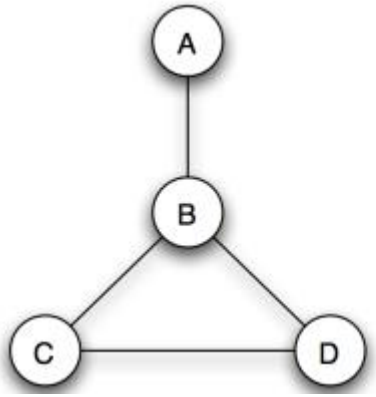


- Due nodi sono *vicini* (neighbor) se sono collegati da un arco (edge)
  - I nodi C e D sono adiacenti all'arco (C, D)

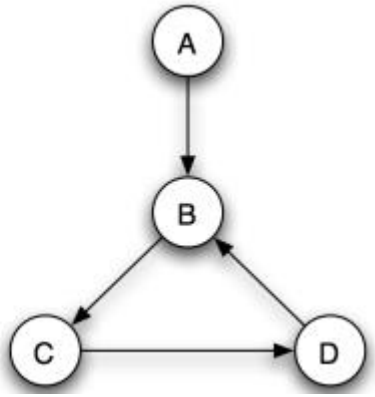


Grafi Diretti e Indiretti

- Gli archi possono avere un orientamento
  - Archi diretti: relazione vale solo tra testa e coda dell'arco
  - Archi indiretti (edge): relazione vale in tutte e due le direzioni



Grafo indiretto

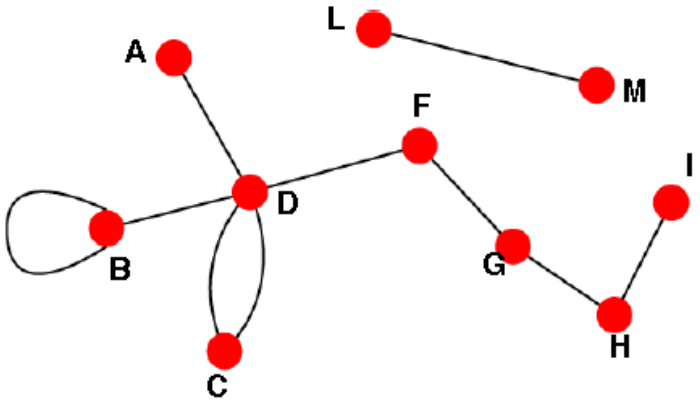


Grafo diretto

- La differenza è sostanziale
  - Modelli differenti di formazione e mantenimento della rete
  - Algoritmi differenti

Grafi e Networks

Grafi diretti e indiretti codificano diversi tipi di reti



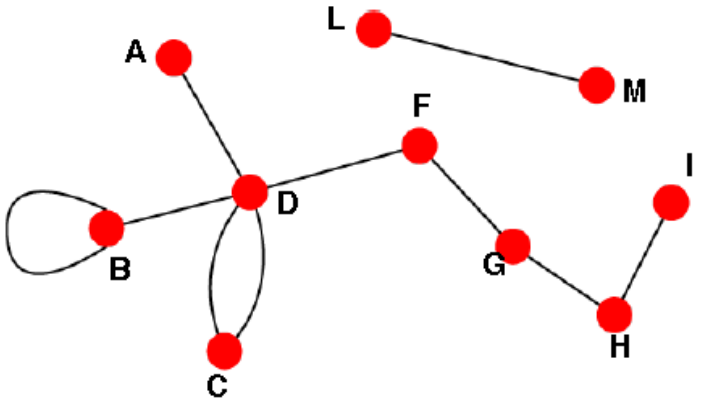
Grafi indiretti

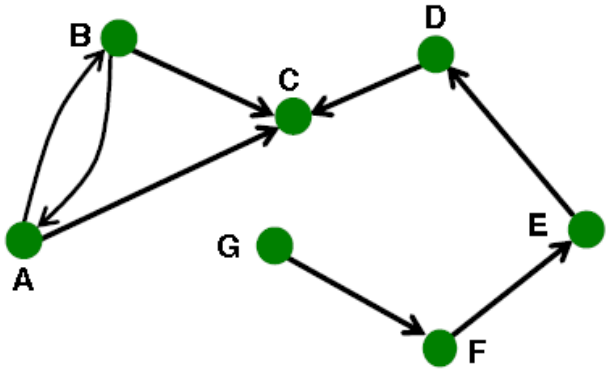
La relazione tra due nodi è frutto di un'azione concordata tra i due nodi

Es: amicizia, alleanza, conoscenza, connessione, ecc.

Grafi e Networks

Grafi diretti e indiretti codificano diversi tipi di reti





Grafi indiretti

La relazione tra due nodi è frutto di un'azione concordata tra i due nodi

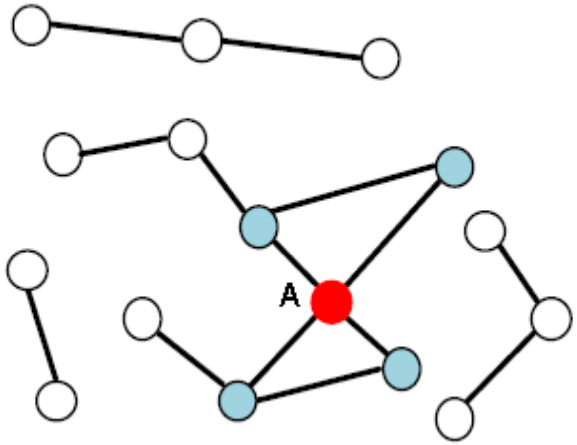
Es: amicizia, alleanza, conoscenza, connessione, ecc.

Grafi diretti

La relazione tra due nodi è frutto di un atto unilaterale

Es: link a pagine web, followers, citazioni di un articolo

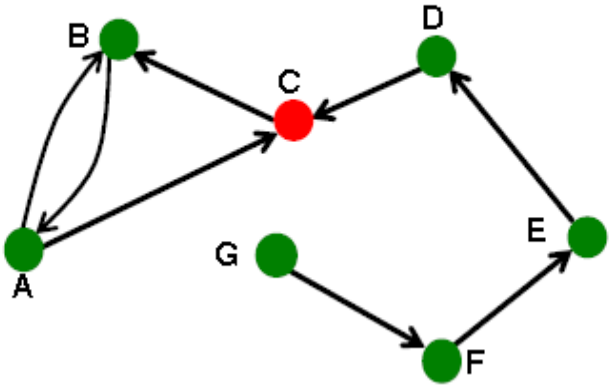
Grado di un nodo



Grado del nodo i: numero k_i di archi adiacenti ad i

Grado medio:

$$\bar{k} = \langle k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2E}{N}$$

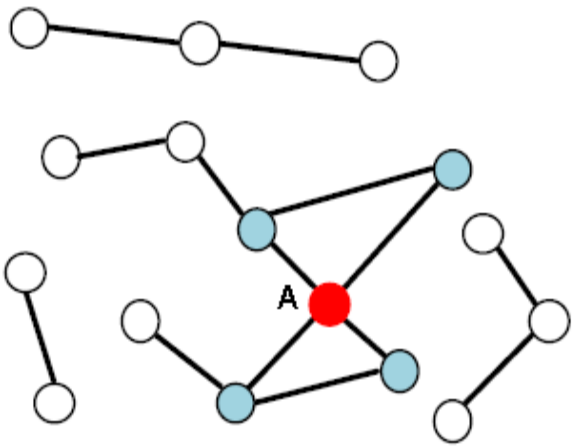


In grafi orientati si distingue ulteriormente tra
in-degree: numero di archi entranti
out-degree numero di archi uscenti

Intorno (Neighborhood)

- L'***intorno*** di un nodo è l'insieme di tutti i suoi vicini

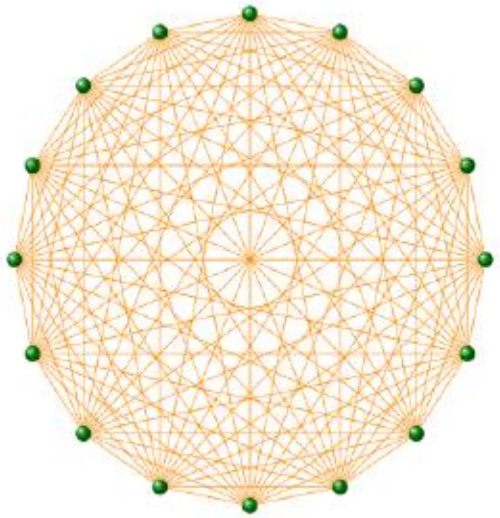
- L'intorno di un insieme di vertici S è l'insieme dei vertici del grafo che non appartengono ad S ma sono adiacenti a vertici di S



Grafo completo

Il massimo numero di edge in un grafo non orientato di N nodi è

$$E_{\max} = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

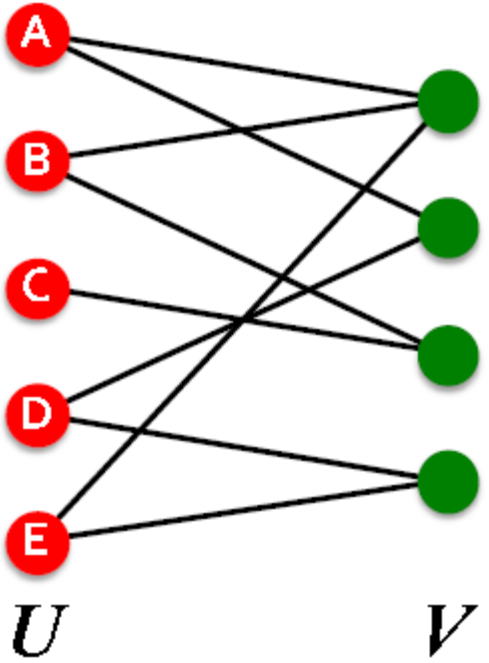


Un grafo non orientato di n nodi con tale numero di edge si dice **completo**

Il grado di ogni nodo (e quindi il grado medio) è N-1

Grafo bipartito

Un grafo si dice **bipartito** se i nodi possono essere partizionati in due insiemi disgiunti U e V in modo tale che esistono solo edge che connettono un nodo in U ed uno in V,
cioè U e V sono **insiemi indipendenti**

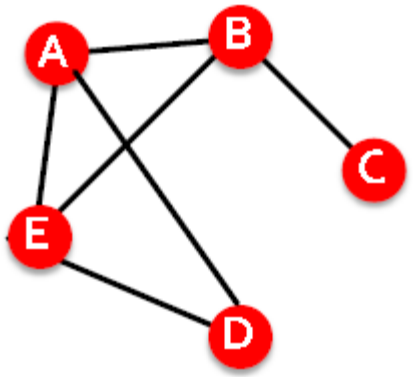


Es.

- Autore—articolo(di cui è autore)
- Film—attore(che ha partecipato al film)

Grafo Folded:

- Rete delle collaborazioni tra autori
- Copresenze di attori in film



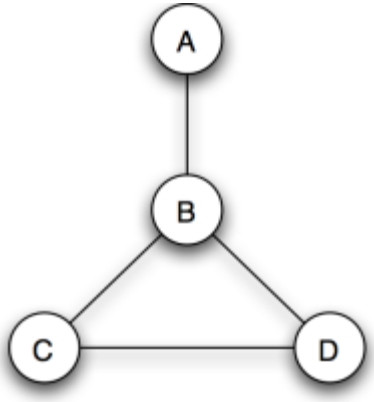
Folded version of the graph above

Rappresentazione dei Grafi

- Un grafo è una coppia di insiemi
  - *G = (V, E)*
    - V = insieme dei vertici (nodi)
    - E = insieme degli edge/archi

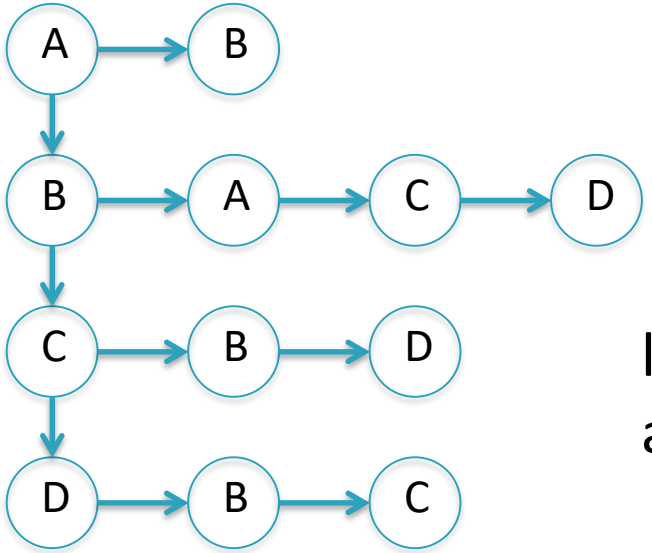
- Rappresentazioni più utilizzate
  - Matrice di adiacenza
    - Matrice *n* x *n* (*n* numero dei vertici in *V*)
    - Elemento (*i, j*) vale 1 se esiste l'edge tra *i* e *j*
      - Vale $w_{i,j}$ se il grafo è pesat*o e w* è la funzione peso
  - Lista dei vertici *V* e degli edge *E*
    - Per ogni vertice v abbiamo la lista dei vertici adiacenti a v
  - Rappresentazione grafica

Rappresentazione di un Grafo: Liste delle adiacenze



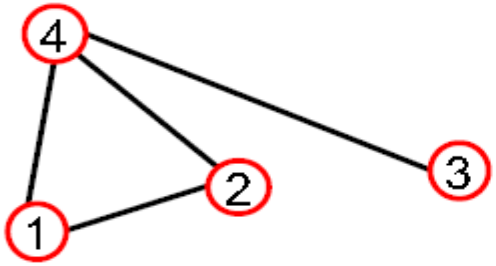
	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	0	1	1
C	0	1	0	1
D	0	1	1	0

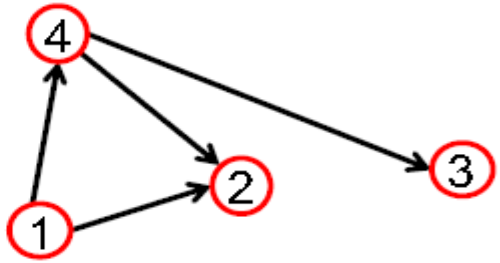
Matrice di adiacenza



liste di adiacenza

Rappresentazione di un Grafo: Matrice delle adiacenze





$A_{ij} = 1$ if there is a link from node *i* to node *j*

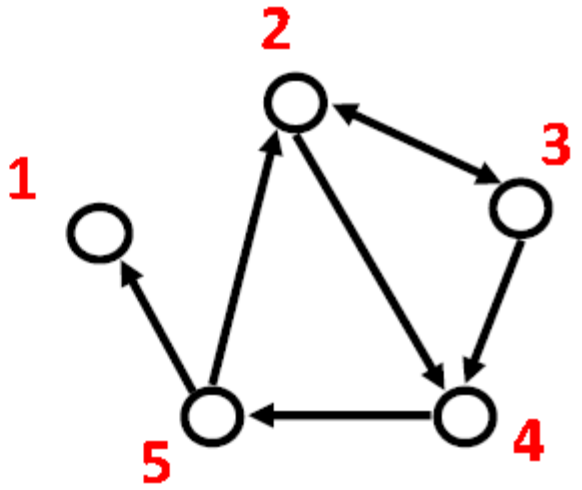
$A_{ij} = 0$ otherwise

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note that for a directed graph (right) the matrix is not symmetric.

Rappresentazione di un Grafo: Lista degli archi

- (2, 3)
- (2, 4)
- (3, 2)
- (3, 4)
- (4, 5)
- (5, 2)
- (5, 1)



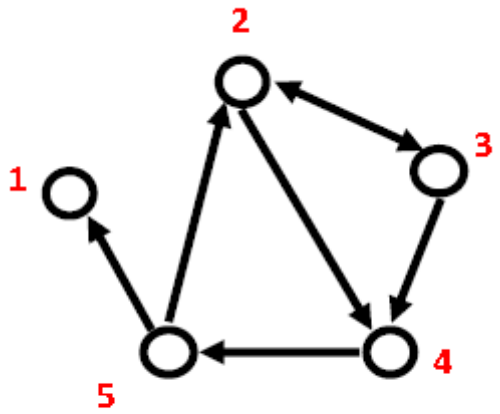
Lista delle ediacenze

Più semplici da utilizzare quando la rete è

- grande
- sparsa

Permette di trovare velocemente tuti i vicini di un nodo dato

- 1:
- 2: 3, 4
- 3: 2, 4
- 4: 5
- 5: 1, 2



Network reali sono grafi sparsi

$$E << E_{max} \quad (\text{or } \bar{k} << N-1)$$

WWW (Stanford-Berkeley):	N=319,717	⟨k⟩=9.65
Social networks (LinkedIn):	N=6,946,668	⟨k⟩=8.87
Communication (MSN IM):	N=242,720,596	⟨k⟩=11.1
Coauthorships (DBLP):	N=317,080	⟨k⟩=6.62
Internet (AS-Skitter):	N=1,719,037	⟨k⟩=14.91
Roads (California):	N=1,957,027	⟨k⟩=2.82
Proteins (S. Cerevisiae):	N=1,870	⟨k⟩=2.39

(Source: *Leskovec et al., Internet Mathematics, 2009*)

La matrice delle adiacenze contiene moltissimi zeri!

- densità (E/E_{max}): WWW=1.51×10^{-5}, MSN IM = 2.27×10^{-8})

Grafi Pesati o Segnati

- Possiamo associare agli archi delle informazioni aggiuntive
  - Peso (frequenza della comunicazione, lunghezza del collegamento,...)
  - Tipo (amico, parente, collega, ...)
  - segno (amici-nemici)
  - forza del legame/ranking (miglior amico, secondo miglior amico,...)
  - distanza (lunghezza del collegamento)
  - ritardo (tempo di trasmissione)
  - affidabilità (percentuale di errore nella trasmissione)
  - costo (costo di utilizzo del collegamento)

- In un grafo *pesato* ogni arco ha un numero associato che ne definisce il peso
- In un grafo *segnato* ogni arco ha un segno positivo o negativo

Vertici ed Archi

- Nello studio delle reti i nodi e gli archi rappresentano entità del mondo reale
  - alcune astrazioni di network comunemente utilizzate

WWW >> directed multigraph with self-edges

Facebook friendships >> undirected, unweighted

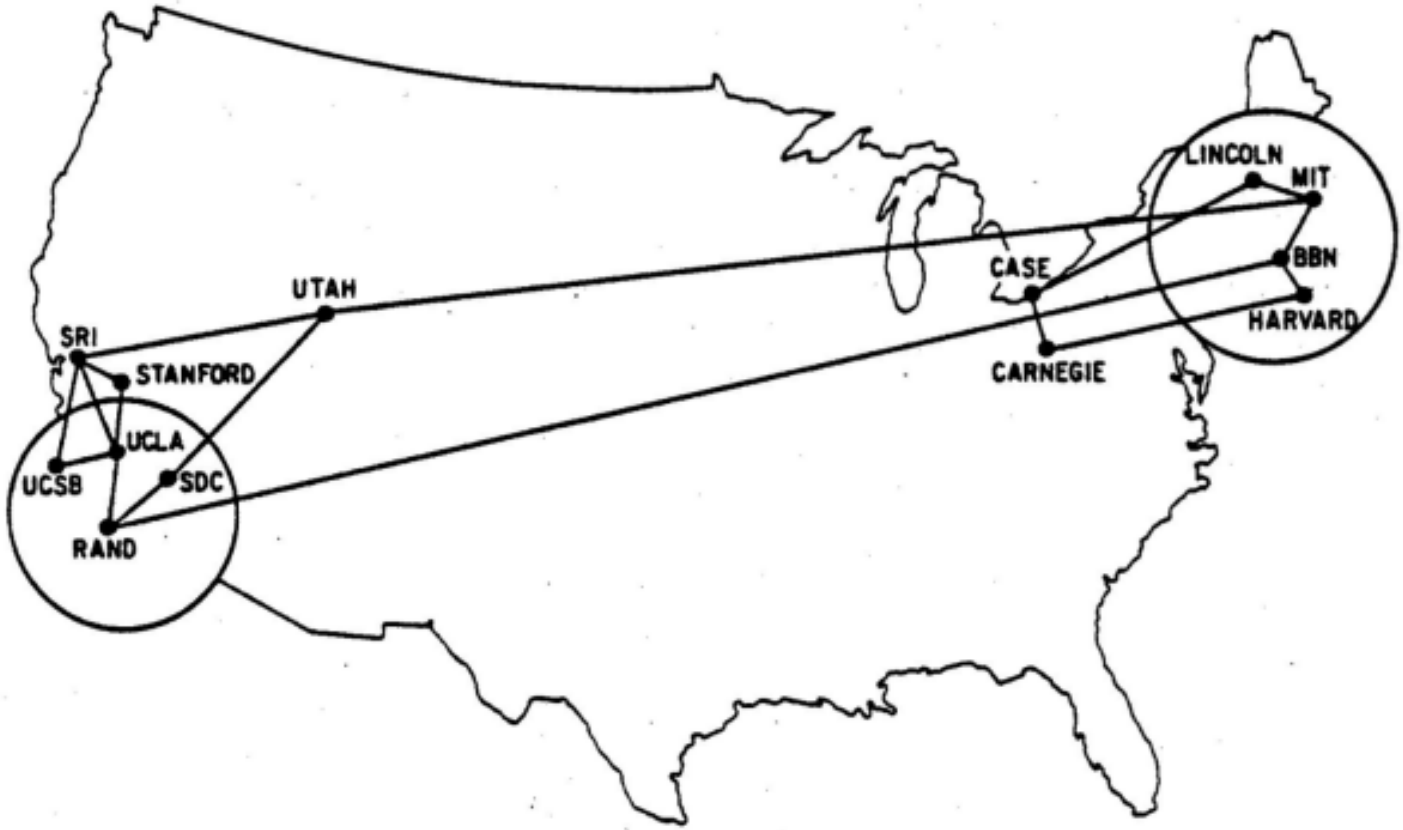
Citation networks >> unweighted, directed, acyclic

Collaboration networks >> undirected multigraph or weighted graph

Mobile phone calls >> directed, (weighted?) multigraph

Protein Interactions >> undirected, unweighted with self-interactions

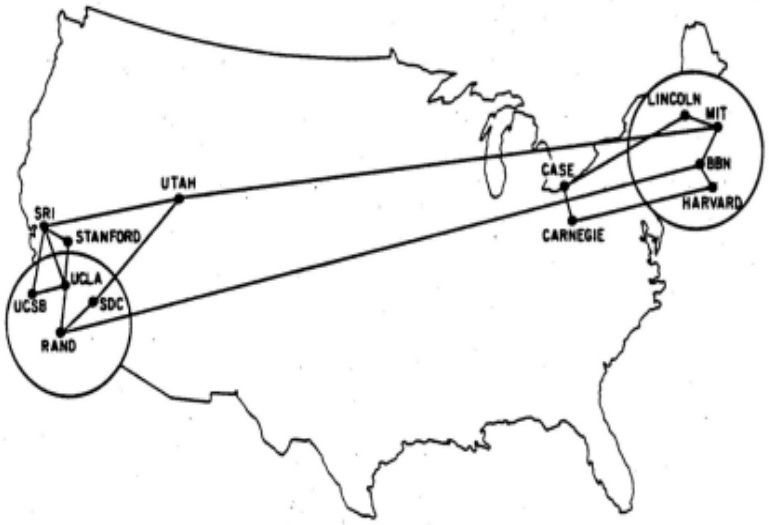
ARPANET: Precursore di Internet

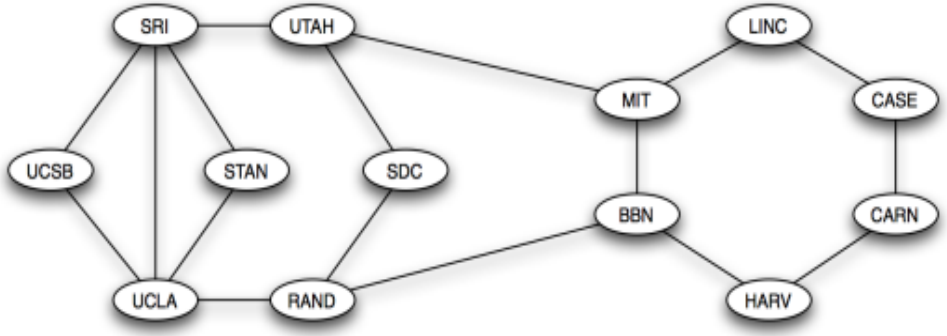


- Creata nel 1970 con 13 nodi

Il Grafo di ARPANET

- Siamo interessati solo alla connettività
  - Le distanze possono essere rappresentate come pesi





Reti di Trasporto

- La terminologia dei grafi è in gran parte derivata dal mondo dei trasporti
  - “cammino minimo”, “diametro”, “flusso”

Reti di Trasporto

- Questioni a cui siamo interessati
  - La struttura della rete è in grado di supportare le performance richieste?
  - Quanto è robusta?
  - Si presta a fallimenti a cascata?

Concetti Principali sui Grafi

- “Graph theory is a terminological jungle in which every newcomer may plant a tree“
  (Social scientist John Barnes)

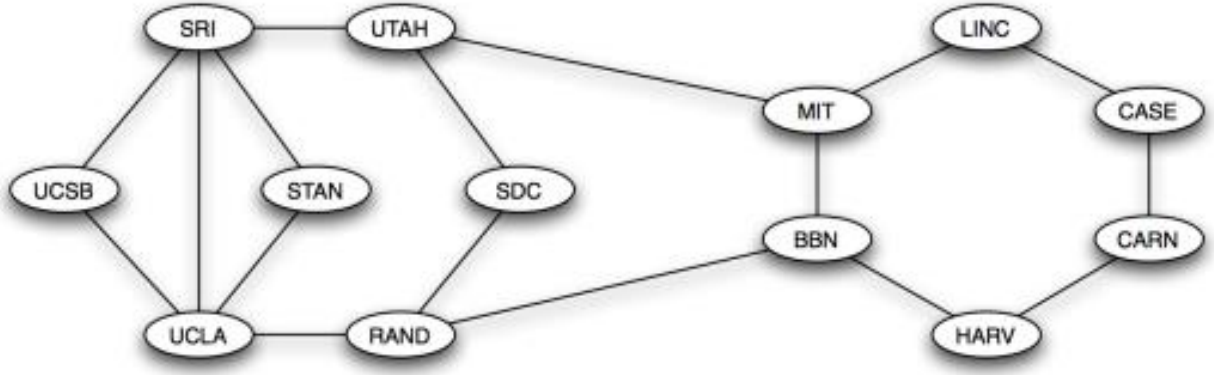
- Ci occupereremo solo dei concetti principali per gli scopi del corso
  - cammini
  - cicli
  - connectività
  - componenti (e componente gigante)
  - distanza

Cammini

- Un elemento caratteristico delle reti è che i nodi possono influenzarsi tramite relazioni indirette
- Diverse cose spesso viaggiano lungo gli archi del grafo
  - Mezzi di trasporto
  - informazioni
  - influenza
  - malattie

- Un ***cammino (path)*** è una sequenza di nodi con la proprietà che ogni coppia di nodi consecutivi del cammino sono connessi da un edge
  - Se tra due nodi esiste un cammino allora i due nodi sono in relazione indiretta tra loro

Cammini

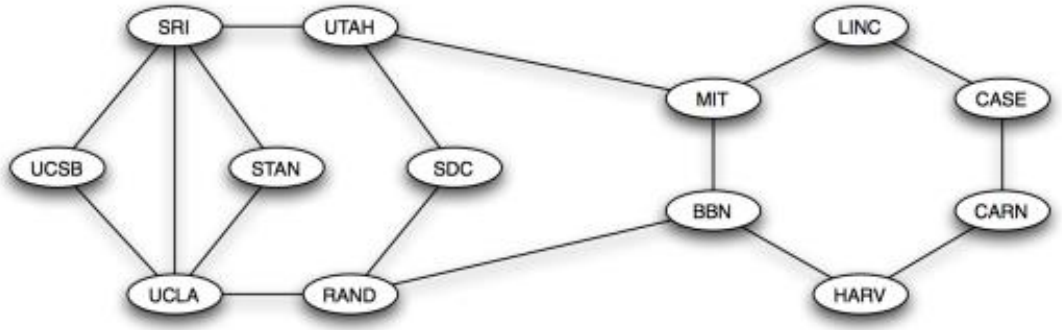


- MIT – BBN – RAND – UCLA è un cammino
- UCSB – UCLA – RAND – MIT non è un cammino
- Un percorso può attraversare lo stesso nodo più volte
  - SRI – STAN – UCLA – SRI – UTAH – MIT
- Un ***cammino semplice*** non attraversa mai uno stesso nodo due volte
- Un ***cammino minimo*** è un cammino che attraversa il minor numero possibile di archi

Cicli

Ciclo: cammino semplice che inizia e termina nello stesso nodo

- LINC – CASE – CARN – HARV – BBN – MIT – LINC è un ciclo
- Ogni ciclo ha almeno tre archi



- Nelle ***reti di comunicazione*** o trasporto ogni nodo appartiene ad uno o più cicli
  - Ridondanza inserita per aumentare la robustezza della rete e garantire il funzionamento della rete anche in presenza di guasti
- In una ***rete sociale*** i cicli sono frequenti ma non voluti
  - Es: l'amica della cugina di mia moglie è sorella del mio collega d'ufficio

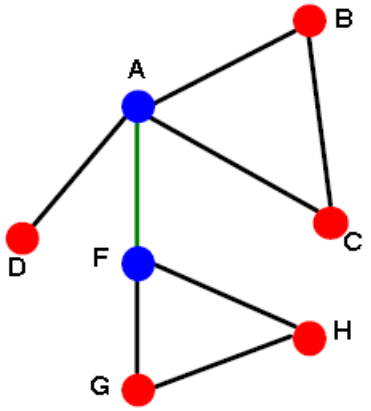
Cammini e Cicli Diretti

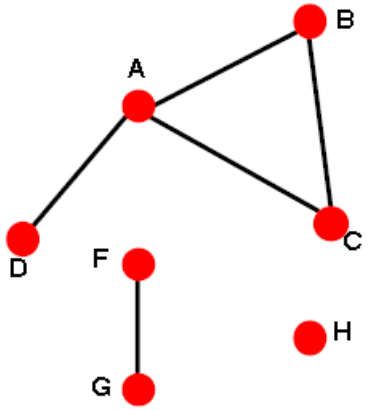
- Cammini e cicli diretti si definiscono in maniera analoga al caso indiretto
  - Bisogna tener conto delle direzioni degli archi del cammino
- A volte possiamo considerare cicli indiretti anche in grafi diretti
  - Ignoriamo la direzione dell'arco
  - Utile se ci interessa l'esistenza di una relazione, indipendentemente da chi l'ha attivata

Connettività

Grafo (non orientato) connesso: ogni coppia di vertici è unita da un cammino

Un grafo non connesso è formato da due o più componenti connesse





Largest Component:
Giant Component

Isolated node (node H)

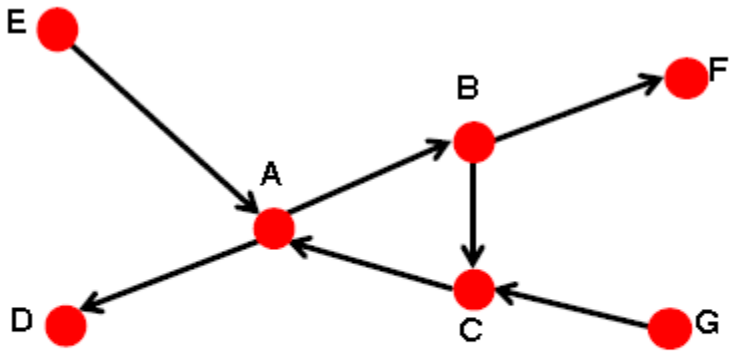
Bridge: edge che se rimosso disconnette il grafo

Punto di articolazione: nodo che se rimosso (insieme agli edge adiacenti) disconnette il grafo

Connettività

Grafo (orientato) fortemente connesso: ogni coppia ordinata di vertici è unita da un cammino
(es vertici A e B: esistono sia path da A a B che da B ad A)

NON fortemente connesso:



Componenti

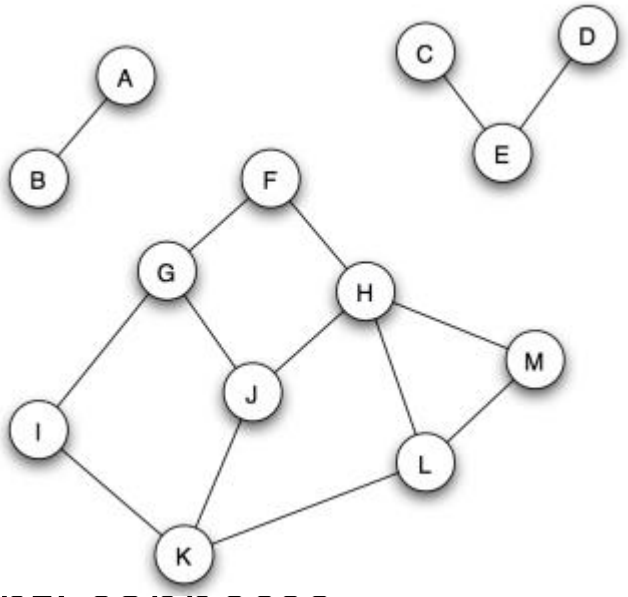
- Se un grafo non è connesso può essere diviso in sottografi che sono a loro volta connessi

- Una ***componente connessa*** di un grafo non diretto è un sottinsieme di nodi tali che
  - Ogni nodo ha un cammino verso ogni altro nodo della sua componente
  - Per ogni nodo *u* non appartenente alla componente esiste un nodo *v* nella componente tale che non esiste nessun cammino da *u* a *v*

- **Una *componente fortemente connessa*** di un grafo diretto è un sottinsieme di nodi tali che
  - Ogni nodo ha un cammino diretto verso ogni altro nodo della sua componente
  - Per ogni nodo u non appartenente alla componente esiste un nodo v nella componente tale che non esiste nessun cammino da *u* a *v* o da *v* a *u*

- Un arco di una componente è un bridge se la sua cancellazione sconnette la componente

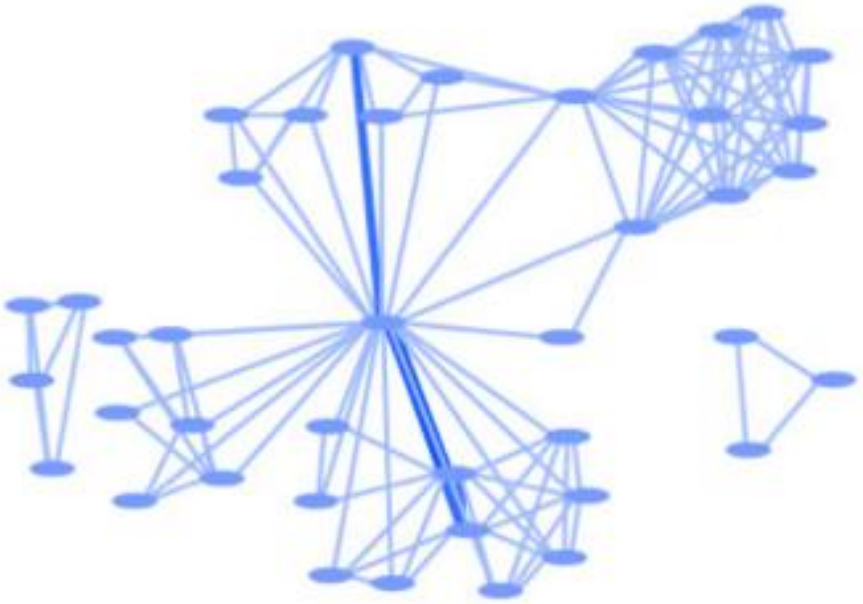
Componenti



- Tre componenti connesse
  - {A,B}, {C,D,E}, {F,G,...,M}
- {H, L, M} non è una componente
- L'arco (D, E) è un bridge

Analisi delle Componenti

- Analizzare le componenti del grafo fornisce informazioni globali sulla struttura della rete
  - Cosa lega ogni componente?
  - Come si diffondono le informazioni?
  - Che ruolo svolgono i nodi?



Grafo delle collaborazioni in un centro di ricerca

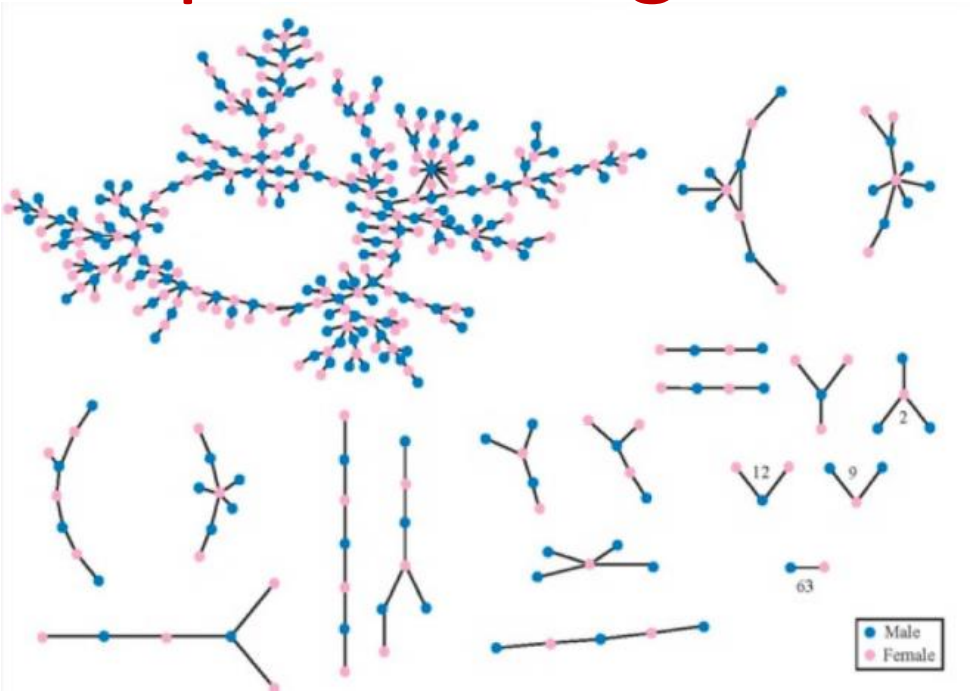
Analisi delle Componenti

- In molte situazioni è importante riuscire ad individuare le componenti connesse di una rete
- Individuiamo le regioni più densamente connesse e i confini tra queste regioni
- Individuiamo legami *forti* (in grafi pesati)
  - consideriamo solo gli edge con un peso superiore ad una certa soglia
  - Incrementando gradualmente la soglia il grafo si frammenterà in componenti sempre più piccole

Componenti Giganti

- Molti grafi non sono connessi ma includono una componente ***molto grande***
  - E.g. il grafo del Web
- Grosse reti spesso contengono una *componente gigante*
  - Una componente che contiene un‘alta percentuale dei nodi della rete
- In genere la componente gigante è unica
- Quando due componenti giganti si fondono possono verificarsi eventi traumatici
  - Grafo delle relazioni umane prima della scoperta dell’America aveva due componenti giganti
  - La fusione delle due componenti ha segnato lo sterminio di una componente

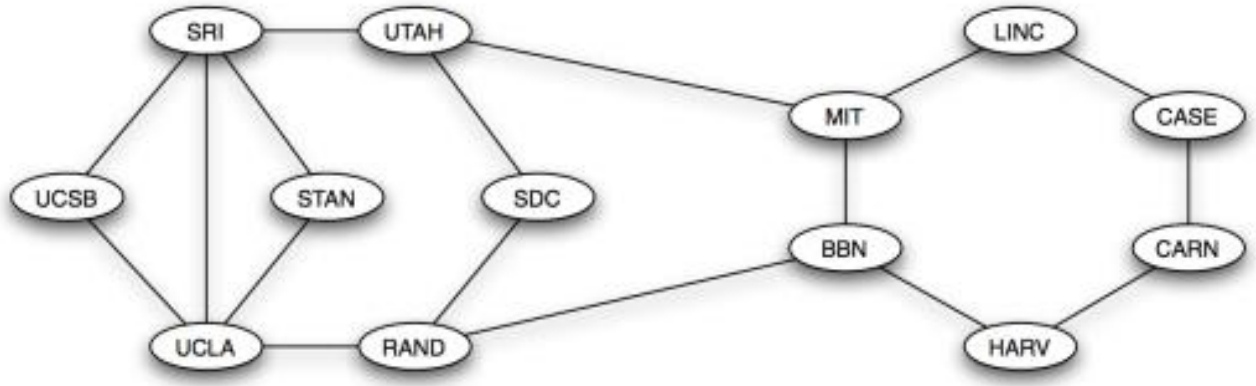
Componenti Giganti



- Romantic relationships in an American high school over an 18-month period.
- Edges were not all present at once; rather, there is an edge between two people if they were romantically involved at any point during the time period.

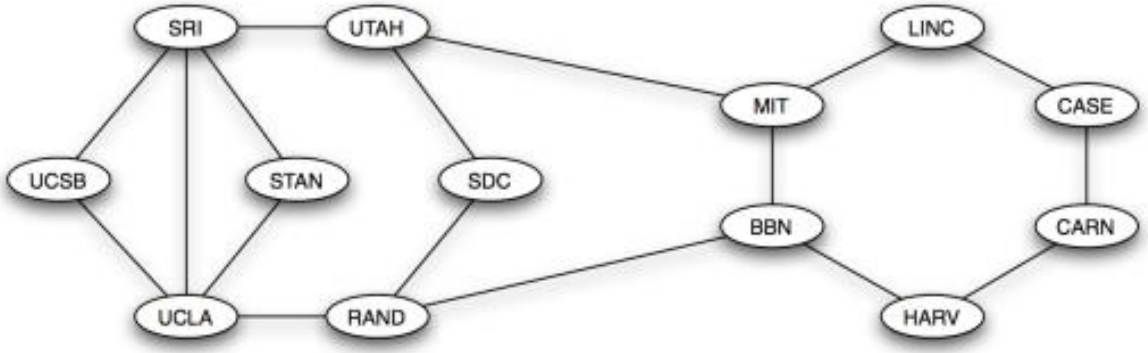
Distanze

- La *distanza* tra una coppia di nodi è la lunghezza del cammino minimo che li unisce
  - Utilizzando il concetto di lunghezza di un cammino, possiamo parlare nodi vicini o lontani in un grafo.
- Il *diametro* di un grafo è la più grande distanza tra coppie di nodi del grafo
  - Qual è la distanza tra MIT e SDC?
  - Qual è il diametro della rete?



Calcolo delle distanze minime

- Dato un grafo, come troviamo le distanze minime *da un nodo a tutti gli altri*?
  - Abbiamo bisogno di un metodo sistematico per determinare le distanze
- Come possiamo approcciare il problema?
  - Una possibilità è la ricerca breadth-first

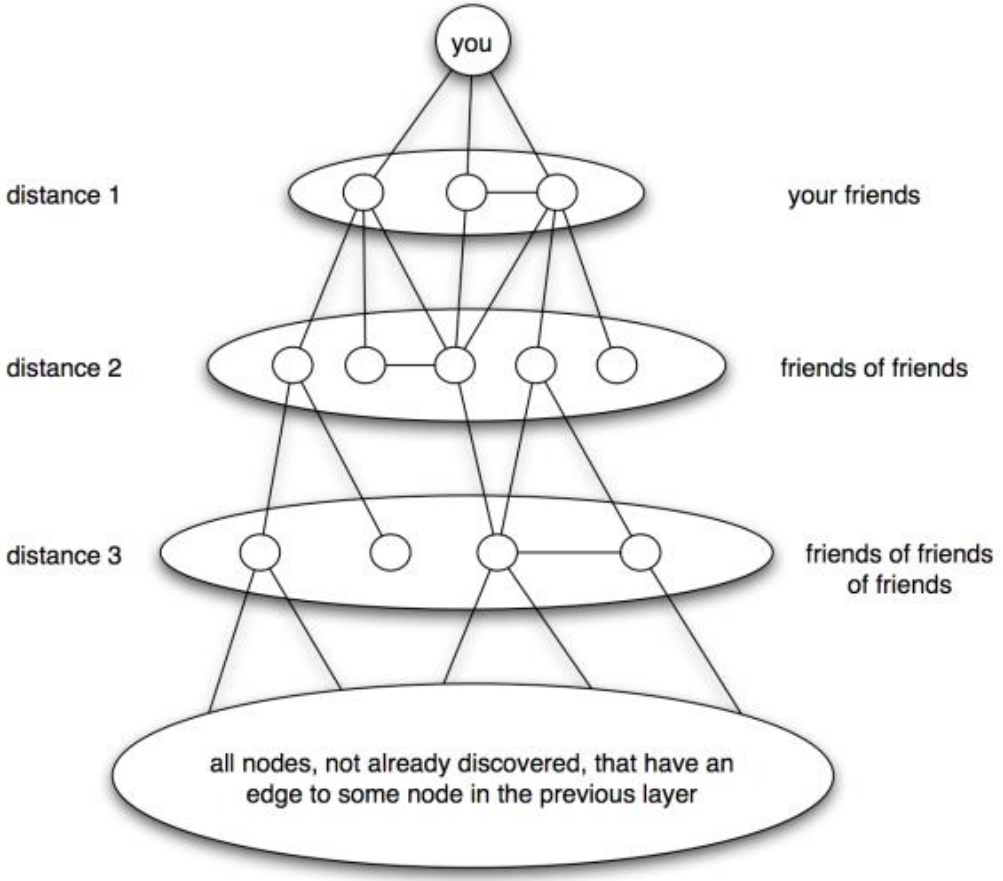


Breadth-first search (BFS)

- Dal nodo sorgente(*root*)
  - Trova tutti i nodi direttamente connessi
    - Questi sono i nodi a “distanza 1“
  - Trova tutti i nodi che sono direttamente connessi ai nodi a distanza 1 e che non sono ancora stati visitati
    - Questi sono i nodi a “distanza 2“
  - ...
  - Trova tutti i nodi che sono direttamente connessi a nodi a distanza j e che non sono già stati visitati
    - Questi nodi sono a distanza *j*+1“

BFS

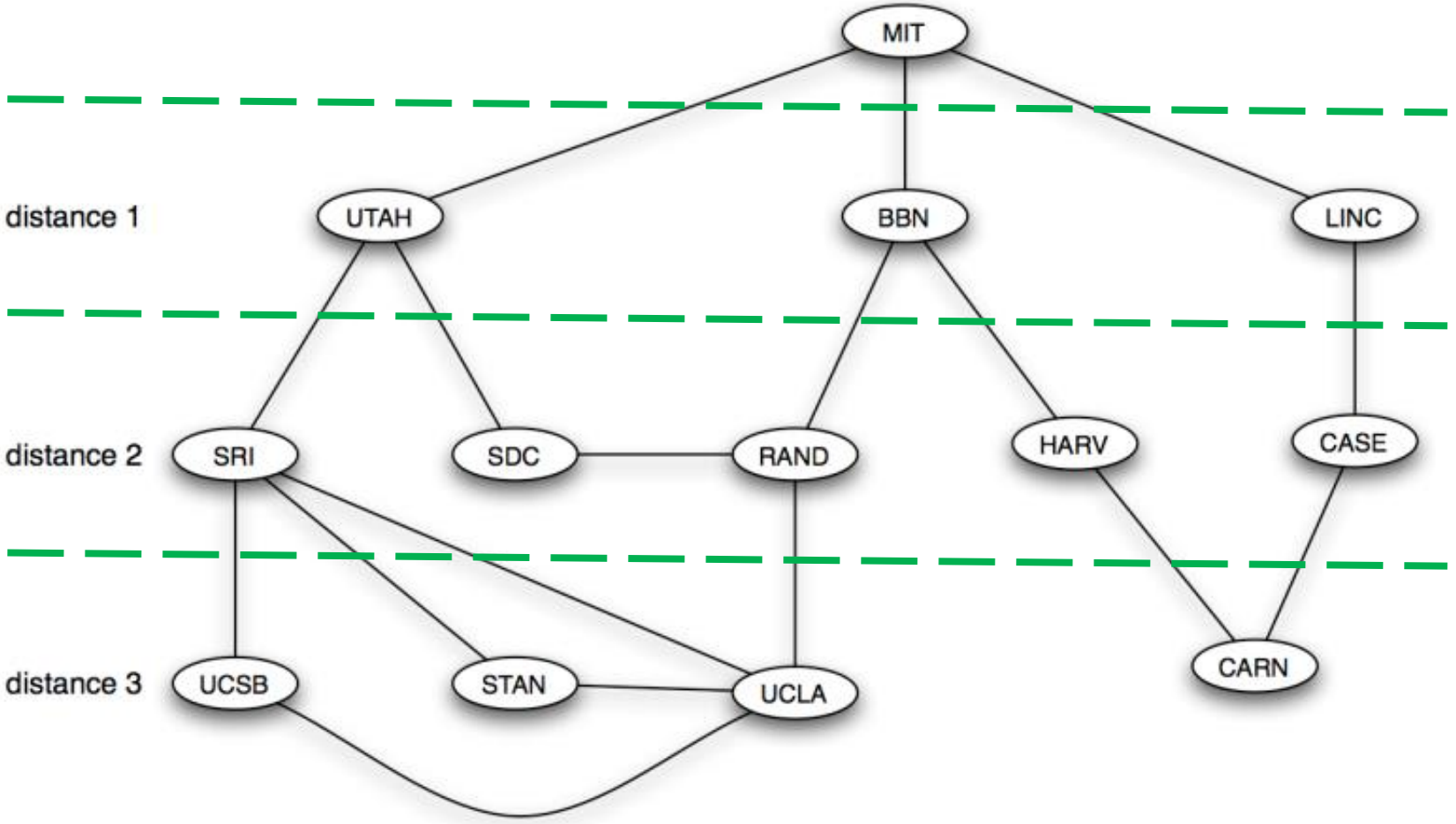
- scopre distanze tra i nodi, un *layer (strato)* alla volta



- ogni layer è costituito dai nodi che hanno un almeno un vicino nello strato precedente.

BFS sul Grafo di Arpanet

(dicembre 1970) partendo da MIT



BFS: ALGORITMO

1) Dichiara tutti i tuoi amici essere a distanza 1.

2) Trova tutti i loro amici (senza contare quelli che sono già amici tuoi), e dichiara che questi sono a distanza di 2.

3) Trova tutti i loro amici (di nuovo, senza contare le persone già trovate ad una distanza ≤ 2) e dichiarale essere a distanza di 3.

4) Continua in questo modo; effettuando la ricerca in strati successivi, ciascuno rappresentante la distanza successiva.

Ogni nuovo livello è costruito da tutti quei nodi che

-- non sono già stati scoperti in strati precedenti, e

-- hanno un vicino nello strato precedente.

Small world phenomenon

- *Il mondo appare "piccolo" se si pensa a quanto breve possa essere un percorso di amici per arrivare da voi a quasi chiunque altro.*

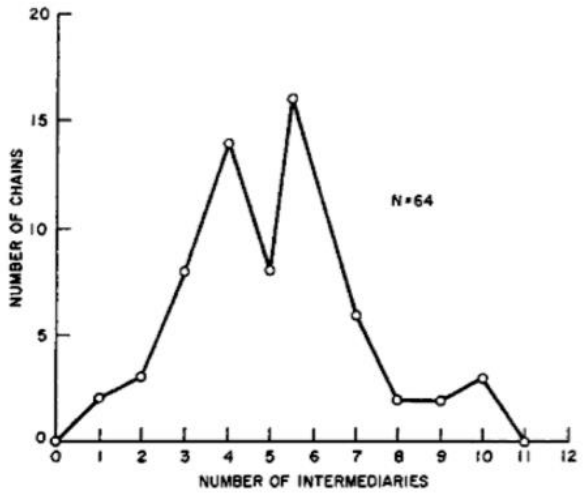
Small world phenomenon

- *Il mondo appare "piccolo" se si pensa a quanto breve possa essere un percorso di amici per arrivare da voi a quasi chiunque altro.*

- Primo esperimento condotto da Stanley Milgram negli anni 1960
  - A 296 persone scelte a caso negli USA fu stato chiesto di far arrivare una lettera ad un certo destinatario spedendola ad una persona che conoscevano direttamente
    - Ogni partecipante conosceva un profilo del destinatario (residenza, occupazione, tipo di studi, città di origine, ecc.)
    - è stato valutato il numero medio di passaggi delle lettere

Sei Gradi di Separazione

- Nell'esperimento di Milgram 64 lettere arrivarono a diestinazione con una lunghezza media del percorso inferiore a 6



- Diversi esperimenti sono stati condotti che confermano i risultati di Milgram
- Grandi reti sociali hanno distanze ''brevi''

Clustering

Il ***coefficiente di clustering*** indica quanto i vicini di un dato nodo sono connessi tra loro.

Per un nodo i di grado k_i il coefficiente di **clustering locale** è definito come

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$$

dove L_i è il numero di edge esistenti tra i vicini del nodo i.

- C_i è sempre compreso tra 0 e 1:
  - $C_i = 0$ se tutti i vicini di i sono indipendenti tra loro.
  - $C_i = 1$ se i vicini del nodo i formano un grafo completo
- C_i rappresenta la probabilità che due vicini di i scelti a caso siano connessi da edge
- In sintesi, C_i misura la densità collegamento locale della rete: più il vicinato di i è densamente interconnesso, maggiore è il suo coefficiente di clustering locale

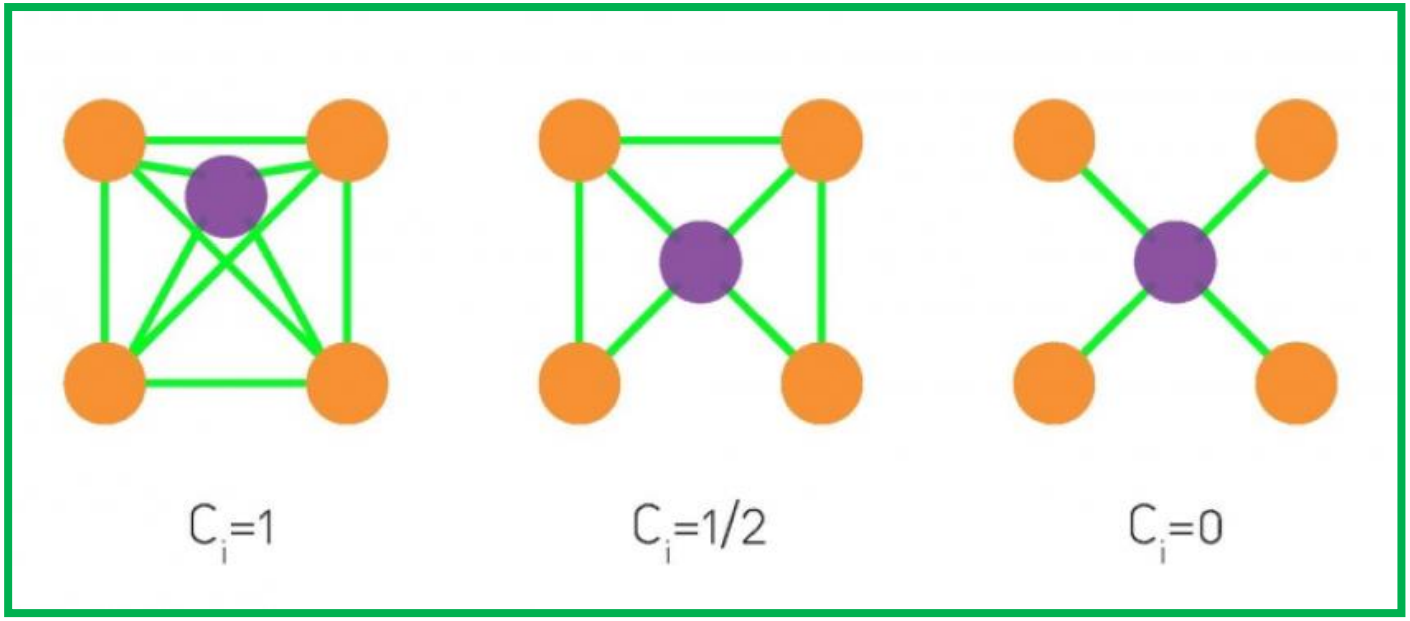
Clustering

Il ***coefficiente di clustering*** indica quanto i vicini di un dato nodo sono connessi tra loro.

Per un nodo i di grado k_i il coefficiente di **clustering locale** è definito come

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$$

dove L_i è il numero di edge esistenti tra i vicini del nodo i.



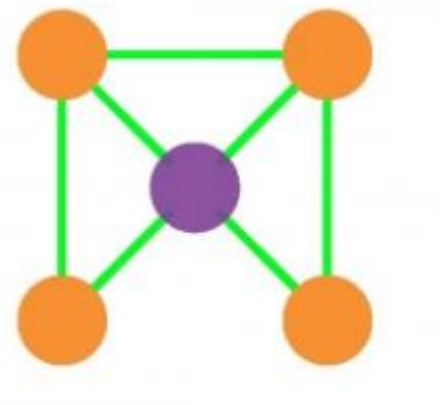
Clustering

Il ***coefficiente di clustering*** di un'intera rete viene catturato dal coefficiente di clustering medio

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$$

che rappresenta la media dei coefficienti di clustering locali C_i ,sui nodi $i = 1, \ldots, N$,

<C> rappresenta la probabilità che selezionando casualmente due vicini di un qualche nodo, questi hanno un edge che li connette.



(1/2+2/3 + 2/3 + 1 +1)/5=19/30

Network Data-Sets

La ricerca sulle reti su larga scala è stato alimentato in larga misura dalla crescente disponibilità di set di dati dettagliati di reti di grandi dimensioni

- Principali data-sets disponibili in rete su network di grandi dimensioni
  - Grafi di Collaborazioni
    - Wikipedia, World of Warcraft, Citation graphs
  - Grafi chi-parla-con-chi
    - Microsoft IM, Cell phone graphs
  - Reti di informazioni
    - Hyperlinks
  - Reti tecnologiche
    - Power grids, communication links, Internet
  - Reti naturali e biologiche
    - Food webs, neural interconnections, cell metabolism

- Leskovec‘s SNAP a Stanford ha un repository di dati su reti di grandi dimensioni
  - http://snap.stanford.edu/data

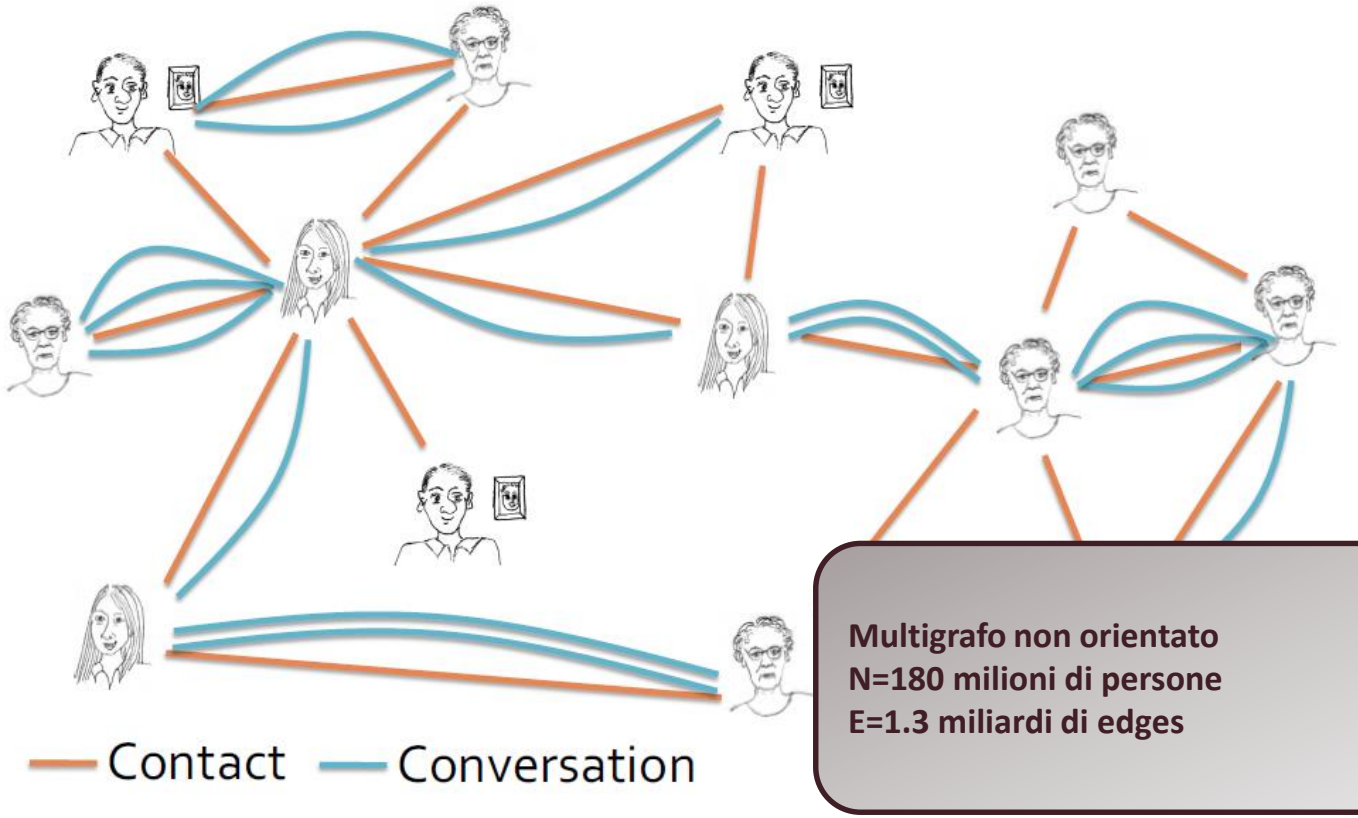
MESSENGER

MSN Messenger.

- 1 month activity
  - 245 million users logged in
  - 180 million users engaged in conversations
  - More than 30 billion conversations
  - More than 255 billion exchanged messages

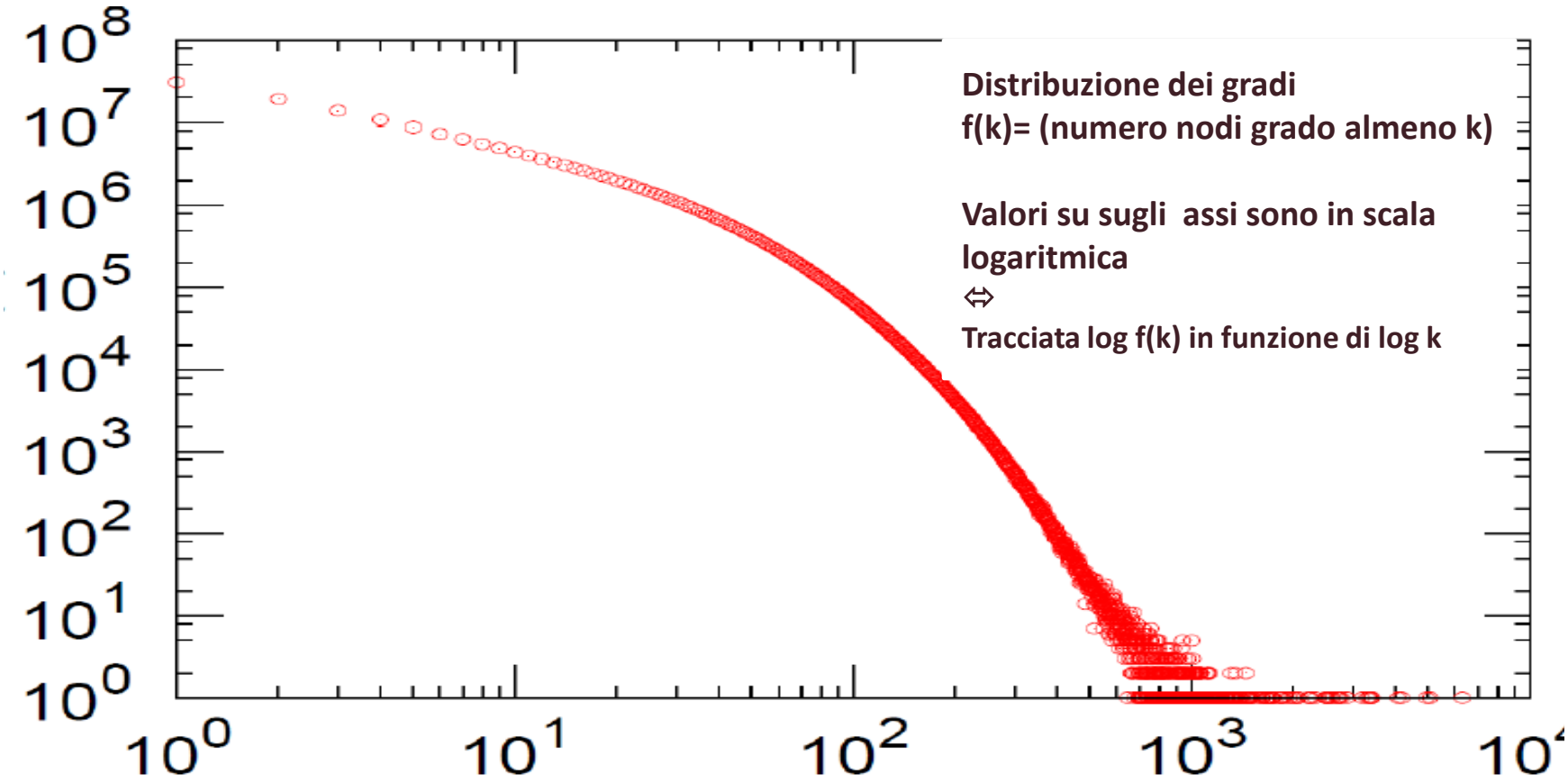
Dati: J. Leskovec, Stanford Univ.

MESSENGER



Multigrafo non orientato
N=180 milioni di persone
E=1.3 miliardi di edges

MESSENGER



Distribuzione dei gradi
f(k)= (numero nodi grado almeno k)

Valori su sugli assi sono in scala logaritmica
⇔
Tracciata log f(k) in funzione di log k

MESSENGER

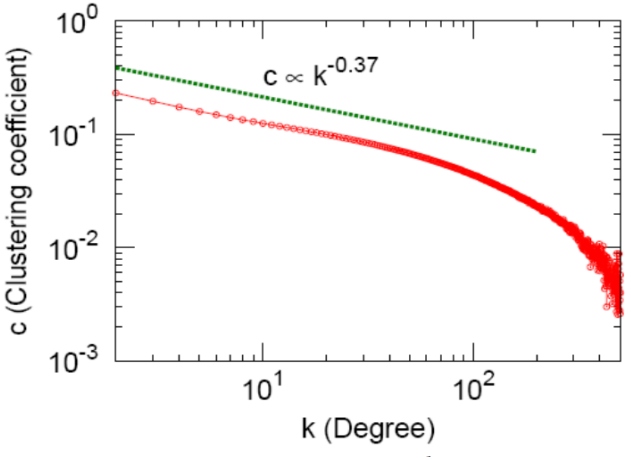
Coefficiente di clustering medio 0.114

Coefficiente di clustering dei nodi di grado k

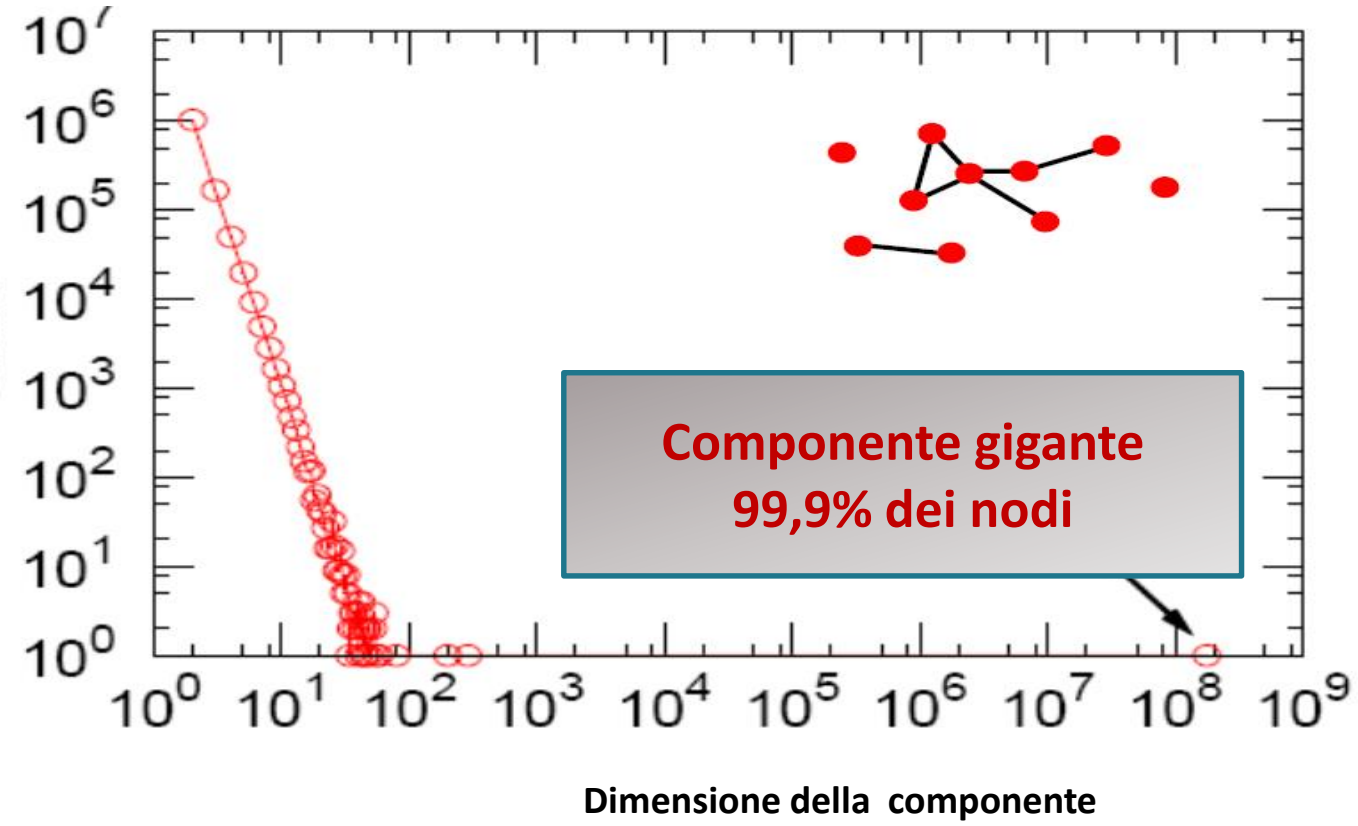
$$C_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i:k_i=k} C_i$$

dove
N_k= numero nodi di grado k

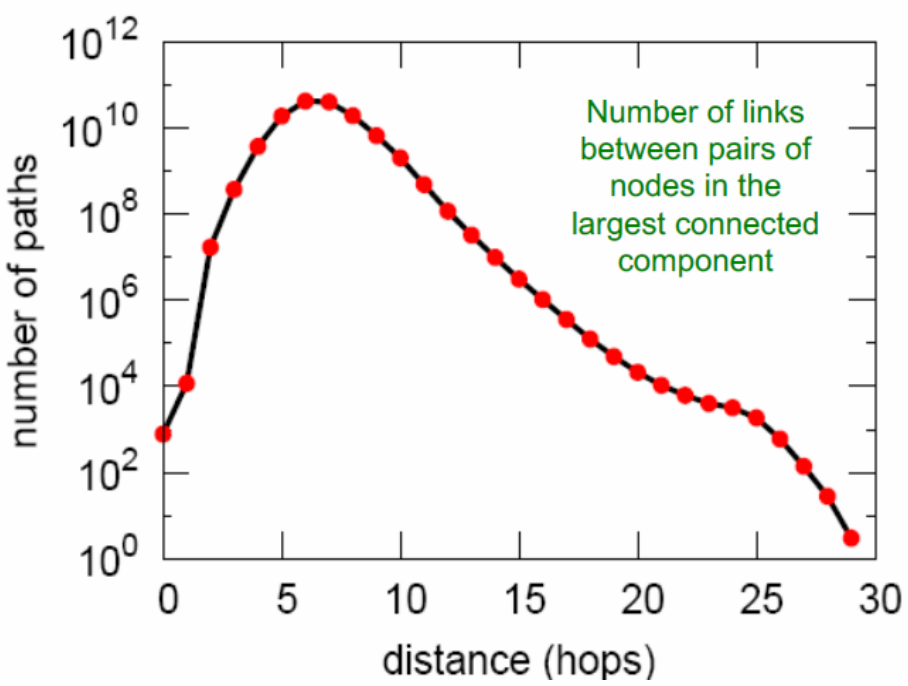
Nodo i ha grado k_i e coefficiente di clustering C_i



MESSENGER


Numero di componenti
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8 10^9
Componente gigante
99,9% dei nodi
Dimensione della componente

MESSENGER



Distanza media 6,6
90% delle coppie a distanza <8

nodes as we do BFS out of a random node

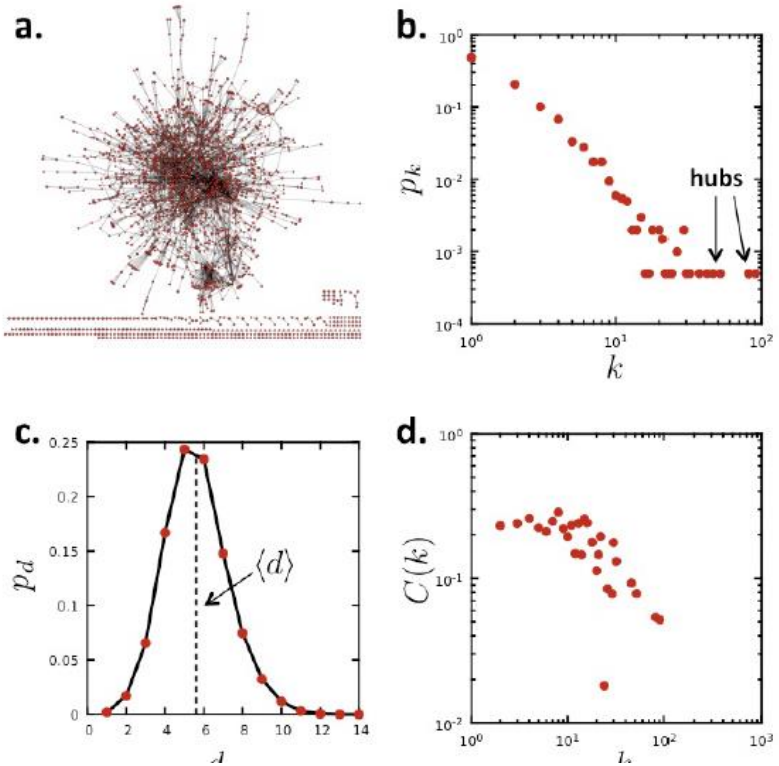
Steps	#Nodes
0	1
1	10
2	78
3	3,96
4	8,648
5	3,299,252
6	28,395,849
7	79,059,497
8	52,995,778
9	10,321,008
10	1,955,007
11	518,410
12	149,945
13	44,616
14	13,740
15	4,476
16	1,542
17	536
18	167
19	71
20	29
21	16
22	10
23	3
24	2
25	3

MESSENGER

Ricapitolando

- **Distribuzione dei gradi: molto sbilanciata con grado medio 14,4**
- **Distanza media: 6,6**
- **Coefficiente di clustering 0.11**
- **Componenti: presenza della componente gigante**

PPI (Protein-Protein Interaction) Network



a. Undirected network
N=2,018 proteins as nodes
E=2,930 binding interactions as links.

b. Degree distribution:
Skewed. Average degree <k>=2.90

c. Diameter:
Avg. path length = 5.8

d. Clustering:
Avg. clustering = 0.12

Connectivity: 185 components
the largest component 1,647 nodes (81% of nodes)

Caratteristiche principali delle reti reali

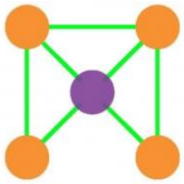
Giant component

esistenza componente connessa ‘’molto grande’’

Coefficiente Clustering $\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$ **elevato**

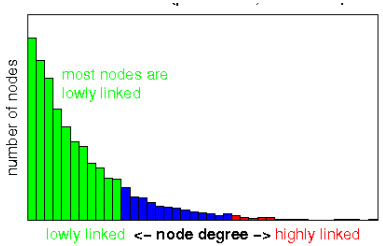
Dove $C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$, k_i è il grado del nodo i, L_i è il numero di edge tra i vicini di i.

<C> rappresenta la probabilità che selezionando casualmente due vicini di un qualche nodo, questi hanno un edge che li connette.



(1/2+2/3 + 2/3 + 1 +1)/5=19/30

Distribuzione dei gradi: con una lunga coda



Lunghezza dei cammini

Ricapitolando

Che cosa vogliamo ottenere dallo studio delle reti?

- **Proprietà** statistiche dei dati di rete
- **Modelli e principi e di progettazione**
  - Comprendere perché le reti sono organizzate nel modo in cui sono
  - Prevedere il comportamento di sistemi networked

Come si fa a ragionare su reti?

- **Empirico:** studiare i dati di rete per trovare principi organizzativi
  - Metodi per misurare e quantificare le reti?

- **Modelli matematici:** teoria dei grafi e modelli statistici
  - I modelli ci permettono di capire i comportamenti e distinguere tra fenomeni attesi e sorprendenti

- **Algoritmi per l'analisi dei grafi**
  - Difficili sfide computazionali

Ricapitolando
Vedremo

Modelli

- Erdös-Renyi
- Small-world
- Preferential attachment
- Independent cascade (modello di diffusione)

Algoritmi

- Community detection: metodi e modularità
- Ricerca decentralizzata,
- PageRank,
- Massimizzazione dell'influenza