Programmazione dinamica (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2021-22

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

1

1

Paradigmi della Progettazione degli Algoritmi

- Greedy. Costruisci una soluzione in modo incrementale, ottimizzando (in modo miope) un certo criterio locale.
- Divide-and-conquer. Suddividi il problema in sottoproblemi, risolvi ciascun sottoproblema indipendentemente e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione del problema di partenza.
- Programmazione dinamica. Suddividi il problema in un insieme di sottoproblemi che si sovrappongono, cioè che hanno dei sottoproblemi in comune. Costruisci le soluzioni a sottoproblemi via via sempre più grandi **in modo da computare la soluzione di un dato sottoproblema un'unica volta**.
- Nel divide and conquer, se due sottoproblemi condividono uno stesso sottoproblema quest'ultimo viene risolto più volte.

Progettazione di Algoritmi A.A. 2021-22
A. De Bonis

2

2

Storia della programmazione dinamica

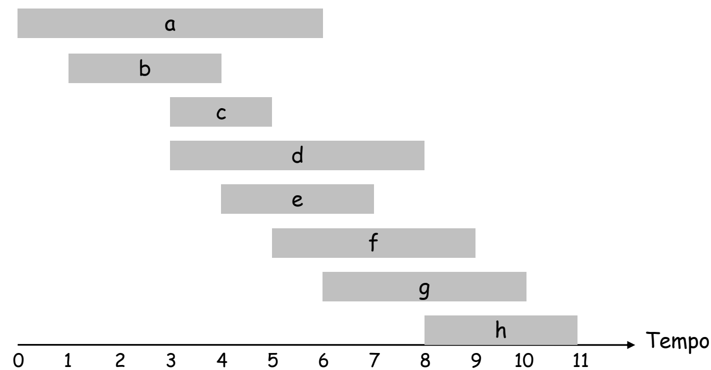
- Bellman. Negli anni '50 è stato il pionere nello studio sistematico della programmazione dinamica.
- Etimologia.
  - Programmazione dinamica = pianificazione nel tempo.

Applicazioni della programmazione dinamica

Aree.
- Bioinformatica.
- Teoria dell'informazione
- Ricerca operativa
- Informatica teorica
- Computer graphics
- Sistemi di Intelligenza Artificiale

Interval Scheduling Pesato

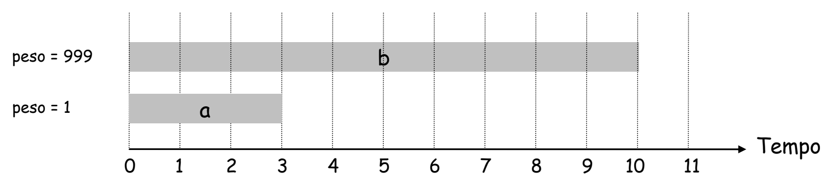
Interval scheduling con pesi
- Job j: comincia al tempo s_j, finisce al tempo f_j, ha associato un valore (peso) v_j .
- Due job sono compatibili se non si sovrappongono
- Obiettivo: trovare il sottoinsieme di job compatibili con il massimo peso totale .



Interval scheduling senza pesi

- L'algoritmo greedy Earliest Finish Time funziona quando tutti i pesi sono uguali ad 1.
- Considera i job in ordine non decrescente dei tempi di fine
- Seleziona un job se è compatibile con quelli già selezionati

Osservazione. L'algoritmo greedy Earliest Finish Time può fallire se i pesi dei job sono valori arbitrari.

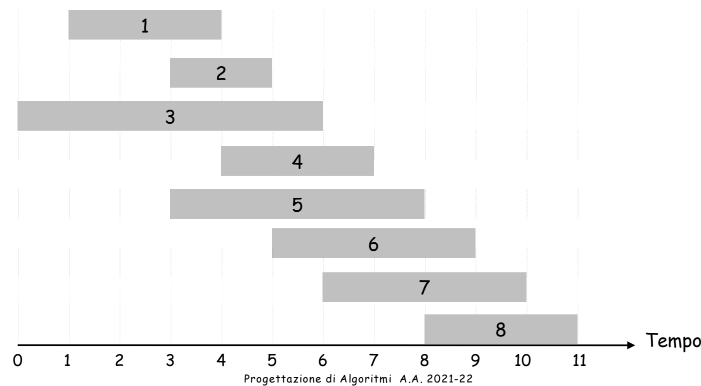


Interval Scheduling Pesato

Notazione. Etichettiamo i job in base al tempo di fine : $f_1 \leq f_2 \leq . . . \leq f_n$.

Def. p(j) = il più grande indice i < j tale che i è compatibile con j

Ex: p(8) = 5, p(7) = 3, p(2) = 0.



Interval Scheduling Pesato: soluzione basata sulla PD

Notazione. OPT(j) = valore della soluzione ottima per l'istanza del problema dell'Interval Scheduling Pesato costituita dalle j richieste con i j tempi di fine più piccoli

Si possono verificare due casi:

- *Caso 1*: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli include il job j.
  - In questo caso la soluzione non può usare i job incompatibili { p(j) + 1, p(j) + 2, ..., j - 1 }
  - Deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato **per** i job 1, 2, ..., p(j)

- *Caso 2*: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli non contiene il job j.
  - In questo caso la soluzione deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato per i job 1, 2, ..., j-1

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \max \{ v_j + OPT(p(j)), \; OPT(j-1) \} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Interval Scheduling Pesato: soluzione basata sulla PD

N.B.

- Quando viene detto che la soluzione per i primi j job con il tempo di fine piu` piccolo deve includere la soluzione ottima per i job 1, 2, …, p(j) (nel caso 1) o quella per i job 1, 2, …, j-1 (nel caso 2), NON vuol dire che la soluzione deve includere necessariamente tutti i job 1, 2, …, p(j) nel caso 1 e i job 1,2,…,j-1, nel caso 2.

- Quando si deriva la formula di ricorrenza per calcolare il valore della soluzione ottima di un problema non si deve MAI
  - fare riferimento agli algoritmi usati per calcolare il valore della soluzione ottima: sono gli algoritmi ad usare la formula, non è la formula ad essere costruita sulla base dell'algoritmo!
  - ragionare in modo iterativo nella derivazione della formula

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo **inefficiente**

- Inizialmente Compute-Opt viene invocato con j=n

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Compute-Opt(j) {
   if (j = 0)
      return 0
   else
      return max(vj + Compute-Opt(p(j)), Compute-Opt(j-1))
}
```

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

L'algoritmo computa correttamente OPT(j)

Dim per induzione.

- **Caso base** j=0. Il valore restituito è correttamente 0.
- **Passo Induttivo.** Consideriamo un certo j>0 e supponiamo (ipotesi induttiva) che l'algoritmo produca il valore corretto di OPT(i) per ogni i<j.
- Il valore computato per j dall'algoritmo è

`Compute-Opt(j)= max(`v_j` + Compute-Opt(p(j)),Compute-Opt(j-1))`

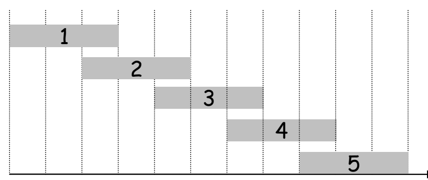
- Siccome per ipotesi induttiva
- `valore computato da Compute-Opt(p(j))= OPT(p(j))` **e**
- `valore computato da Compute-Opt(j-1)= OPT(j-1)`

- allora ne consegue che
- `Compute-Opt(j)= max(`v_j` + OPT(p(j)), OPT(j-1))= OPT(j)`

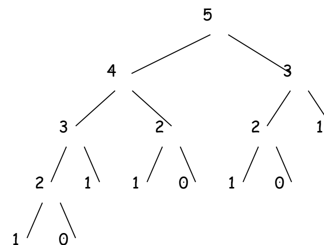
per la relazione di ricorrenza

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

- Osservazione. L'algoritmo ricorsivo corrisponde ad un algoritmo di forza bruta perchè ha tempo esponenziale
  - Ciò è dovuto al fatto che
    - ✓ Un gran numero di sottoproblemi sono condivisi da più sottoproblemi
    - ✓ L'algoritmo computa più volte la soluzione ad uno stesso sottoproblema.
- **Esempio**. In questo esempio il numero di chiamate ricorsive cresce come i numeri di Fibonacci.



P(1) = 0, p(2)=0 e p(j) = j-2 per ogni j>1



- N(j)= numero chiamate ricorsive per j.
- Per ogni j>1 si ha N(j)=N(j-1)+N(j-2)

Interval Scheduling Pesato: Memoization

- Osservazione: l'algoritmo ricorsivo precedente computa la soluzione di n+1 sottoproblemi soltanto OPT(0),…,OPT(n). Il motivo dell'inefficienza dell'algoritmo è dovuto al fatto che computa la soluzione ad uno stesso problema più volte.
- Memoization. Consiste nell'immagazzinare le soluzioni di ciascun sottoproblema in un'area di memoria accessibile globalmente.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.
Compute p(1), p(2), …, p(n)

for j = 1 to n
   M[j] = empty     ← array globale

M-Compute-Opt(j) {
   if j = 0 Return 0
   if (M[j] is empty)
      M[j] = max(vj + M-Compute-Opt(p(j)), M-Compute-Opt(j-1))
   return M[j]
}
```

13

13

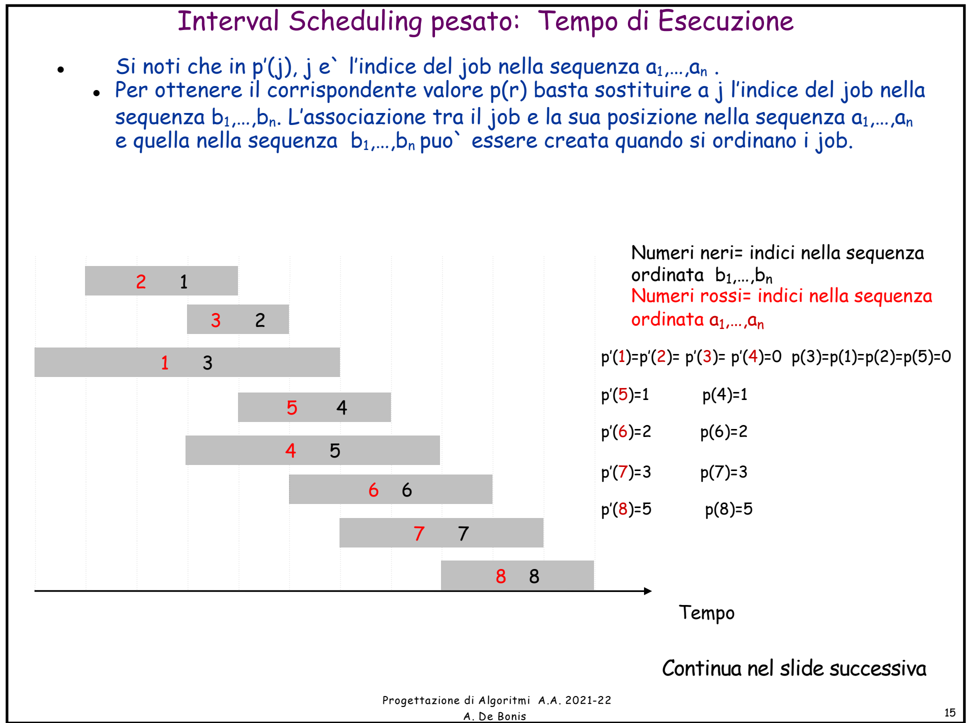
Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione. La versione "memoized" dell'algoritmo ha tempo di esecuzione O(n log n).

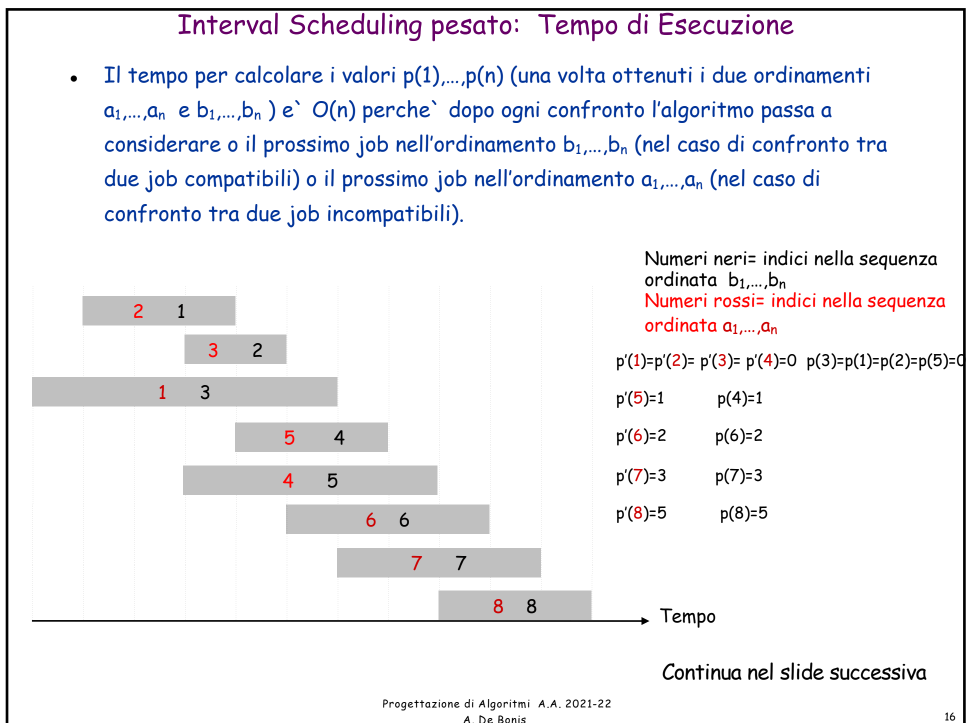
Fase di inizializzazione: O(n log n)

- Ordinamento in base ai tempi di fine: O(n log n).
- Computazione dei valori p(·): O(n) dopo aver ordinato i job (rispetto ai tempi di inizio e di fine). Siano $a_1,\dots,a_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di inizio e $b_1,\dots,b_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di fine. (si noti che il job con l'i-esimo tempo di inizio non corrisponde necessariamente a quello con l'i-esimo tempo di fine)
  - Si confronta il tempo di fine di b_1 con i tempi di inizio di $a_1,a_2,a_3\dots$, fino a che non si incontra un job a_j con tempo di inizio $\geq f_1$. Si pone $p'(1)=p'(2)=\dots=p'(j-1)=0$. Si confronta il tempo di fine di b_2 con i tempi di inizio di $a_j,a_{j+1},a_{j+2}\dots$, fino a che non si incontra un job a_k con tempo di inizio $\geq f_2$. Si pone $p'(j)=p'(j+1)=p'(j+2)=\dots=p'(k-1)=1$. Si confronta il tempo di fine di b_3 con i tempi di inizio di $a_k,a_{k+1},a_{k+2}\dots$, fino a che non si incontra un job a_m con tempo di inizio $\geq f_3$. Si pone $p'(k)=p'(k+1)=p'(k+2)=\dots=p'(m-1)=2$, e cosi` via.

Continua nel slide successiva



15



16

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione: `M-Compute-Opt(n)` richiede O(n)
Dim.

- `M-Compute-Opt(j)`: escludendo il tempo per le chiamate ricorsive, ciascuna invocazione prende tempo O(1) e fa una delle seguenti cose
  - (i) restituisce il valore esistente di `M[j]`
  - (ii) riempie l'entrata `M[j]` facendo due chiamate ricorsive
- Per stimare il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(j)` dobbiamo stimare il numero totale di chiamate ricorsive innescate da `M-Compute-Opt(j)`
  - Abbiamo bisogno di una misura di come progredisce l'algoritmo
  - Misura di progressione Φ = # numero di entrate non vuote di `M[]`.
  - inizialmente Φ = 0 e durante l'esecuzione si ha sempre $\Phi \leq$ n.
  - per far crescere Φ di 1 occorrono al piu` 2 chiamate ricorsive.
  - quindi per far andare Φ da 0 a j, occorrono al piu` 2j chiamate ricorsive per un tempo totale di O(j)
- Il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(n)` e` quindi O(n).

N.B. O(n), una volta ordinati i job in base ai valori di inizio.

Memoization nei linguaggi di programmazione

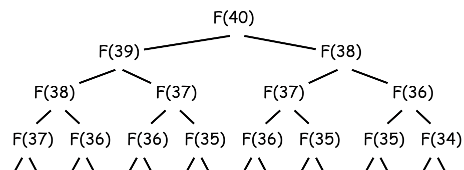
- Automatica. Molti linguaggi di programmazione funzionale, quali il Lisp, prevedono un meccanismo per rendere automatica la memoization

```
(defun F (n)
  (if
    (<= n 1)
    n
    (+ (F (- n 1)) (F (- n 2)))))
```

Lisp (efficiente)

```
static int F(int n) {
   if (n <= 1) return n;
   else return F(n-1) + F(n-2);
}
```

Java (esponenziale



Interval Scheduling Pesato: Trovare una soluzione

- Domanda. Gli algoritmi di programmazione dinamica computano il valore ottimo. E se volessimo trovare la soluzione ottima e non solo il suo valore?
- Risposta. Facciamo del post-processing (computazione a posteriori).

```
Run M-Compute-Opt(n)
Run Find-Solution(n)

Find-Solution(j) {
   if (j = 0)
      output nothing
   else if (vj + M[p(j)] > M[j-1])
      Find-Solution(p(j))
      print j
   else
      Find-Solution(j-1)
}
```


Interval Scheduling Pesato: Bottom-Up

Programmazione dinamica bottom-up
Per capire il comportamento dell'algoritmo di programmazione dinamica e` di aiuto formulare una versione iterativa dell'algoritmo.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Iterative-Compute-Opt {
   M[0] = 0
   for j = 1 to n
      M[j] = max(vj + M[p(j)], M[j-1])
}
```

Correttezza: Con l'induzione su j si puo` dimostrare che ogni entrata M[j] contiene il valore OPT(j)
Tempo di esecuzione: n iterazioni del for, ognuna della quali richiede tempo O(1) →tempo totale O(n)

Esercizio

- Si forniscano i valori p(j) per la seguente istanza del problema dell'Interval Scheduling Pesato.

s1=7 f1 =10 v1=5

s2=10 f2=14 v2=13

s3=8 f3=11 v3=2

s4=6 f4=9 v4=4

- Si fornisca poi l'array M dei valori M[j] calcolati dall'algoritmo di programmazione dinamica per Interval Scheduling Pesato. Alla fine si fornisca il valore della soluzione ottima e si contrassegnino con un cerchio le entrate su cui viene invocato l'algoritmo che stampa la soluzione ottima.

Attenzione: gli indici j di p(j) e M[j] non corrispondono necessariamente agli indici j dei valori input sj , fj e vj .

21

Esercizio

Soluzione

s1=7 f1 =10 v1=5

s2=10 f2=14 v2=13

s3=8 f3=11 v3=2

s4=6 f4=9 v4=4

Riordiniamo i job in base ai tempi di fine (indico con s, f, v i parametri indicizzati con la posizione del job nell'ordinamento).

s1=6 f1= 9 v1=4 (ex 4) p(1)=0 M[1]=max{M[0],v1+M[0]}=v1+M[0]=4

s2=7 f2 =10 v2=5 (ex 1) p(2)=0 M[2]=max{M[1],v2+M[0]}=max{4,5+0}=5

s3=8 f3=11 v3=2 (ex 3) p(3)=0 M[3]=max{M[2],v3+M[0]}=max{5,2+0}=5

s4=10 f4=14 v4=13 (ex 2) p(4)=2 M[4]=max{M3],v4+M[2]}=max{5,18}=18

M	(0)	4	(5)	5	(18)
	0	1	2	3	4

stampa nell'ordine

2 4

22