Una nota sulle notazioni asintotiche

1

- siano f(n) e g(n) due funzioni a valori positivi
- f(n)=O(g(n)) **non implica necessariamente** lim f(x)/g(x) =0 (limite per x che va all'infinito)
- f(n)=O(g(n)) implica solo l'esistenza di una costante c >0 e di una costante n_0 ≥0 per cui si ha f(n)/g(n) ≤ c per ogni n≥n_0
- lim f(x)/g(x) =0 invece vuol dire che per ogni costante ε>0 (comunque piccola) esiste una costante x_0 ≥0 (x_0 puo` dipendere solo da ε) per cui f(x)/g(x) < ε per ogni x ≥x_0
- Esempio: $3n^2+n=O(n^2)$ ma $\lim(3x^2+x)/x^2 \neq 0$.
- Viceversa lim f(x)/g(x) =0 → f(n)=O(g(n))

2

- siano f(n) e g(n) due funzioni a valori positivi
- $f(n)=\Omega(g(n))$ non implica necessariamente lim $f(x)/g(x) = \infty$ (limite per x che va all'infinito)
- $f(n)= \Omega(g(n))$ implica solo l'esistenza di una costante $c > 0$ e di una costante $n_0 \geq 0$ per cui si ha $f(n)/g(n) \geq c$ per ogni $n \geq n_0$
- lim $f(x)/g(x) = \infty$ invece vuol dire che per ogni costante $M>0$ (comunque grande) esiste una costante $x_0 \geq 0$ (x_0 puo` dipendere solo da M) per cui $f(x)/g(x) > \varepsilon$ per ogni $x \geq x_0$
- Esempio: $3n^2+n= \Omega(n^2)$ ma $\lim(3x^2+x)/x^2 \neq \infty$.
- Viceversa lim $f(x)/g(x) = \infty \rightarrow f(n)=\Omega(g(n))$

3

notazione «o piccolo»

- f(n) e g(n): due funzioni a valori positivi
- **def:** $f(n)=o(g(n))$ se e solo se lim $f(x)/g(x) = 0$
- si dice che f(n) cresce molto piu` lentamente di g(n)
- esempio: $n^2=o(n^3)$
- se $f(n)=o(g(n))$ allora f(n) non è $\Omega(g(n))$ (o equivalentemente g(n) non è $O(f(n))$).
- vediamo che **non** vale $f(n) = \Omega(g(n))$
- lim $f(x)/g(x) = 0 \rightarrow$ per ogni costante $\varepsilon>0$ (comunque piccola) esiste una costante $x_0 \geq 0$ (x_0 puo` dipendere solo da ε) per cui $f(x)/g(x) < \varepsilon$ per ogni $x \geq x_0$
- non è quindi possibile trovare una costante $c > 0$ ed una costante $n_0 \geq 0$ per cui si ha $f(n)/g(n) \geq c$ per ogni $n \geq n_0$

4

notazione «omega piccolo»

- f(n) e g(n): due funzioni a valori positivi
- **def:** $f(n)=\omega(g(n))$ se e solo se $\lim f(x)/g(x) = \infty$
- si dice che f(n) cresce molto piu` velocemente di g(n)
- Ovviamente $f(n)= \omega(g(n))$ se e solo se $g(n)=o(f(n))$
- esempio: $n^3=\omega(n^2)$
- se $f(n)= \omega(g(n))$ allora f(n) non è O(g(n)) (o equivalentemente g(n) non è $\Omega(f(n))$).

- vediamo che **non** vale f(n) = O(g(n))
  - $\lim f(x)/g(x) = \infty$ → per ogni costante M>0 (comunque grande) esiste una costante $x_0 \geq 0$ (x_0 puo` dipendere solo da M) per cui $f(x)/g(x) > M$ per ogni $x \geq x_0$
  - non è quindi possibile trovare una costante c >0 ed una costante $n_0 \geq 0$ per cui si ha $f(n)/g(n \leq c$ per ogni $n \geq n_0$

5

Esempio visto in classe

- A lezione abbiamo confrontato $f(n)=n^{n/2}$ con $g(n)=n!$
- Abbiamo prima provato che vale $n!>n^{n/2}$ per ogni n>1 e questo implica che $n^{n/2}=O(n!)$ (cio` è equivalente a dire che $n! =\Omega(n^{n/2})$)

- Un esercizio d'esame pero` chiedeva se $n^{n/2}=\Omega(n!)$ o equivalentemente se $n!=O(n^{n/2})$
- Abbiamo fatto vedere che cio` è falso scrivendo n! (per n≥6) come segue:

🌵 $1*(2*3*\ldots*n/2-1)*(n/2*(n/2+1)*\ldots.*n) \geq (2^{n/2-2})(n/2)^{n/2+1}= 1/8\,(n^{n/2+1})= 1/8\,(n\, n^{n/2})$

★Da cio` si vede che $n! = \Omega(nn^{n/2})$ (basta prendere c=1/8 e $n_0=6$)

- Osserviamo che $\lim (n\, n^{n/2})/(n^{n/2}) =\infty$. In base alle definizioni precedenti, diciamo che la funzione $nn^{n/2}$ è $\omega(n^{n/2})$ o equivalentemente la funzione $n^{n/2}$ è $o(nn^{n/2})$.

☼ Di conseguenza, $nn^{n/2}$ non è $O(n^{n/2})$, o equivalentemente $n^{n/2}$ non è $\Omega(nn^{n/2})$.

- Siccome la ★ ci dice che che $n! = \Omega(nn^{n/2})$ allora anche n! non è $O(n^{n/2})$ (o equivalentemente $n^{n/2}$ non è $\Omega(n!)$)
  - se per assurdo cosi non fosse allora si avrebbe $n^{n/2}=\Omega(n!)$ e $n! = \Omega(nn^{n/2})$ e per la transitivita` si avrebbe $n^{n/2}=\Omega(nn^{n/2})$ contraddicendo la ☼
- NB Se n è dispari, usaando [n/2] al posto di n/2 nell'espressione di n! in 🌵 riusciamo comunque a provare che $n! = \Omega(nn^{n/2})$

6