Il paradigma "divide et impera"

La tecnica algoritmica del "divide et impera" consiste nel

- decomporre il problema in un piccolo numero di sotto-problemi, ciascuno dei quali è dello stesso tipo del problema originale ma è definito su un insieme di dati più piccolo rispetto a quello iniziale;
- risolvere **ricorsivamente** ciascun sotto-problema fino a che non si arriva a risolvere sotto-problemi di taglia così piccola da poter essere risolti direttamente (senza effettuare ulteriori chiamate ricorsive);
- combinare le soluzioni dei sotto-problemi al fine di ottenere una soluzione al problema di partenza.

Ordinamento per fusione: MergeSort

L'algoritmo MergeSort ordina in modo non decrescente una sequenza di numeri. L'idea dell'algoritmo è descritta di seguito.

- Se la sequenza contiene due o più elementi, la sequenza viene suddiviso in due parti ciascuna delle quali contiene circa la metà degli elementi
- Le due sottosequenze vengono ordinate ricorsivamente.
- Una volta ordinate, le due sottosequenze vengono fuse in un'unica sequenza ordinata.

MergeSort

Vediamo lo pseudocodice dell'algoritmo MergeSort che ordina un array. L'algoritmo riceve in input un array e due interi che delimitano la parte di array che si desidera ordinare. Inizialmente invochiamo MergeSort con *sinistra* uguale a 0 e *destra* uguale al numero di elementi dell'array -1.

```
MergeSort( a, sinistra, destra ):
  IF (sinistra < destra) {
    centro = (sinistra+destra)/2;
    MergeSort( a, sinistra, centro );
    MergeSort( a, centro+1, destra );
    Merge( a, sinistra, centro, destra );
  }
```

Per calcolare il tempo di esecuzione $T(n)$ dobbiamo tener conto del

- tempo per decomporre il problema in due sottoproblemi : O(1) in quanto occorre solo calcolare il centro
- tempo per eseguire le due chiamate ricorsive: $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$
- tempo per fondere le due sequenze: ?

L'algoritmo Merge

- Possiamo fondere due sequenze ordinate $A =< a_0, \ldots, a_{n-1} >$ e $B =< b_0, \ldots, b_{m-1} >$ in modo da formare un'unica sequenza ordinata in tempo lineare in $n + m$.
- L'idea dell'algoritmo è il seguente:
  1. Scandiamo gli elementi delle due sequenze da sinistra verso destra utilizzando l'indice i per A e l'indice j per B.
  2. Fino a che $i \leq n$ e $j \leq m$, confrontiamo a_i con b_j. Se a_i è minore o uguale di b_j, a_i viene inserito alla fine della sequenza output e i viene incrementato di 1. Se a_i è maggiore di b_j, b_j viene inserito alla fine della sequenza output e j viene incrementato di 1.
  3. Al termine del ciclo precedente se $i \leq n$ trasferiamo uno dopo l'altro gli elementi $a_i, \ldots, a_n$ alla fine della sequenza output; se $j \leq m$ trasferiamo uno dopo l'altro gli elementi $b_j, \ldots, b_m$ alla fine della sequenza output.

L'algoritmo Fusione

- Ogni volta che eseguiamo un confronto tra un elemento di A ed uno di B, viene incrementato uno tra i due indici i e j. Di consequenza l'algoritmo effettua al più $n + m$ confronti.
- Sia $k \leq n + m$ il numero totale di confronti effettuati dall'algoritmo. Al termine di questi confronti, la sequenza output conterrà k elementi e in una delle due sequenze ci saranno $n + m - k$ elementi che dovranno essere trasferiti nella sequenza output.
- Il tempo totale per fondere le due sequenze ordinate è quindi lineare in $k + (n + m - k) = n + m$.

Merge: algoritmo Merge

Vediamo lo pseudocodice dell'algoritmo Merge che fonde due segmenti adiacenti di un array.

- Il primo segmento parte dalla locazione di indice sx e finisce nella locazione di indice cx
- il secondo segmento parte dalla locazione di indice $cx + 1$ e finisce nella locazione di indice dx

```
Merge( a, sx, cx, dx ):
  i = sx; j = cx+1; k = 0;
  WHILE ((i <= cx) && (j <= dx)) {
    IF (a[i] <= a[j]) {
      b[k] = a[i]; i = i+1;
    } ELSE {
      b[k] = a[j]; j = j+1;
    }
    k = k+1;
  }
  FOR ( ; i <= cx; i = i+1, k = k+1)
    b[k] = a[i];
  FOR ( ; j <= dx; j = j+1, k = k+1)
    b[k] = a[j];
  FOR (i = sx; i <= dx; i = i+1)
    a[i] = b[i-sx];
```

Analisi dell'algoritmo MergeSort

Ora che sappiamo qual è il tempo di esecuzione dell'algoritmo Merge possiamo completare l'analisi dell'algoritmo MergeSort. Indichiamo con $T(n)$ il suo tempo di esecuzione per un array input di n elementi. Il tempo $T(n)$ è dato da

- tempo per decomporre il problema in due sottoproblemi : $\Theta(1)$,
- tempo per eseguire le due chiamate ricorsive: $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$,
- tempo per fondere le due sequenze: $cn = \Theta(n)$.

Si ha quindi $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn + c' = O(?)$.

Relazioni di ricorrenza

- Quando un algoritmo contiene una o più chiamate ricorsive a sé stesso, il suo tempo di esecuzione può essere spesso descritto da una *relazione di ricorrenza*.
- Una relazione di ricorrenza consiste in un'uguaglianza o in una disuguaglianza che descrive una funzione in termini dei suoi valori su input più piccoli.
- Esempio:
$$f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 2f(n/3) + 4n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Relazioni di ricorrenza

- Vediamo come si scrive la relazione di ricorrenza che descrive il tempo di esecuzione $T(n)$ di un algorimo basato sulla tecnica del divide et impera per un input di dimensione n.
- Se la dimensione n del problema è minore di una certa costante c, l'algoritmo risolve direttamente il problema (senza effettuare chiamate ricorsive)

$$T(n) \leq c_0, \text{ per una certa costante } c_0 \ .$$

- Per $n > c$, il problema viene suddiviso in sottoproblemi: supponiamo che il problema venga suddiviso in α sottoproblemi, ognuno di dimensione n/β
- L'algoritmo viene invocato ricorsivamente per risolvere ciascuno di questi α sottoproblemi
- Le α soluzioni per questi sottoproblemi vengono ricombinate per ottenere la soluzione al problema originario.

Relazioni di ricorrenza

- Supponiamo che l'algoritmo impieghi al più tempo $d(n)$ per suddividere il problema di partenza in α sottoproblemi.
- Supponiamo che l'algoritmo impieghi al più tempo tempo $r(n)$ per ricombinare le soluzioni degli α sottoproblemi.
- Il tempo di esecuzione $T(n)$ per $n > c$ può essere descritto dalla relazione:

$$T(n) \leq \alpha T(n/\beta) + d(n) + r(n)$$

- Quindi possiamo scrivere la relazione di ricorrenza:

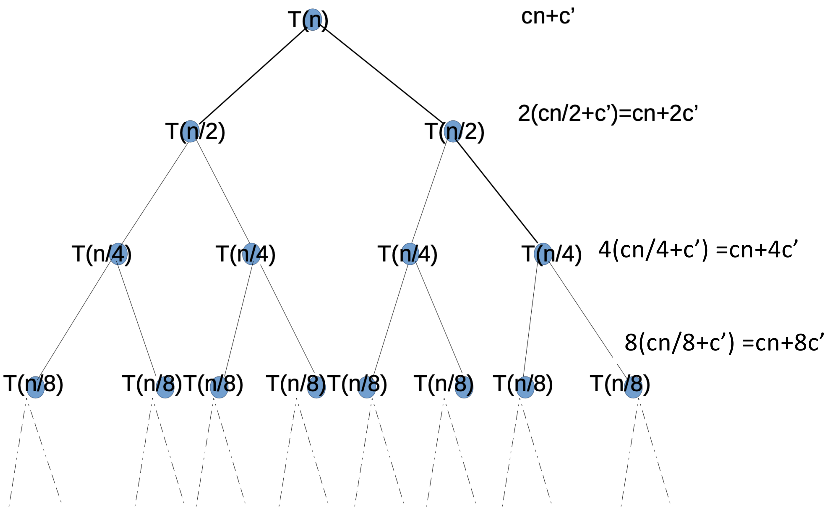
$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + d(n) + r(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tempo di esecuzione di MergeSort

- L'algoritmo MergeSort decompone il problema in due sottoproblemi di dimensione $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$ rispettivamente e impiega tempo costante per la decomposizione (deve semplicemente computare l'indice centrale in modo da individuare la fine e l'inizio dei due segmenti da ordinare) e tempo lineare per ricombinare le soluzioni dei sue sottoproblemi (deve fondere i due segmenti ordinati).
- Nell'analisi per semplicità assumiamo che n sia una potenza di 2 in modo che ogni chiamata ricorsiva divida il segmento su cui opera in due segmenti di uguale grandezza.
- Quindi

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + cn + c' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tempo di esecuzione di MergeSort



- $\log_2 n+1$ livelli: nodi di profondità 0, nodi di profondità 1, ..., nodi di profondità log n
- Il costo totale associato al livello dei nodi di profondità i≤ $\log_2 n$ è $cn+2^i c'$
- L'ultimo livello contiene n foglie ciascuna delle quali rappresenta il tempo per risolvere il problema su un input di dimensione 1. In totale il lavoro richiesto da queste n chiamate ricorsive è $c_0 n$
- sommando su tutti i livelli $\sum_{i=0}^{\log_2 n-1} (cn+2^i c')+c_0 n = cn\log_2 n+(2^{\log_2 n}-1)c'+c_0 n = cn\log_2 n+c'n-c'+c_0 n$

→ T(n)=Θ(nlogn)

Tempo di esecuzione di MergeSort

- Dimostriamo con il metodo iterativo che il tempo di esecuzione è $\Theta(n \log n)$.
- Iteriamo la ricorrenza

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c' + cn + 2T(n/2) = c' + cn + 2(c' + cn/2 + 2T(n/4)) \\
&= (1+2)c' + 2cn + 4T(n/4) = (1+2)c' + 2cn + 4(c' + cn/4 + 2T(n/8)) \\
&= (1+2+4)c' + 3cn + 8T(n/8) \\
\ldots &= (1+2+4+\ldots+2^{i-1})c' + icn + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) \\
&= (2^i - 1)c' + icn + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right)
\end{aligned}
$$

- Quante volte dobbiamo iterare la ricorrenza per raggiungere il caso base?
- Ogni volta che applichiamo la ricorrenza il valore dell'argomento di T viene dimezzato per cui l'i-esima volta che applichiamo la ricorrenza l'argomento della funzione T diventa $\frac{n}{2^i}$. Raggiungiamo il caso base quando $\frac{n}{2^i} \leq 1$ e cioè non appena $2^i \geq n$. Ne consegue che ci fermiamo dopo che abbiamo applicato la ricorrenza $\log n$ volte.
- Dopo aver applicato la ricorrenza $\log n$ volte si ha
$$T(n) = c'(2^{\log n} - 1) + cn \log n + 2^{\log n} T(1) = c'n - c' + cn \log n + nc_0.$$
- Abbiamo dimostrato che $T(n) = \Theta(n \log n)$

Ricerca binaria: versione ricorsiva

```
RicercaBinariaRicorsiva( a,k,sinistra,destra ):
  IF (sinistra > destra) {
    RETURN -1;
  }
  c = (sinistra+destra)/2;
  IF (k == a[c]) {
    RETURN c;
  }
  IF (sinistra==destra) {
    RETURN -1;
  }
  IF (k <a[c]) {
    RETURN RicercaBinariaRicorsiva( a,k,sinistra,c-1 );
  } ELSE {
    RETURN RicercaBinariaRicorsiva( a,k,c+1,destra );
  }
```

Paradigma divide et impera

1. **Caso base**: Il segmento in cui stiamo effettuando la ricerca contiene al più un elemento oppure abbiamo trovato l'elemento al centro del segmento
2. **Decomposizione**: per decomporre occorre calcolare l'indice centrale c e vedere se k è minore o maggiore di $a[c]$
3. **Ricorsione e ricombinazione**: di fatto non occorre nessun lavoro di ricombinazione

Analisi mediante relazione di ricorrenza

- Se il segmento all'interno del quale stiamo cercando contiene al più un elemento oppure l'elemento cercato è quello centrale, allora l'algoritmo esegue un numero costante di operazioni $\leq c_0$.
- Altrimenti, il tempo richiesto è pari a una costante c più il tempo richiesto dalla ricerca dell'elemento in un segmento di dimensione al più pari alla metà di quello attuale.
  Il tempo totale di esecuzione $T(n)$ su un array di n elementi verifica la relazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \text{ oppure } k \text{ è l'elemento centrale} \\ T(n/2) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicando iterativamente la ricorrenza si ha

$$T(n) \leq T(n/2) + c \leq T(n/4) + c + c \leq \ldots \leq T(\frac{n}{2^i}) + ci$$

- Per $i = \log n$ abbiamo

$$T(n) \leq T(1) + c \log n \leq c_o + c \log n = O(\log n).$$

Analisi mediante relazione di ricorrenza

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \text{ oppure } k \text{ è l'elemento centrale} \\ T(n/2) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Risolviamo la relazione di ricorrenza con il metodo della sostituzione.
- Intuizione ci suggerisce che $T(n) = O(\log n)$. Dimostriamo questo limite con l'induzione. Dimostremo che $T(n) \leq c' \log n$ per una certa costante $c' > 0$ e per ogni $n \geq 2$.
- Base dell'induzione: per $n = 2$ si ha tempo minore o uguale di $T(1) + c = c_0 + c$ per cui basta scegliere $c' \geq c + c_0$.
- Passo induttivo: Supponiamo che per $2, \ldots, n-1$ il limite superiore sia verificato. Si ha quindi che $T(n/2) \leq c' \log(n/2)$.Di conseguenza

$$T(n) \leq T(n/2) + c \leq c' \log(n/2) + c = c' \log n - c' + c$$

- Affinché risulti $T(n) \leq c' \log n$ basta scegliere $c' \geq c$.
- Abbiamo quindi dimostrato che $T(n) \leq c'n$ per ogni $n \geq 2$ e $c' = \max\{c + c_0, c\} = c + c_0$.

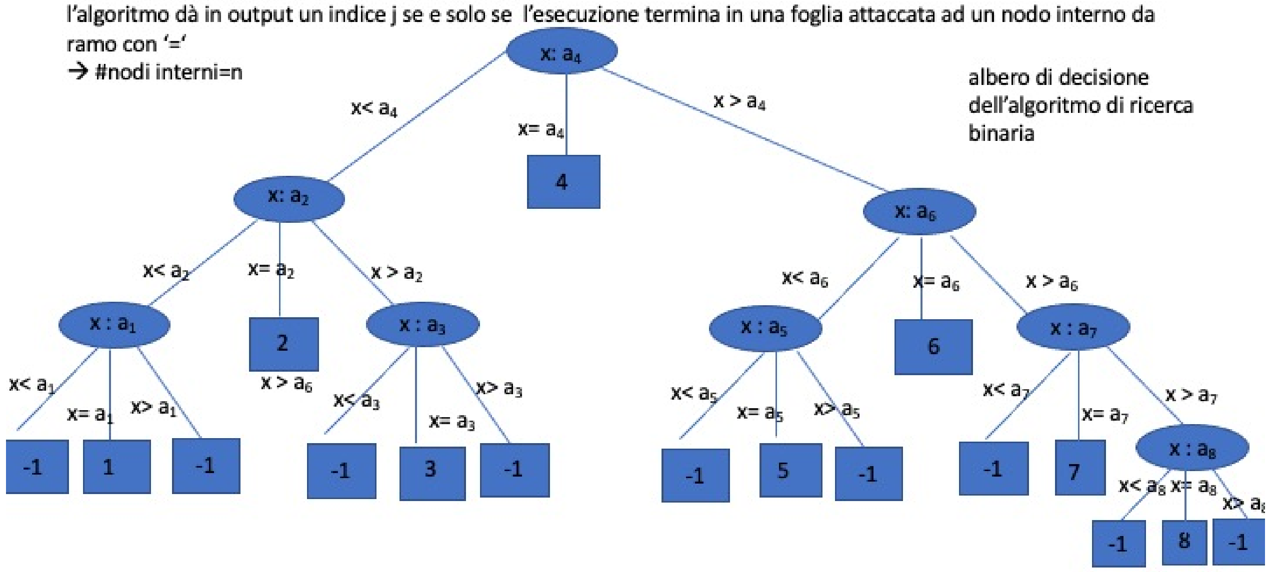
Paradigma della ricerca binaria

Viene usato in diverse situazioni: per esempio, indovinare un numero positivo x con domande del tipo "$x \leq b$?", per un certo b

1. Chiedi se il numero intero x è $\leq 2^i$ per $i = 1, 2, \ldots$
2. Fermati non appena la risposta è *sì*.
3. Sia h l'indice in corrispondenza del quale otteniamo *sì* come risposta. Ovviamente si ha che $2^{h-1} < x \leq 2^h$ e di conseguenza $\log x \leq h < \log x + 1$
4. Effettua ricerca binaria nell'intervallo $[2^{h-1} + 1, 2^h]$
5. Intervallo contiene 2^{h-1} interi per cui ricerca binaria nell'intervallo richiede tempo $O(\log 2^{h-1}) = O(h) = O(\log x)$
6. In totale $O(\log x)$: $h = \lceil \log x \rceil$ domande fatte per individuare l'intervallo $[2^{h-1} + 1, 2^h]$ e h-1 domande per cercare x in $[2^{h-1} + 1, 2^h]$.

array ordinato A= <a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 >
albero di decisione descrive tutte le possibili sequenze di confronti che potrebbe fare l'algoritmo.
nell'albero di decisione i nodi interni rappresentano i confronti, mentre le foglie rappresentano gli output prodotti. →
altezza albero=numero confronti nel caso pessimo
l'algoritmo dà in output un indice j se e solo se l'esecuzione termina in una foglia attaccata ad un nodo interno da ramo con '='
→ #nodi interni=n

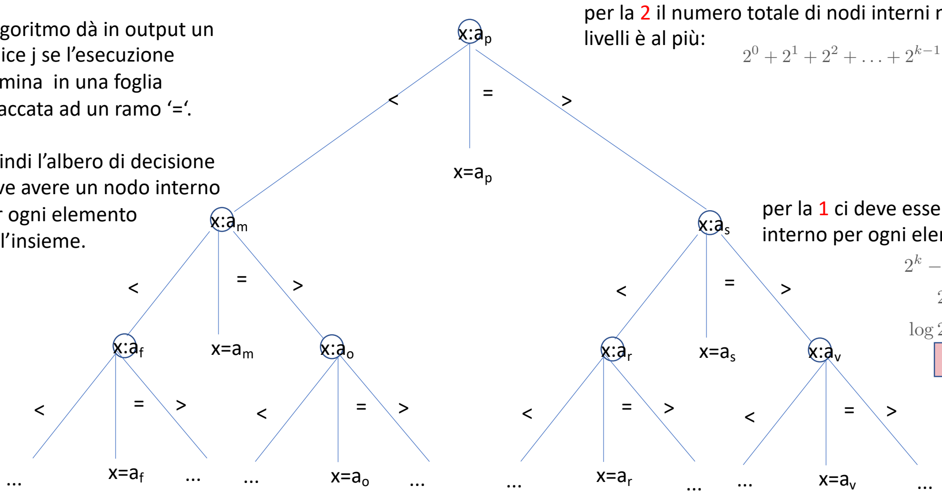
albero di decisione dell'algoritmo di ricerca binaria



Lower bound sulla ricerca su un insieme ordinato

[1] L'algoritmo dà in output un indice j se l'esecuzione termina in una foglia attaccata ad un ramo '='.

Quindi l'albero di decisione deve avere un nodo interno per ogni elemento dell'insieme.



per la 2 il numero totale di nodi interni nei primi k livelli è al più:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \frac{1-2^k}{1-2} = 2^k - 1$$

per la 1 ci deve essere un nodo interno per ogni elemento:

$$2^k - 1 \geq n$$
$$2^k \geq n + 1$$
$$\log 2^k \geq \log(n+1)$$
$$\boxed{k \geq \log(n+1)}$$

[2] Ogni nodo interno "produce" al più due nodi interni per cui ci sono al più 2^i nodi interni (confronti) a livello i. NB: i nodi nell'ultimo livello sono foglie ciascuna delle quali o è attaccata ad un ramo '=' (elemento trovato) o ad un ramo '<' o '>' (elemento non trovato).

Conseguenza: l'algoritmo di ricerca binaria è asintoticamente ottimo.

Ordinamento per distribuzione

L'algoritmo di ordinamento per distribuzione (*quicksort*) opera nel modo seguente.

Decomposizione: se la sequenza ha almeno due elementi, scegli un elemento **pivot** e dividi la sequenza in due sotto-sequenze in modo tale che la prima contenga elementi minori o uguali al pivot e la seconda gli elementi maggiori o uguali del pivot.

Ricorsione: ordina ricorsivamente le due sotto-sequenze.

Ricombinazione: non occorre fare alcun lavoro.

```
QuickSort( a, sinistra, destra ):

  IF (sinistra < destra) {
    scegli pivot nell'intervallo [sinistra...destra];
    indiceFinalePivot = Distribuzione(a, sinistra, pivot, destra);
    QuickSort( a, sinistra, indiceFinalePivot-1 );
    QuickSort( a, indiceFinalePivot+1, destra );
  }
```

Distribuzione

- Data la posizione px del pivot in un segmento $a[\mathtt{sx}, \mathtt{dx}]$:
  - scambia gli elementi $a[\mathtt{px}]$ e $a[\mathtt{dx}]$, se $\mathtt{px} \neq \mathtt{dx}$
  - usa due indici `i` e `j` per scandire il segmento: `i` parte da `sx` e va verso destra e `j` parte da $\mathtt{dx} - 1$ e va verso sinistra fino a quando $\mathtt{i} \leq \mathtt{j}$
  - ogni volta che si ha $a[\mathtt{i}] > \mathtt{pivot}$ e $a[\mathtt{j}] < \mathtt{pivot}$, scambia $a[\mathtt{i}]$ con $a[\mathtt{j}]$ e poi riprende la scansione
  - alla fine della scansione posiziona il pivot nella sua posizione corretta

Ordinamento per distribuzione

```
Distribuzione( a, sx, px, dx ):
  IF (px != dx) Scambia( px, dx );
  i = sx;
  j = dx-1;
  WHILE (i <= j) {
    WHILE ((i <= j) && (A[i] <= A[dx]))
      i = i+1;
    WHILE ((i <= j) && (A[j] => A[dx]))
      j = j-1;
    IF (i < j) Scambia( i, j ); i=i+1,j=j-1;
  }
  IF (i != dx) Scambia( i, dx );
  RETURN i;
```

```
Scambia( i, j ):
  temp = a[j]; a[j] = a[i]; a[i] = temp;
```

$\langle$*pre:* $\mathtt{sx} \leq \mathtt{i}, \mathtt{j} \leq \mathtt{dx}\rangle$

Analisi di Distribuzione

1. per stimare il tempo richiesto dal while esterno dobbiamo stimare il numero di iterazioni eseguite complessivamente dei due while interni.
2. numero totale di iterazioni del primo while interno = numero confronti tra un elemento a[i] con il pivot
3. numero totale di iterazioni del secondo while interno = numero confronti tra un elemento a[j] con il pivot
4. dopo ogni confronto di a[i] con il pivot o viene incrementato `i` (nel while stesso o nell'if). Fa eccezione solo il caso in cui $i = j$ e a[i] $>$ a[dx].
5. dopo ogni confronto di a[j] con il pivot o viene decrementato `j` (nel while stesso o nell'if)
6. per i due punti precedenti si ha che il numero totale di confronti sul totale di tutte le iterazioni dei due for interni è minore o uguale di 1 + numero di volte in cui viene incrementato i + il numero di volte in cui viene decrementato j.
7. dal momento che il while esterno termina quando $i = j + 1$ allora il numero totale di volte in cui viene incrementato i più il numero di volte in cui viene decrementato j è $n - 1$. Di conseguenza il numero totale di confronti è al più n così come pure il numero totale di iterazione dei due while interni.
8. tempo $O(n)$

Analisi di QuickSort mediante relazione di ricorrenza

Relazione di ricorrenza per il tempo $T(n)$ di esecuzione dell'algoritmo.

- Caso base: $T(n) \leq c_0$ per $n \leq 1$.
- Passo ricorsivo: sia r il rango dell'elemento pivot. Ci sono $r - 1$ elementi a sinistra del pivot e $n - r$ elementi a destra, per cui $T(n) \leq T(r - 1) + T(n - r) + cn$.

Analisi di QuickSort mediante relazione di ricorrenza

caso pessimo

- Il pivot è tutto a sinistra ($r = 1$) oppure tutto a destra ($r = n$). In entrambi i casi, la relazione diventa $T(n) \leq T(n-1) + T(0) + cn \leq T(n-1) + c'n$ per un'opportuna costante c'
- Applichiamo iterativamente la relazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq T(n-1)+c'n \leq T(n-2)+c'(n-1)+c'n \leq \ldots \leq T(n-i)+\sum_{j=0}^{i-1} c'(n-j).$$

- Sostitutendo $i = n-1$ nell'espressione più a destra, otteniamo

$$T(n) \leq T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} c'(n-j) \leq c_0 + \sum_{j=0}^{n-2} c'(n-j).$$

- Nella sommatoria sostituiamo j con $k = n - j$ e otteniamo

$$c_0 + \sum_{k=2}^{n} c'k \leq c_0 + c'(n+1)n/2 - c' = O(n^2),$$

Analisi di QuickSort mediante relazione di ricorrenza

caso ottimo

- La distribuzione è bilanciata ($r = n/2$)), la ricorsione avviene su ciascuna metà
- In questa situazione, il costo è simile a quella dell'ordinamento per fusione.
- Possiamo dimostrare che il costo è di $O(n \log n)$ tempo

Efficienza del QuickSort randomizzato: intuizione

- Affinché QuickSort abbia tempo di esecuzione $O(n \log n)$ non è necessario che ogni volta il pivot sia l'elemento centrale ma è sufficiente che una frazione costante degli elementi risulti minore o uguale del pivot.
- Sia m la dimensione del segmento di array da ordinare in una certa chiamata ricorsiva. Supponiamo che il segmento venga suddiviso in due segmenti (escluso il pivot) di dimensione rispettivamente pari circa a $(m-1)(\frac{1}{d})$ e $(m-1)(1-\frac{1}{d})$, con $d > 1$ costante. Diciamo "circa" perché in realtà per un segmento occorre prendere la parte intera superiore e per l'altra quella inferiore.
- Ovviamente quanto più sono diverse le lunghezze dei due segmenti (d molto piccolo o molto grande) tanto peggiore è il comportamento dell'algoritmo.
- Supponiamo che la chiamata ricorsiva in cui la suddivisione risulta più sbilanciata, suddivida il segmento da ordinare (privato del pivot) in due parti di dimensione pari rispettivamente a circa $\frac{1}{\beta}$ e $1-\frac{1}{\beta}$ della dimensione del segmento, dove β è una costante positiva.
- Il tempo richiesto è sicuramente non più grande di quello che sarebbe richiesto se una tale suddivisione si verificasse per ogni chiamata ricorsiva su input maggiori di β. Per input di dimensione minore o uguale di β ci mettiamo nel caso peggiore, cioè quello in cui un segmento è vuoto e l'altro contiene tutti gli elementi diversi dal pivot. Il tempo sarà comunque limitato da una costante che indichiamo con c_1.

Efficienza del QuickSort randomizzato: intuizione

- Omettiamo le parti intere inferiori e superiori. Si può dimostrare che ciò non influisce sul comportamento asintotico della ricorrenza.
- Consideriamo quindi la relazione di ricorrenza

$$T(n) \leq \begin{cases} T((n-1)/\beta) + T((n-1)(1-1/\beta)) + cn & \text{se } n > \beta \\ c_1 & \text{per } n \leq \beta \end{cases}$$

  Vogliamo dimostrare che questa relazione di ricorrenza ha soluzione $O(n \log n)$ per qualsiasi costante $\beta > 1$.
- Possiamo assumere che $\beta \neq 2$ in quanto abbiamo già visto che in quel caso $T(n) = O(n \log n)$. Possiamo inoltre assumere senza perdere di generalità che $\beta > 2$, cioè che il primo segmento sia più piccolo del secondo.
- Dimostriamo con il metodo della sostituzione che $T(n) = O(n \log n)$. Per far ciò dimostreremo per induzione che esiste una costante $c' > 0$ per cui $T(n) \leq c' n \log n$ per ogni $n \geq \beta$.
- Base induzione: per $n = \beta$, si ha $T(\beta) \leq c_1$. Perché sia $T(\beta) \leq c'(\beta \log \beta)$ basta quindi scegliere c' tale che $c' \geq c_1/(\beta \log \beta)$.

Efficienza del QuickSort randomizzato: intuizione

- Passo induttivo. Supponiamo vera la disuguaglianza per $2, \ldots, n-1$. Si ha

$$
\begin{aligned}
T(n) \leq\ & T((n-1)/\beta) + T((n-1)(1-1/\beta)) + cn \\
\leq\ & c'((n-1)/\beta)\log((n-1)/\beta) + c'((n-1)(1-1/\beta)\log((n-1)(1-1/\beta)) + cn \\
\leq\ & c'(n/\beta)\log(n/\beta) + c'n(1-1/\beta)\log(n(1-1/\beta)) + cn \\
=\ & c'(n/\beta)(\log(n/\beta) - \log(n(1-1/\beta))) + c'n\log(n(1-1/\beta)) + cn \\
=\ & -c'(n/\beta)\log(\beta-1) + c'n\log(n(1-1/\beta)) + cn \\
\leq\ & -c'(n/\beta)\log(\beta-1) + c'n\log n + cn.
\end{aligned}
$$

- Perché risulti $T(n) \leq c'n\log n$ basta imporre $-(c'/\beta)\log(\beta-1) + c \leq 0$ che è soddisfatta per $c' \geq c\beta/(\log(\beta-1))$
- Quindi dobbiamo scegliere

$$c' = \max\{c_1/(\beta\log\beta), c\beta/(\log(\beta-1))\}.$$

Efficienza del QuickSort randomizzato: intuizione

- Ci sono quindi molte possibili scelte del pivot che fanno in modo che l'algoritmo si comporti bene.
- Questo ci suggerisce che scegliere il pivot in modo random (con distribuzione di probabilità uniforme) porta con buona probabilità a scegliere un pivot "ben posizionato" e cioè un pivot che suddivide il segmento da ordinare nel modo descritto in precedenza e ad avere un tempo di esecuzione $O(n\log n)$.
- Si può dimostrare formalmente che il QuickSort randomizzato ha tempo di esecuzione medio $O(n\log n)$.

Selezione per distribuzione

Problema: selezione dell'elemento con rango r in un array a di n elementi distinti.

- Si vuole evitare di ordinare a
- NB: Il problema diventa quello di trovare il minimo quando $r = 1$ e il massimo quando $r = n$.

Osservazione: la funzione `Distribuzione` permette di trovare il rango del pivot, posizionando tutti gli elementi di rango inferiore alla sua sinistra e tutti quelli di rango superiore alla sua destra.

Possiamo modificare il codice del quicksort procedendo ricorsivamente nel *solo* segmento dell'array contenente l'elemento da selezionare.

La ricorsione ha termine quando il segmento è composto da un solo elemento.

Selezione per distribuzione

```
QuickSelect( a, sinistra, r, destra ):
  IF (sinistra == destra) {
    RETURN a[sinistra];
  } ELSE {
    scegli pivot nell'intervallo [sinistra...destra];
    indiceFinalePivot = Distribuzione(a, sinistra, pivot, destra);
    IF (r-1 == indiceFinalePivot) {
      RETURN a[indiceFinalePivot];
    } ELSE IF (r-1 < indiceFinalePivot) {
      RETURN QuickSelect( a, sinistra, r, indiceFinalePivot-1 );
    } ELSE {
      RETURN QuickSelect( a, indiceFinalePivot+1, r, destra );
    }
  }
```

Analisi di QuickSelect mediante relazione di ricorrenza

- Caso base:
  Se il segmento sul quale opera l'algoritmo contiene un solo elemento allora l'algoritmo esegue un numero costante di operazioni per cui il costo è $\leq c_0$ per una certa costante c_0 positiva.
  Se l'indice restituito da $Distribuzione(a, sinistra, pivot, destra)$ è uguale a $r - 1$, l'algoritmo termina. Il costo in questo caso è dato dal costo lineare di Distribuzione più il costo costante delle altre istruzioni per cui il costo totale è $\leq c_1 n$, dove $c_1 > 0$ è una certa costante.
- Passo ricorsivo: Il costo in questo caso è dato dal costo lineare di Distribuzione più il costo costante delle altre istruzioni e il costo della chiamata ricorsiva sul segmento degli elementi minori del pivot **oppure** in quello degli elementi maggiori del pivot. Il costo in questo caso è quindi al più pari a cn (per una certa costante $c > 0$) più il costo della chiamata ricorsiva.

Analisi di QuickSelect mediante relazione di ricorrenza

Relazione di ricorrenza per il tempo $T(n)$ di esecuzione dell'algoritmo.
Indichiamo con r_p il rango del pivot

- Caso base:
  $T(n) \leq c_0$ per $n =$ e
  $T(n) \leq c_1 n$ se $r_p = r$.
- Passo ricorsivo: Ci sono $r_p - 1$ elementi a sinistra del pivot e $n - r_p$ elementi a destra, per cui $T(n) \leq \max\{T(r_p - 1), T(n - r_p)\} + cn$.

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n = 1 \\ c_1 n & \text{se } n > 1 \text{ e } r_p = r - 1 \\ \max\{T(r_p - 1), T(n - r_p)\} + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analisi di QuickSelect mediante relazione di ricorrenza

caso pessimo

- Il pivot è tutto a sinistra ($r_p = 1$) e $r > r_p$ oppure tutto a destra ($r_p = n$) e $r < r_p$. In entrambi i casi, la relazione diventa $T(n) \leq T(n-1) + cn$.
- Applichiamo iterativamente la relazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq T(n-1)+cn \leq T(n-2)+c(n-1)+cn \leq \ldots \leq T(n-i)+ \sum_{j=n-i+1}^{n} c\,j.$$

- Sostitutendo $i = n - 1$ nell'ultima disequazione, otteniamo

$$T(n) \leq T(1) + \sum_{j=2}^{n} c\,j \leq c_0 + \sum_{j=2}^{n} c\,j = c_0 + c\,n(n+1)/2 - c = O(n^2).$$

Analisi di QuickSelect mediante relazione di ricorrenza

caso ottimo

- L'elemento di rango r è proprio il pivot ($r_p = r$), per cui si esce dalla procedura senza effettuare la ricorsione e si ha che $T(n) = O(n)$.
- Il caso ottimo si verifica anche quando ad ogni chiamata ricorsiva viene dimezzata la lunghezza del segmento in cui effettuare la selezione.

$$T(n) \leq T(n/2) + cn \leq T(n/4) + c(n/2) + cn \leq \ldots \leq T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{j=0}^{i-1} c\frac{n}{2^j}.$$

Dopo $\log n$ applicazioni della relazione di ricorrenza otteniamo

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{2^{\log n}}\right) + \sum_{j=0}^{\log n-1} c\frac{n}{2^j} = T(1) + cn \sum_{j=0}^{\log n-1} \frac{1}{2^j} \\ &\leq c_0 + cn\left(\frac{1-1/2^{\log n}}{1/2}\right) = c_0 + 2cn(1-1/n) = O(n) \end{aligned}$$

Efficienza del QuickSelect randomizzato: intuizione

- Per il QuickSelect, vale un discorso analogo a quello fatto per il QuickSort
- Ci sono molte possibili scelte del pivot che fanno in modo che l'algoritmo si comporti bene.
- Scegliendo il pivot in modo random (con distribuzione di probabilità uniforme) è probabile che si scelga un pivot "ben posizionato" e cioè un pivot tale che esiste una costante $a > 1$ per cui una frazione $1/a$ degli elementi sono minori o uguali del pivot e una frazione $1 - 1/a$ degli elementi sono maggiori o uguali del pivot.
- Si può dimostrare formalmente che il QuickSelect randomizzato ha tempo di esecuzione medio $O(n)$.

Sottosequenza di somma massima di un array di numeri

Dato un array a di n numeri positivi e negativi trovare la sottosequenza di numeri consecutivi la cui somma è massima. N.B. Se l'array contiene solo numeri positivi, il massimo si ottiene banalmente prendendo come sequenza quella di tutti i numeri dell'array; se l'array contiene solo numeri negativi il massimo si ottiene prendendo come sottosequenza quella formata dalla locazione contenente il numero più grande .

- I soluzione: Per ogni coppia di indici (i, j) con $i \leq j$ dell'array computa la somma degli elementi nella sottosequenza degli elementi di indice compreso tra i e j e restituisci la sottosequenza per cui questa somma è max.
- Costo della I soluzione: $O(n^3)$ perché

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}(j-i+1) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} k = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i+1)(n-i)/2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}((n-i)^2/2 + (n-i)/2) = \sum_{a=1}^{n}(a^2/2 + a/2) \\
&= \sum_{a=1}^{n} a^2/2 + \sum_{a=1}^{n} a/2 \\
&= 1/2(n(n+1)(2n+1)/6) + 1/2(n(n+1)/2) = \Theta(n^3).
\end{aligned}$$

Sottosequenza di somma massima di un array di numeri

- II soluzione Osserviamo che la somma degli elementi di indice compreso tra i e j può essere ottenuta sommando $a[j]$ alla somma degli elementi di indice compreso tra i e $j-1$. Di conseguenza, per ogni i, la somma degli elementi in tutte le sottosequenze che partono da i possono essere computate con un costo totale pari a $\Theta(n-i)$. Il costo totale è quindi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Theta(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} i) = \Theta(n^2)$$

Sottosequenza di somma massima di un array di numeri

- III soluzione: Divide et Impera
  Algoritmo A:
  1. Se $i = j$ viene restituita la sottosequenza formata da $a[i]$
  2. Se $i < j$ si invoca ricorsivamente $A(i, (i+j)/2)$ e $A((i+j)/2+1, j)$: la sottosequenza cercata o è una di quelle restituite dalle 2 chiamate ricorsive o si trova a cavallo delle due metà dell'array
  3. La sottosequenza di somma massima tra quelle che intersecano entrambe le metà dell'array si trova nel seguente modo:
     - si scandisce l'array a partire dall'indice $(i+j)/2$ andando a ritroso fino a che si arriva all'inizio dell'array sommando via via gli elementi scanditi: ad ogni iterazione si confronta la somma ottenuta fino a quel momento con il valore max s_1 delle somme ottenute in precedenza e nel caso aggiorna il max s_1 e l'indice in corrispondenza del quale è stato ottenuto.
     - si scandisce l'array a partire dal'indice $(i+j)/2+1$ andando in avanti fino a che o si raggiunge la fine dell'array sommando gli elementi scanditi: ad ogni iterazione si confronta la somma ottenuta fino a quel momento con il valore max s_2 delle somme ottenute in precedenza e nel caso aggiorna il max s_2 e l'indice in corrispondenza del quale è stato ottenuto.
     - La sottosequenza di somma massima tra quelle che intersecano le due metà dell'array è quella di somma $s_1 + s_2$.
  4. L'algoritmo restituisce la sottosequenza massima tra quella restituita dalla prima chiamata ricorsiva, quella restituita dalla seconda chiamata ricorsiva e quella di somma $s_1 + s_2$

Sottosequenza di somma massima di un array di numeri

- Tempo di esecuzione dell'algoritmo Divide et Impera

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il tempo di esecuzione quindi è $O(n \log n)$.

Sottosequenza di somma massima di un array di numeri

- IV soluzione: Chiamiamo s_j la somma degli elementi della sottosequenza di somma massima tra quelle che terminano in j. Si ha $s_{j+1} = \max\{s_j + a[j+1], a[j+1]\}$. Se s_j è noto , questo valore si calcola in tempo costante per ogni j. Possiamo calcolare i valori $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ in tempo O(n) in uno dei seguenti modi:
  - in modo iterativo partendo da $s_0 = A[0]$ e memorizzando via via i valori computati in un array s
  - in modo ricorsivo: l'algoritmo prende in input A e un intero $k \geq 0$ e
    - se $k = 0$, pone $s[0] = A[0]$ restituendolo in ountput;
    - se $k > 0$, invoca ricorsivamente se stesso su A e $k - 1$ e, una volta ottenuto s_{k-1} dalla chiamata ricorsiva, calcola il valore di s_k con la formula in alto e pone $s[k] = s_k$ restituendolo in output.

  Una volta calcolati i valori s_j, prende il massimo degli n valori computati. Il tempo dell'algoritmo quindi è $O(n)$.