Moltiplicazione di una catena di matrici

- Input: una sequenza di n matrici $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, *compatibili due a due rispetto al prodotto*
  - Due matrici A e B sono compatibili rispetto al prodotto se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B
- Obiettivo: vogliamo calcolare il prodotto delle n matrici in modo da minimizzare il numero di moltiplicazioni.
  - Data una matrice mxn A e una matrice nxp B la matrice AxB è una matrice mxp e per calcolare ciascuna delle mp entrate di AxB abbiamo bisogno di moltiplicare una riga di A per una colonna di B → n moltiplicazioni scalari per ciascuna entrata di AxB→ mnp moltiplicazioni scalari.
  - La moltiplicazione tra matrici è associativa per cui possiamo scegliere l'ordine in cui moltiplichiamo le matrici parentesizzando opportunamente la catena di matrici

125

Moltiplicazione di una catena di matrici

- Consideriamo le tre matrici
  - A: 100×1
  - B: 1×100
  - C: 100×1
- Numero di moltiplicazioni per diverse parentesizzazioni:
  - $((A \cdot B) \cdot C) \rightarrow (100 \times 1 \times 100)+(100 \times 100 \times 1)= 20000$
    - prima $100 \times 1 \times 100$ moltiplicazioni per $A \cdot B$ e poi $100 \times 100 \times 1$ moltiplicazioni per $(A \cdot B) \cdot C$
  - $(A \cdot (B \cdot C)) \rightarrow (1 \times 100 \times 1)+ (100 \times 1 \times 1) = 200$
    - prima $1 \times 100 \times 1$ moltiplicazioni per $B \cdot C$ e poi $100 \times 1 \times 1$ moltiplicazioni per $A \cdot (B \cdot C)$

126

Moltiplicazione di una catena di matrici

- Per i<j, una parentesizzazione P(i,…,j) del prodotto $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$ consiste nel prodotto di due parentesizzazioni (P(i,…,k) · P(k+1,…j))
  - P(i,…,k) e P(k+1,…j) sono le due parentesizzazioni a livello piu` esterno
- Sia A[i . . . j) una sottosequenza della catena di moltiplicazioni $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \ldots \cdot A_n$.
- Supponiamo che P[(i . . . j) sia una parentesizzazione ottima di A[i . . . j) e siano P(i . . . k) e P(k + 1 . . . j) le parentesizzazioni a livello piu` esterno in P(i . . . j) .
- Sottostruttura ottimale: se P(i . . . j) è una parentesizzazione ottima di A(i . . . j) allora le due parentesizzazioni P(i . . . k) e P(k + 1 . . . j) sono ottime per le sottosequenze A(i . . . k) e A(k + 1 . . . j) rispettivamente.

127

Moltiplicazione di una catena di matrici

OPT(i,j): minimo numero di moltiplicazioni scalari per calcolare il prodotto A(i . . . j)

Caso i = j. In questo caso (base) OPT(i,j)=0

Caso i < j.

- Supponiamo di sapere che la parentesizzazione ottima per A(i,…,j) sia formata a livello piu` esterno dal prodotto delle parentesizzazioni di A(1,..,k) e A(k+1,…,n). Per la sottostruttura ottimale si ha:
  $OPT(i,j)= OPT(i,k) + OPT(k + 1,j) + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$
  - c_{i-1} = numero di righe della matrice A_i
  - c_i = numero di colonne della matrice A_i
  - la matrice $(A_i \cdot \ldots \cdot A_k)$ ha dimensioni $c_{i-1} \times c_k$
  - la matrice $(A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_j)$ ha dimensioni $c_k \times c_j$

  → costo per moltiplicare la matrice $(A_i \cdot \ldots \cdot A_k)$ con $(A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_j)$ è $c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$
- Siccome non conosciamo il valore di k nella soluzione ottima, computiamo il valore $OPT(i,k) + OPT(k + 1,j) + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$ per ogni k tra 1 e j-1 e scegliamo il piu` piccolo di questi valori.

128

Moltiplicazione di una catena di matrici

Dai due casi precedenti si ha la seguente formula di ricorrenza:

OPT(i,j)=0 se i=j

$OPT(i,j) = \min_{i \le k < n} \{OPT(i,k) + OPT(k+1,j) + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j\}$ se $i < j$

129