# Algoritmi greedy
# V parte

Progettazione di Algoritmi a.a. 2020-21
Matricole congrue a 1
Docente: Annalisa De Bonis



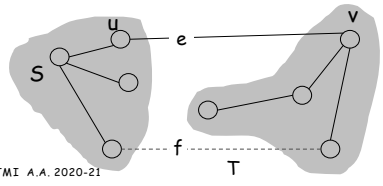


## Proprietà del ciclo

- **Assumiamo che tutti i costi $c_e$ siano distinti.**
- Proprietà del ciclo . Sia C un ciclo e sia e=(u,v) l'arco di costo massimo tra quelli appartenenti a C. Ogni minimo albero ricoprente non contiene l'arco e.

  Dim. (tecnica dello scambio)
  - Sia T un albero ricoprente che contiene l'arco e. Dimostriamo che T non può essere un MST.
  - Se rimuoviamo l 'arco e da T disconnettiamo T in due alberi uno contenente u e l'altro contenente v. Chiamamo S l'insieme dei nodi dell'albero che contiene u.
  - Il ciclo C contiene due percorsi per andare da u a v. Un percorso è costituito dall'arco e=(u,v) mentre l'altro va da u a v attraverso gli archi di C diversi da (u,v). Tra questi archi deve essercene uno che attraversa il taglio [S,V-S] altrimenti non sarebbe possibile andare da u che sta in S a v che sta in V-S. Sia f questo arco.

    Se al posto di e inseriamo in T l'arco f, otteniamo un albero ricoprente T' di costo c(T')=c(T)- $c_e$+$c_f$
    Siccome $c_f$ < $c_e$ allora c(T') < c(T). Ne consegue che T non è uno MST.



## Correttezza dell'algoritmo Inverti-Cancella

- L'algoritmo Inverti-Cancella produce un MST.
- Dim. (nel caso in cui i costi sono a due a due distinti)
- Sia T il grafo prodotto da Inverti-Cancella.
- Prima dimostriamo che gli archi che non sono in T non sono neanche nello MST.
  - Sia e un qualsiasi arco che non appartiene a T.
  - Se e=(u,v) non appartiene a T vuol dire che quando l'arco e=(u,v) è stato esaminato l'arco si trovava su un ciclo C (altrimenti la sua rimozione avrebbe disconnesso u e v).
  - Dal momento che gli archi vengono esaminati in ordine decrescente di costo, l'arco e=(u,v) ha costo massimo tra gli archi sul ciclo C.
  - La proprietà del ciclo implica allora che e=(u,v) non può far parte dello MST.
- Abbiamo dimostrato che ogni arco dello MST appartiene anche a T. Ora dimostriamo che T non contiene altri archi oltre a quelli dello MST.
  - Sia $T^*$ lo MST. Ovviamente $(V,T^*)$ è un grafo connesso.
  - Supponiamo **per assurdo** che esista un arco (u,v) di T che non sta in $T^*$.
  - Se agli archi di $T^*$ aggiungiamo l'arco (u,v), si viene a creare un ciclo. Poiché T contiene tutti gli archi di $T^*$ e contiene anche (u,v) allora T contiene un ciclo C. Ciò è impossibile perché l'algoritmo rimuove l'arco di costo più alto su C e quindi elimina i cicli. Abbiamo quindi ottenuto una contraddizione.

162

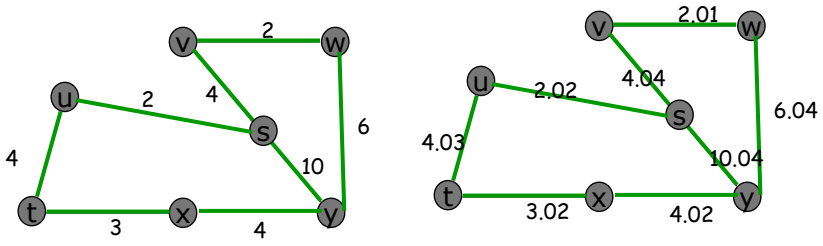


## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- In questo caso la correttezza si dimostra perturbando di poco i costi $c_e$ degli archi, cioè aumentando i costi degli archi in modo che valgano le seguenti tre condizioni
  1. i nuovi costi $\hat{c}_e$ risultino a due a due distinti
  2. se $c_e < c_{e'}$ allora $\hat{c}_e < \hat{c}_{e'}$
  3. la somma dei valori aggiunti ai costi degli archi sia minore del minimo delle quantità $|c(T_1)-c(T_2)|$, dove il min è calcolato su tutte le coppie di alberi ricoprenti $T_1$ e $T_2$ tali che $c(T_1) \neq c(T_2)$ (Questo non è un algoritmo per cui non ci importa quanto tempo ci vuole a calcolare il minimo)

## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- In questo esempio i costi sono interi quindi è chiaro che i costi di due alberi ricoprenti di costo diverso differiscono almeno di 1.
- Se perturbiamo i costi come nella seconda figura, si ha che
  - I nuovi costi sono a due a due distinti
  - Se e ha costo minore di e' all'inizio allora e ha costo minore di e' anche dopo aver modificato i costi.
  - La somma dei valori aggiunti ai costi è 0.01+0.02+0.02+0.02+0.03+0.04+0.04+0.04 < 1








## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- Chiamiamo $G$ il grafo di partenza (con i costi non pertubati) e $\hat{G}$ quello con i costi perturbati.
- Sia T un minimo albero ricoprente del grafo $\hat{G}$. Dimostriamo che T è un minimo albero ricoprente anche per $G$.
- Se **per assurdo** non fosse così esisterebbe un albero $T^*$ che in $G$ ha costo minore di T → $c(T)-c(T^*)>0$, dove $c(T)$ e $c(T^*)$ sono i costi di T e $T^*$ in $G$.
- Sia s la somma totale dei valori aggiunti ai costi degli archi di $G$
- Per come abbiamo perturbato i costi, si ha che $c(T)-c(T^*) > s$
  - in quanto s è minore della differenza in valore assoluto tra i costi di due qualsiasi alberi ricoprenti di $G$.
- Se mostrassimo che il costo $\hat{c}(T^*)$ di $T^*$ in $\hat{G}$ è minore del costo $\hat{c}(T)$ di T in $\hat{G}$ allora si otterrebbe una contraddizione al fatto che T è un MST per $\hat{G}$ .

## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- Vediamo di quanto può essere cambiato il costo di $T^*$ dopo aver perturbato gli archi. Stimiamo quindi $\hat{c}(T^*) - c(T^*)$
- Osserviamo che il costo di $T^*$ è aumentato di un valore minore di $s$ (perché?) → $\hat{c}(T^*) - c(T^*) < s$

1. $\hat{c}(T^*) - c(T^*) < s \rightarrow \hat{c}(T^*) < s + c(T^*)$

- La 1. implica

2. $\hat{c}(T) - \hat{c}(T^*) > \hat{c}(T) - c(T^*) - s > (c(T) - c(T^*)) - s$

per cui la differenza tra il costo di T e quello di $T^*$ è diminuita di un valore minore di $s$

Per la ✷ si ha $c(T)-c(T^*) > s$ e quindi

3. $(c(T)-c(T^*))-s > 0$

La 2 e la 3 implicano $\hat{c}(T) - \hat{c}(T^*) > 0$ per cui T non può essere lo MST di $\hat{G}$ perché $T^*$ ha costo più piccolo di T anche in $\hat{G}$.





## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- Proprietà del taglio (senza alcun vincolo sui costi degli archi) Sia S un qualsiasi sottoinsieme di nodi e sia e **un** arco di costo minimo che attraversa il taglio [S,V-S]. Esiste un minimo albero ricoprente che contiene e.
- Dim.
- Siano $e_1,e_2,\ldots,e_p$ gli archi di G che attraversano il taglio ordinati in modo che $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_p)$ con $e_1=e$.
- Perturbiamo i costi degli archi di G come mostrato nelle slide precedenti e facendo in modo che $\hat{c}(e_1) < \hat{c}(e_2) < \ldots < \hat{c}(e_p)$. Per fare questo basta perturbare i costi c di G nel modo già descritto e stando attenti che se $c(e_i)=c(e_{i+1})$, per un certo $1 \leq i \leq p-1$, allora deve essere $\hat{c}(e_i) < \hat{c}(e_{i+1})$.
- Sia T lo MST di $\hat{G}$.
- La proprietà del taglio per grafi con costi degli archi a due a due distinti implica che lo MST di $\hat{G}$ contiene l'arco e → T contiene e.
- Per quanto dimostrato nelle slide precedenti, T è anche un MST di G.
- Abbiamo quindi dimostrato che esiste un MST di G che contiene e.

- NB: MST distinti di G potrebbero essere ottenuti permutando tra di loro archi di costo uguale nell'ordinamento $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_p)$

## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- Proprietà del ciclo (senza alcun vincolo sui costi degli archi) Sia $C$ un ciclo e sia $e$ **un** arco di costo massimo in $C$. Esiste un minimo albero ricoprente che non contiene $e$.
- Dim.
- Siano $e_1,e_2,\dots,e_p$ gli archi del ciclo $C$, ordinati in modo che $c(e_1) \le c(e_2) \le \dots \le c(e_p)$ con $e_p=e$.
- Perturbiamo i costi degli archi di $G$ come mostrato nelle slide precedenti e facendo in modo che $\hat{c}(e_1) < \hat{c}(e_2) < \dots < \hat{c}(e_p)$. Per fare questo basta perturbare i costi $c$ di $G$ nel modo già descritto e stando attenti che se $c(e_i)=c(e_{i+1})$, per un certo $1 \le i \le p-1$, allora deve essere $\hat{c}(e_i) < \hat{c}(e_{i+1})$.
- Sia $T$ un MST di $\hat{G}$.
- La proprietà del ciclo per grafi con costi degli archi a due a due distinti implica che lo MST di $\hat{G}$ non contiene l'arco $e$ → $T$ NON deve contenere $e$.
- Per quanto dimostrato nelle slide precedenti $T$ è anche un MST di $G$.
- Abbiamo quindi dimostrato che esiste un MST di $G$ che non contiene $e$.

- NB: MST distinti di $G$ potrebbero essere ottenuti permutando tra di loro archi di costo uguale nell'ordinamento $c(e_1) \le c(e_2) \le \dots \le c(e_p)$ .





## Correttezza degli algoritmi quando i costi non sono distinti

- Si è visto che la proprietà del taglio può essere estesa al caso in cui i costi degli archi **non** sono a due a due distinti
- Possiamo quindi dimostrare la correttezza degli algoritmi di Kruskal e di Prim nello stesso modo in cui abbiamo dimostrato la correttezza di questi algoritmi nel caso in cui gli archi hanno costi a due a due distinti.

- Si è visto che la proprietà del ciclo può essere estesa al caso in cui i costi degli archi **non** sono a due a due distinti
- Possiamo quindi dimostrare la correttezza dell'algoritmo Inverti-Cancella nello stesso modo in cui abbiamo dimostrato la correttezza dell'algoritmo nel caso in cui gli archi hanno costi a due a due distinti.

## Clustering

- Clustering. Dato un insieme U di n oggetti $p_1, \ldots, p_n$, vogliamo classificarli in gruppi coerenti
- Esempi: foto, documenti, microorganismi.

- Funzione distanza. Associa **ad ogni coppia di oggetti** un valore numerico che indica la vicinanza dei due oggetti
  - Questa funzione dipende dai criteri in base ai quali stabiliamo che due oggetti sono simili o appartengono ad una stessa categoria.
  - Esempio: numero di anni dal momento in cui due specie hanno cominciato ad evolversi in modo diverso

Problema. Dividere i punti in cluster (gruppi) in modo che punti in cluster distinti siano distanti tra di loro.
- Classificazione di documenti per la ricerca sul Web.
- Ricerca di somiglianze nei database di immagini mediche
- Classificazione di oggetti celesti in stelle, quasar, galassie.

170

170

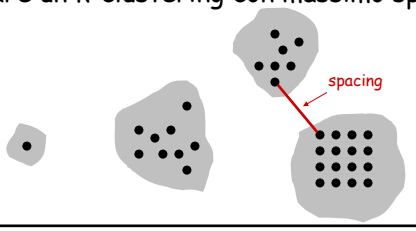
## Clustering con Massimo Spacing

- k-clustering. Partizione dell'insieme U in k sottoinsiemi non vuoti (cluster).

- Funzione distanza. Soddisfa le seguenti proprietà
  - $d(p_i, p_j) = 0$ se e solo se $p_i = p_j$
  - $d(p_i, p_j) \geq 0$
  - $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i)$

- Spacing. Distanza più piccola tra due oggetti in cluster differenti

- Problema del clustering con massimo spacing. Dato un intero k, trovare un k-clustering con massimo spacing.




k = 4

171

171

## Algoritmo greedy per il clustering

- Algoritmo basato sul single-link k-clustering.
  - Costruisce un grafo sull'insieme di vertici U in modo che alla fine abbia k componenti connesse. Ogni componente connessa corrisponderà ad un cluster.
  - Inizialmente il grafo non contiene archi per cui ogni vertice u è in un cluster che contiene solo u.
  - Ad ogni passo trova i due oggetti x e y più vicini e tali che x e y sono in cluster distinti. Aggiunge un arco tra x e y.
  - Va avanti fino a che ha aggiunto n-k archi: a quel punto ci sono esattamente k cluster.

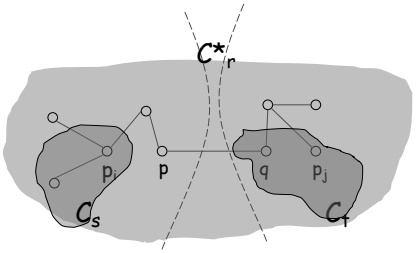
- Osservazione. Questa procedura corrisponde ad eseguire l'algoritmo di Kruskal su un grafo **completo** in cui i costi degli archi rappresentano la distanza tra due oggetti (costo dell'arco (u,v) = d(u,v)). L'unica differenza è che l'algoritmo si ferma prima di inserire i k-1 archi più costosi dello MST.
- NB: Corrisponde a cancellare i k-1 archi più costosi da un MST

172

172

## Algoritmo greedy per il clustering: Analisi

- Teorema. Sia $C^*$ il clustering $C^*_1, \ldots, C^*_k$ ottenuto cancellando i k-1 archi più costosi da un MST T del grafo completo in cui ogni arco e=(u,v) ha costo $c_e = d(u,v)$. $C^*$ è un k-clustering con massimo spacing.
- Dim. Sia $C$ un clustering $C_1, \ldots, C_k$ diverso da $C^*$
  - Sia d* lo spacing di $C^*$. La distanza d* corrisponde al costo del (k-1)-esimo arco più costoso dello MST T (il meno costoso tra quelli cancellati dallo MST T)
  - Facciamo vedere che lo spacing tra due cluster di $C$ non è maggiore di d*
  - Siccome $C$ e $C^*$ sono diversi allora devono esistere due oggetti $p_i$ e $p_j$ che si trovano nello stesso cluster in $C^*$ e in cluster differenti in $C$. Chiamiamo rispettivamente $C^*_r$ il cluster di $C^*$ che contiene $p_i$ e $p_j$ e $C_s$ e $C_t$ i due cluster di $C$ contenenti $p_i$ e $p_j$ , rispettivamente.

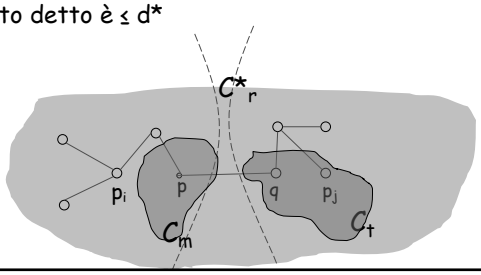



173

173

## Algoritmo greedy per il clustering: Analisi

- Sia P il percorso tra $p_i$ e $p_j$ che passa esclusivamente per nodi di $C^*_r$ (cioe` attraverso archi selezionati da Kruskal nei primi n-k passi) e sia q il primo vertice di P che non appartiene a $C_s$
- Sia p il predecessore di q lungo P. Il nodo p è in una componente $C_m$ di C diversa da $C_t$. in quanto q è il primo nodo incontrato lungo il percorso che sta in $C_t$
- Tutti gli archi sul percorso P e quindi anche (p,q) hanno costo ≤ d* in quanto sono stati scelti da Kruskal nei primi n-k passi.
- Lo spacing di C è minore o uguale del costo dell'arco (p,q) che per quanto detto è ≤ d*




174