

## IL PARADIGMA “DIVIDE ET IMPERA”

La tecnica algoritmica del “divide et impera” consiste nel

- decomporre il problema in un piccolo numero di sotto-problemi, ciascuno dei quali è dello stesso tipo del problema originale ma è definito su un insieme di dati più piccolo rispetto a quello iniziale;
- risolvere **ricorsivamente** ciascun sotto-problema fino a che non si arriva a risolvere sotto-problemi di taglia così piccola da poter essere risolti direttamente (senza effettuare ulteriori chiamate ricorsive);
- combinare le soluzioni dei sotto-problemi al fine di ottenere una soluzione al problema di partenza.

## ORDINAMENTO PER FUSIONE: MERGESORT

L'algoritmo MergeSort ordina in modo non decrescente una sequenza di numeri. L'idea dell'algoritmo è descritta di seguito.

- Se la sequenza contiene due o più elementi, la sequenza viene suddivisa in due parti ciascuna delle quali contiene circa la metà degli elementi
- Le due sottosequenze vengono ordinate ricorsivamente.
- Una volta ordinate, le due sottosequenze vengono fuse in un'unica sequenza ordinata.

## MERGESORT

Descriviamo l'algoritmo MergeSort che ordina un array. L'algoritmo riceve in input un array e due interi che delimitano la parte di array che si desidera ordinare. Inizialmente invochiamo MergeSort con *sinistra* uguale a 0 e *destra* uguale al numero di elementi dell'array -1.

```
1 MergeSort( a, sinistra, destra ):
2   IF (sinistra < destra) {
3     centro = (sinistra+destra)/2;
4     MergeSort( a, sinistra, centro );
5     MergeSort( a, centro+1, destra );
6     Merge( a, sinistra, centro, destra );
7   }
```

Per calcolare il tempo di esecuzione  $T(n)$  dobbiamo tener conto del

- tempo per decomporre il problema in due sottoproblemi :  $O(1)$  in quanto occorre solo calcolare il centro
- tempo per eseguire le due chiamate ricorsive:  $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$
- tempo per fondere le due sequenze: ?

## L'ALGORITMO MERGE

- Possiamo fondere due sequenze ordinate  $A = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$  e  $B = \langle b_0, \dots, b_{m-1} \rangle$  in modo da formare un'unica sequenza ordinata in tempo lineare in  $n + m$ .
- L'idea dell'algoritmo è il seguente:
  - ① Scandiamo gli elementi delle due sequenze da sinistra verso destra utilizzando l'indice  $i$  per  $A$  e l'indice  $j$  per  $B$ .
  - ② Fino a che  $i \leq n$  e  $j \leq m$ , confrontiamo  $a_i$  con  $b_j$ . Se  $a_i$  è minore o uguale di  $b_j$ ,  $a_i$  viene inserito alla fine della sequenza output e  $i$  viene incrementato di 1. Se  $a_i$  è maggiore di  $b_j$ ,  $b_j$  viene inserito alla fine della sequenza output e  $j$  viene incrementato di 1.
  - ③ Al termine del ciclo precedente se  $i \leq n$  trasferiamo uno dopo l'altro gli elementi  $a_i, \dots, a_n$  alla fine della sequenza output; se  $j \leq m$  trasferiamo uno dopo l'altro gli elementi  $b_j, \dots, b_m$  alla fine della sequenza output.

## L'ALGORITMO FUSIONE

- Ogni volta che eseguiamo un confronto tra un elemento di  $A$  ed uno di  $B$ , viene incrementato uno tra i due indici  $i$  e  $j$ . Di conseguenza l'algoritmo effettua al più  $n + m$  confronti.
- Sia  $k \leq n + m$  il numero totale di confronti effettuati dall'algoritmo. Al termine di questi confronti, la sequenza output conterrà  $k$  elementi e in una delle due sequenze ci saranno  $n + m - k$  elementi che dovranno essere trasferiti nella sequenza output.
- Il tempo totale per fondere le due sequenze ordinate è quindi lineare in  $k + (n + m - k) = n + m$ .

## MERGE: ALGORITMO MERGE

Descriviamo l'algoritmo Merge che fonde due segmenti adiacenti di un array.

- Il primo segmento parte dalla locazione di indice  $sx$  e finisce nella locazione di indice  $cx$
- il secondo segmento parte dalla locazione di indice  $cx + 1$  e finisce nella locazione di indice  $dx$

```
1 Merge( a, sx, cx, dx ):
2   i = sx; j = cx+1; k = 0;
3   WHILE ((i <= cx) && (j <= dx)) {
4     IF (a[i] <= a[j]) {
5       b[k] = a[i]; i = i+1;
6     } ELSE {
7       b[k] = a[j]; j = j+1;
8     }
9     k = k+1;
10  }
11  FOR ( ; i <= cx; i = i+1, k = k+1)
12    b[k] = a[i];
13  FOR ( ; j <= dx; j = j+1, k = k+1)
14    b[k] = a[j];
15  FOR (i = sx; i <= dx; i = i+1)
16    a[i] = b[i-sx];
```

## ANALISI DELL'ALGORITMO MERGESORT

Ora che sappiamo qual è il tempo di esecuzione dell'algoritmo Merge possiamo completare l'analisi dell'algoritmo MergeSort. Indichiamo con  $T(n)$  il suo tempo di esecuzione per un array input di  $n$  elementi. Il tempo  $T(n)$  è dato da

- tempo per decomporre il problema in due sottoproblemi :  $\Theta(1)$ ,
- tempo per eseguire le due chiamate ricorsive:  $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$ ,
- tempo per fondere le due sequenze:  $cn = \Theta(n)$ .

Si ha quindi  $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn + c' = O(?)$ .

## RELAZIONI DI RICORRENZA

- Quando un algoritmo contiene una o più chiamate ricorsive a sé stesso, il suo tempo di esecuzione può essere spesso descritto da una *relazione di ricorrenza*.
- Una relazione di ricorrenza consiste in un'uguaglianza o in una disuguaglianza che descrive una funzione in termini dei suoi valori su input più piccoli.
- Esempio:

$$f(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 2f(n/3) + 4n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## RELAZIONI DI RICORRENZA

- Vediamo come si scrive la relazione di ricorrenza che descrive il tempo di esecuzione  $T(n)$  di un algoritmo basato sulla tecnica del divide et impera per un input di dimensione  $n$ .
- Se la dimensione  $n$  del problema è minore di una certa costante  $c$ , l'algoritmo risolve direttamente il problema (senza effettuare chiamate ricorsive)

$$T(n) \leq c_0, \text{ per una certa costante } c_0 .$$

- Per  $n > c$ , il problema viene suddiviso in sottoproblemi: supponiamo che il problema venga suddiviso in  $\alpha$  sottoproblemi, ognuno di dimensione  $n/\beta$
- L'algoritmo viene invocato ricorsivamente per risolvere ciascuno di questi  $\alpha$  sottoproblemi
- Le  $\alpha$  soluzioni per questi sottoproblemi vengono ricombinate per ottenere la soluzione al problema originario.

## RELAZIONI DI RICORRENZA

- Supponiamo che l'algoritmo impieghi al più tempo  $d(n)$  per suddividere il problema di partenza in  $\alpha$  sottoproblemi.
- Supponiamo che l'algoritmo impieghi al più tempo tempo  $r(n)$  per ricombinare le soluzioni degli  $\alpha$  sottoproblemi.
- Il tempo di esecuzione  $T(n)$  per  $n > c$  può essere descritto dalla relazione:

$$T(n) \leq \alpha T(n/\beta) + d(n) + r(n)$$

- Quindi possiamo scrivere la relazione di ricorrenza:

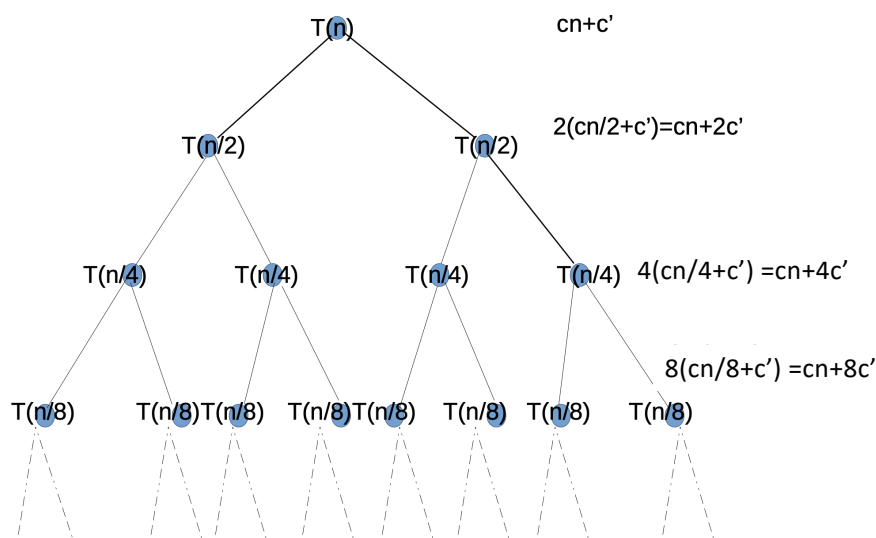
$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq c \\ \alpha T(n/\beta) + d(n) + r(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## TEMPO DI ESECUZIONE DI MERGESORT

- L'algoritmo MergeSort decompone il problema in due sottoproblemi di dimensione  $\lfloor n/2 \rfloor$  e  $\lceil n/2 \rceil$  rispettivamente e impiega tempo costante per la decomposizione (deve semplicemente computare l'indice centrale in modo da individuare la fine e l'inizio dei due segmenti da ordinare) e tempo lineare per ricombinare le soluzioni dei suoi sottoproblemi (deve fondere i due segmenti ordinati).
- Nell'analisi per semplicità assumiamo che  $n$  sia una potenza di 2 in modo che ogni chiamata ricorsiva divida il segmento su cui opera in due segmenti di uguale grandezza.
- Quindi

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 2T(n/2) + cn + c' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## TEMPO DI ESECUZIONE DI MERGESORT



- $\log_2 n + 1$  livelli: nodi di profondità 0, nodi di profondità 1, ..., nodi di profondità  $\log_2 n$
- Il costo totale associato al livello dei nodi di profondità  $i \leq \log_2 n$  è  $cn + 2^i c'$
- L'ultimo livello contiene  $n$  foglie ciascuna delle quali rappresenta il tempo per risolvere il problema su un input di dimensione 1. In totale il lavoro richiesto da queste  $n$  chiamate ricorsive è  $cn$
- sommando su tutti i livelli  $\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} (cn + 2^i c') + c_0 n = cn \log_2 n + (2^{\log_2 n} - 1)c' + c_0 n = cn \log_2 n + c' n - c' + c_0 n$   
 $\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

## TEMPO DI ESECUZIONE DI MERGESORT

- Dimostriamo con il metodo iterativo che il tempo di esecuzione è  $\Theta(n \log n)$ .

- Iteriamo la ricorrenza

$$\begin{aligned}T(n) &= c' + cn + 2T(n/2) = c' + cn + 2(c' + cn/2 + 2T(n/4)) \\ &= (1 + 2)c' + 2cn + 4T(n/4) = (1 + 2)c' + 2cn + 4(c' + cn/4 + 2T(n/8)) \\ &= (1 + 2 + 4)c' + 3cn + 8T(n/8) \\ \dots &= (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{i-1})c' + icn + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) \\ &= (2^i - 1)c' + icn + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right)\end{aligned}$$

- Quante volte dobbiamo iterare la ricorrenza per raggiungere il caso base?
- Ogni volta che applichiamo la ricorrenza il valore dell'argomento di  $T$  viene dimezzato per cui l' $i$ -esima volta che applichiamo la ricorrenza l'argomento della funzione  $T$  diventa  $\frac{n}{2^i}$ . Raggiungiamo il caso base quando  $\frac{n}{2^i} \leq 1$  e cioè non appena  $2^i \geq n$ . Ne consegue che ci fermiamo dopo che abbiamo applicato la ricorrenza  $\log n$  volte.
- Dopo aver applicato la ricorrenza  $\log n$  volte si ha
$$T(n) = c'(2^{\log n} - 1) + cn \log n + 2^{\log n} T(1) = c'n - c' + cn \log n + nc_0.$$
- Abbiamo dimostrato che  $T(n) = \Theta(n \log n)$

## RICERCA BINARIA: VERSIONE RICORSIVA

```
1 RicercaBinariaRicorsiva( a,k,sinistra,destra ) :
2   IF (sinistra > destra) {
3     RETURN -1;
4   }
5   c = (sinistra+destra)/2;
6   IF (k == a[c]) {
7     RETURN c;
8   }
9   IF (sinistra==destra) {
10    RETURN -1;
11  }
12  IF (k < a[c]) {
13    RETURN RicercaBinariaRicorsiva( a,k,sinistra,c-1 );
14  } ELSE {
15    RETURN RicercaBinariaRicorsiva( a,k,c+1,destra );
16  }
```

Paradigma divide et impera

- ① **Caso base:** Il segmento in cui stiamo effettuando la ricerca contiene al più un elemento oppure abbiamo trovato l'elemento al centro del segmento
- ② **Decomposizione:** per decomporre occorre calcolare l'indice centrale  $c$  e vedere se  $k$  è minore o maggiore di  $a[c]$
- ③ **Ricorsione e ricombinazione:** di fatto non occorre nessun lavoro di ricombinazione

## ANALISI MEDIANTE RELAZIONE DI RICORRENZA

- Se il segmento all'interno del quale stiamo cercando contiene al più un elemento oppure l'elemento cercato è quello centrale, allora l'algoritmo esegue un numero costante di operazioni  $\leq c_0$ .
- Altrimenti, il tempo richiesto è pari a una costante  $c$  più il tempo richiesto dalla ricerca dell'elemento in un segmento di dimensione al più pari alla metà di quello attuale.

Il tempo totale di esecuzione  $T(n)$  su un array di  $n$  elementi verifica la relazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \text{ oppure } k \text{ è l'elemento centrale} \\ T(n/2) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicando iterativamente la ricorrenza si ha

$$T(n) \leq T(n/2) + c \leq T(n/4) + c + c \leq \dots \leq T\left(\frac{n}{2^i}\right) + ci$$

- Per  $i = \log n$  abbiamo

$$T(n) \leq T(1) + c \log n \leq c_0 + c \log n = O(\log n).$$

## ANALISI MEDIANTE RELAZIONE DI RICORRENZA

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \text{ oppure } k \text{ è l'elemento centrale} \\ T(n/2) + c & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Risolviamo la relazione di ricorrenza con il metodo della sostituzione.
- Intuizione ci suggerisce che  $T(n) = O(\log n)$ . Dimostriamo questo limite con l'induzione. Dimostremo che  $T(n) \leq c' \log n$  per una certa costante  $c' > 0$  e per ogni  $n \geq 2$ .
- Base dell'induzione: per  $n = 2$  si ha tempo minore o uguale di  $T(1) + c = c_0 + c$  per cui basta scegliere  $c' \geq c + c_0$ .
- Passo induttivo: Supponiamo che per  $2, \dots, n-1$  il limite superiore sia verificato. Si ha quindi che  $T(n/2) \leq c' \log(n/2)$ . Di conseguenza

$$T(n) \leq T(n/2) + c \leq c' \log(n/2) + c = c' \log n - c' + c$$

- Affinché risulti  $T(n) \leq c' \log n$  basta scegliere  $c' \geq c$ .
- Abbiamo quindi dimostrato che  $T(n) \leq c' n$  per ogni  $n \geq 2$  e  $c' = \max\{c + c_0, c\} = c + c_0$ .



# PARADIGMA DELLA RICERCA BINARIA

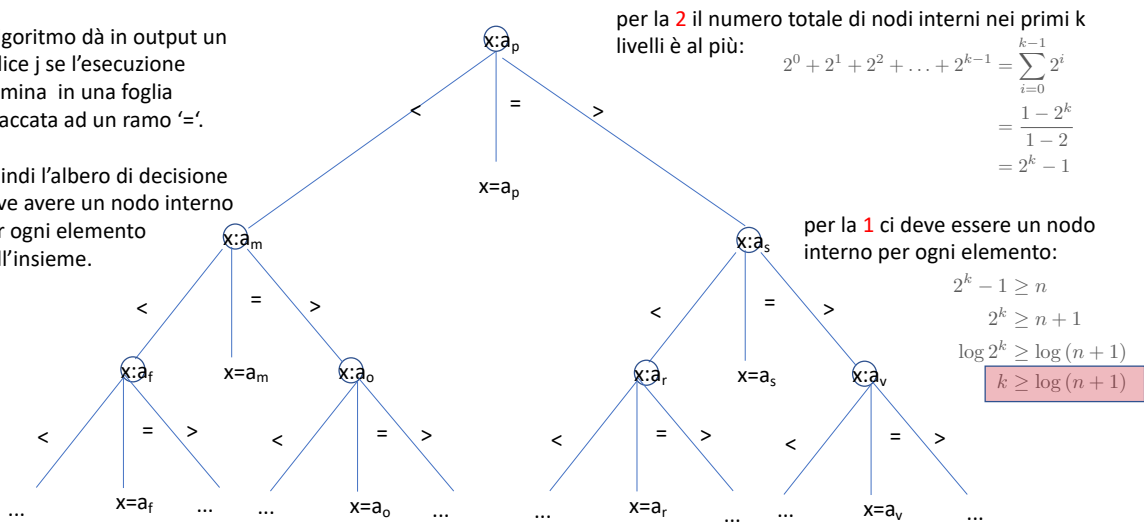
Viene usato in diverse situazioni: per esempio, indovinare un numero positivo  $x$  con domande del tipo " $x \leq b?$ ", per un certo  $b$

- ① Chiedi se il numero intero  $x$  è  $\leq 2^i$  per  $i = 1, 2, \dots$
- ② Fermati non appena la risposta è sì.
- ③ Sia  $h$  l'indice in corrispondenza del quale otteniamo sì come risposta. Ovviamente si ha che  $2^{h-1} < x \leq 2^h$  e di conseguenza  $\log x \leq h < \log x + 1$
- ④ Effettua ricerca binaria nell'intervallo  $[2^{h-1} + 1, 2^h]$
- ⑤ Intervallo contiene  $2^{h-1}$  interi per cui ricerca binaria nell'intervallo richiede tempo  $O(\log 2^{h-1}) = O(h) = O(\log x)$
- ⑥ In totale  $O(\log x)$ :  $h = \lceil \log x \rceil$  domande fatte per individuare l'intervallo  $[2^{h-1} + 1, 2^h]$  e  $h-1$  domande per cercare  $x$  in  $[2^{h-1} + 1, 2^h]$ .

## LOWER BOUND SULLA RICERCA SU UN INSIEME ORDINATO

**1** L'algoritmo dà in output un indice  $j$  se l'esecuzione termina in una foglia attaccata ad un ramo '='.

Quindi l'albero di decisione deve avere un nodo interno per ogni elemento dell'insieme.



per la **2** il numero totale di nodi interni nei primi  $k$  livelli è al più:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = 2^k - 1$$

per la **1** ci deve essere un nodo interno per ogni elemento:

$$2^k - 1 \geq n$$

$$2^k \geq n + 1$$

$$\log 2^k \geq \log(n + 1)$$

$$k \geq \log(n + 1)$$

**2** Ogni nodo interno "produce" al più due nodi interni per cui ci sono al più  $2^i$  nodi interni (confronti) a livello  $i$ . NB: i nodi nell'ultimo livello sono foglie ciascuna delle quali o è attaccata ad un ramo '=' (elemento trovato) o ad un ramo '<' o '>' (elemento non trovato).

Conseguenza: l'algoritmo di ricerca binaria è asintoticamente ottimo.