Regole per la notazione asintotica

$d(n) = O(f(n)) \Rightarrow ad(n) = O(f(n)),\ \forall$ costante $a > 0$

Es.: $\log n = O(n) \Rightarrow 7 \log n = O(n)$

$d(n) = O(f(n)), e(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n)+e(n) = O(f(n)+g(n))$

Es.: $\log n = O(n), \sqrt{n} = O(n) \Rightarrow \log n + \sqrt{n} = O(n)$

$d(n) = O(f(n)), e(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n)e(n) = O(f(n)g(n))$

Es.: $\log n = O(\sqrt{n}), \sqrt{n} = O(\sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt{n} \log n = O(n)$

$d(n) = O(f(n)), f(n) = O(g(n)) \Rightarrow d(n) = O(g(n))$

Es.: $\log n = O(\sqrt{n}), \sqrt{n} = O(n) \Rightarrow \log n = O(n)$

$f(n) = a_d n^d + \cdots a_1 n + a_0 \Rightarrow f(n) = O(n^d)$

Es.: $5n^7 + 6n^4 + 3n^3 + 100 = O(n^7)$

$n^x = O(a^n),\ \forall$ costanti $x > 0, a > 1$ Es.: $n^{100} = O(2^n)$

39

Regole per la notazione asintotica

- Le prime 5 regole nella slide precedente valgono anche se sostituiamo O con Ω o con Θ
- Dimostriamo per esercizio la 1.
- d(n)=O(f(n))→ ad(n)=O(f(n), per a costante positiva
- Dim.
- d(n)=O(f(n)) → esistono due costanti c'>0 ed $n'_0 \geq 0$ t.c. d(n)≤c'f(n) per ogni $n \geq n'_0$
- Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per a il verso della disuguaglianza rimane invariato perche' a>0.
- Quindi si ha ad(n)≤ac'f(n) per ogni $n \geq n'_0$.
- Abbiamo quindi trovato le costanti c ed n_0 per cui vale la definizione di O(f(n))
  - basta infatti porre c=ac' ed $n_0 = n'_0$
  - NB: ac' e` una costante > 0 perche' sia a che c' sono costanti >0.

40

Dimostriamo proprieta` transitiva

- d(n)=O(f(n)) e f(n)=O(g(n)) → d(n)=O(g(n))
- Dim.

1. d(n)=O(f(n)) → esistono due costanti c'>0 ed $n'_0 \geq 0$ t.c. d(n)≤c'f(n) per ogni n ≥ n'_0
2. f(n)=O(g(n)) → esistono due costanti c''>0 ed $n''_0 \geq 0$ t.c. f(n)≤c''g(n) per ogni n ≥ n''_0

- la 1 → d(n) ≤c'f(n) per ogni n ≥ n'_0 , la 2 → f(n) ≤c''g(n) per ogni n ≥ n''_0
- e di conseguenza, d(n) ≤c'f(n) ≤c'(c''g(n))=c'c''g(n) per ogni n maggiore di n'_0 e n''_0
- Ponendo c=c'c'' ed $n_0=\max\{n'_0, n''_0\}$, possiamo quindi affermare che
- d(n) ≤cg(n) per ogni n ≥ n_0 e cio` implica d(n)=O(g(n))

Dimostriamo l'additivita`

- d(n)=O(f(n)) ed e(n)=O(g(n)) → d(n)+e(n)=O(f(n)+g(n))
- Dim.

1. d(n)=O(f(n)) →esistono due costanti c'>0 ed $n'_0 \geq 0$ t.c. d(n)≤c'f(n) per ogni n ≥ n'_0
2. e(n)=O(g(n)) →esistono due costanti c''>0 ed $n''_0 \geq 0$ t.c. e(n)≤c''g(n) per ogni n ≥ n''_0

- la 1 → d(n) ≤c'f(n) per ogni n ≥ n'_0 , la 2 → e(n) ≤c''g(n) per ogni n ≥ n''_0
- e di conseguenza, d(n)+e(n)≤c'f(n) +c''g(n) ≤ max{c',c''}f(n) + max{c',c''}g(n) = max{c',c''} (f(n)+g(n)) per ogni n maggiore di n'_0 e n''_0
- Ponendo c= max{c',c''} ed $n_0=\max\{n'_0, n''_0\}$, possiamo quindi affermare che
- d(n)+e(n) ≤c(f(n)+g(n)) per ogni n ≥ n_0 e cio` implica d(n)+e(n)=O(f(n)+g(n))

Bound asintotici per alcune funzioni di uso comune

Logaritmi

- $O(\log_a n) = O(\log_b n)$, $\Omega(\log_a n) = \Omega(\log_b n)$, $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$, per ogni costante a, b > 0.

Dim. per O (per le altre notazioni asintotiche le dimostrazioni sono simili)

dalla proprieta` 1 dei logaritmi si ha, $\log_a n = \log_b n/(\log_b a)$ (*)

- siccome banalmente $\log_b n = O(\log_b n)$ allora, per la regola 1 della notazione asintotica (slide 39), si ha $\log_b n/(\log_b a) = O(\log_b n)$
- siccome dalla (*) $\log_a n = \log_b n/(\log_b a)$ allora $\log_a n = O(\log_b n)$

analogamente possiamo dimostrare che $\log_b n = O(\log_a n)$

43

Bound asintotici per alcune funzioni di uso comune

Logaritmi

- $\log n = O(n)$.

  Dim. Dimostriamo per induzione che $\log_2 n \leq n$ per ogni $n \geq 1$.

  Base dell'induzione: Vero per n=1.

  Passo Induttivo: Supponiamo $\log_2 n \leq n$ vera per $n=k \geq 1$.

  Dimostriamo che è vera per k+1.

  1. $\log_2(k+1) \leq \log_2(2k) = \log_2 2 + \log_2 k = 1 + \log_2 k$

  Per ipotesi induttiva $\log_2 k \leq k$ e quindi

  2. $1+\log_2 k \leq k+1$.

  Dalla catena di disuguaglianze 1. e dalla disuguaglianza 2. si ha

  $\log_2(k+1) \leq k+1$.

44

Un utile richiamo

Parte intera inferiore:
La parte intera inferiore di un numero x è denotata con $\lfloor x \rfloor$ ed è definita come quell'unico intero per cui vale che $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. In altre parole, $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore o uguale di x (infatti dalla definizione si ha $\lfloor x \rfloor \leq x$ ma $\lfloor x \rfloor + 1 > x$)
Esempio: $\lfloor 4.3 \rfloor = 4$, $\lfloor 6.9 \rfloor = 6$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$

Proprietà 1: L'intero più piccolo strettamente maggiore di x è $\lfloor x \rfloor + 1$.
Dim. Siccome $\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero minore o uguale di x allora qualsiasi intero più grande di $\lfloor x \rfloor$ è maggiore di x. La proprieta` discende allora dal fatto che il piu` piccolo degli interi maggiori di $\lfloor x \rfloor$ è $\lfloor x \rfloor + 1$.

Proprietà 2: $\lfloor \lfloor a/b \rfloor / c \rfloor = \lfloor a/(bc) \rfloor$, per a, b e c interi con b e c maggiori di 0

45

Un utile richiamo

Parte intera superiore:
La parte intera superiore di un numero x è denotata con $\lceil x \rceil$ ed è definita come quell'unico intero per cui vale che $x \leq \lceil x \rceil < x+1$ In altre parole, $\lceil x \rceil$ è il più piccolo intero maggiore o uguale di x (infatti dalla definizione si ha $\lceil x \rceil \geq x$ ma $\lceil x \rceil - 1 < x$)
.
Esempio: $\lceil 4.3 \rceil = 5$, $\lceil 6.9 \rceil = 7$, $\lceil 3 \rceil = 3$

Proprietà 3: L'intero più grande strettamente minore di x è $\lceil x \rceil - 1$.
Dim. Siccome $\lceil x \rceil$ è il piu` piccolo intero maggiore o uguale di x allora qualsiasi intero piu` piccolo di $\lceil x \rceil$ è minore di x. La proprieta` discende allora dal fatto che il piu` grande intermo piu` piccolo di $\lceil x \rceil$ e $\lceil x \rceil - 1$.

Proprietà 4: $\lceil \lceil a/b \rceil / c \rceil = \lceil a/(bc) \rceil$ per a, b e c interi con b e c diversi da 0

46

Tempo logaritmico

Tipicamente si ha quando ogni passo riduce di un fattore costante il numero di passi che restano da fare

Per esercizio dimostriamo che il seguente for richiede tempo $\Theta(\log n)$

```
For (i=n; i ≧ 1;i=⌊i/2⌋)
  print(i)
```

Dimostrazione : Il for termina quando i diventa minore di 1.

Ad ogni iterazione il valore di i è minore o uguale della metà del valore che aveva in precedenza → dopo la k-esima iterazione $i = \underbrace{\lfloor \ldots \lfloor \lfloor n/2 \rfloor /2 \rfloor \ldots /2 \rfloor}_{\text{k divisioni}} = \lfloor n/2^k \rfloor$ per la proprieta` 2 della parte intera inferiore

Per sapere dopo quante iterazioni termina il for dobbiamo trovare il più piccolo k per cui $\lfloor n/2^k \rfloor < 1$. Cioe` k tale che $\lfloor n/2^k \rfloor < 1$ e $\lfloor n/2^{k-1} \rfloor \geq 1$

$$\lfloor n/2^k \rfloor < 1 \leftrightarrow n/2^k < 1 \leftrightarrow 2^k > n \leftrightarrow k > \log_2 n \quad (1)$$

$$\lfloor n/2^{k-1} \rfloor \geq 1 \leftrightarrow n/2^{k-1} \geq 1 \leftrightarrow 2^{k-1} \leq n \leftrightarrow k-1 \leq \log_2 n \quad (2)$$

k e` quindi il piccolo intero strettamente maggiore di $\log_2 n$ ; per la proprieta` 1 della parte intera inferiore si ha $k=\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

N.B. Se invece di venire diviso per 2, il valore di i viene diviso per una generica costante c>1 allora la base del log è c ma ai fini della valutazione asintotica non cambia niente.

Tempo logaritmico

```
For (i=1; i<= n;i=i*2)
  print(i)
```

Il for in alto richiede tempo $\Theta(\log n)$

Dimostrazione : Il for termina quando i diventa maggiore di n.

- Ad ogni iterazione il valore di i raddoppia → dopo la k-esima iterazione $i = 2^k$.
- Per sapere dopo quante iterazioni termina il for dobbiamo trovare **il più piccolo k per cui $2^k > n$.** In altre parole vogliamo k tale che **$2^k > n$ e $2^{k-1} \leqq n$**
- Risolvendo le disequazioni $2^k > n$ e $2^{k-1} \leq n$ otteniamo $2^k > n \leftrightarrow k > \log_2 n$ e $2^{k-1} \leqq n \leftrightarrow k-1 \leq \log_2 n$
- Le due disuguaglianze ottenute implicano $\log_2 n - 1 < k - 1 \leq \log_2 n$ e quindi si ha $k-1 = \lfloor \log_2 n \rfloor$ da cui $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.
- Dopo esattamente $k=\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ iterazioni $i=2^k$ diventa più grande di n
- → Numero iterazioni è $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 = \Theta(\log n)$

N.B. Se invece di raddoppiare, il valore di i viene moltiplicato per una generica costante c>1 allora la base del log è c ma ai fini della valutazione asintotica non cambia niente.

Tempo logaritmico: $O(\log n)$

Tipicamente si ha quando ogni passo riduce di un fattore costante il numero di passi che restano da fare

Ricerca binaria. Dato un array A ordinato di n numeri ed un numero x vogliamo determinare se x è in A

```
binarySearch(A, n, x)
 l = 0;
 r =n-1
while l <= r
      c= (l+r)/ 2 //assumiamo troncamento
      if x = A[c]
            return true
      if x < A[c]
            r =c-1
      else l=c+1 //caso x>A[c]
return false
```

Se la dimensione r-l+1 dell'intervallo [l,r] è pari allora il sottointervallo di destra [c+1,r] ha un elemento in più rispetto a quello di sinistra. In caso contrario i due sottointervalli hanno la stessa dimensione.
Caso r-l+1 pari: intervallo di sinistra ha $\lfloor (r-l+1)/2 \rfloor - 1$ elementi e quello di destra $\lfloor (r-l+1)/2 \rfloor$.
Caso r-l+1 dispari: entrambi gli intervalli hanno $\lfloor (r-l+1)/2 \rfloor$ elementi

Tempo logaritmico: $O(\log n)$

Analisi ricerca binaria.

Il while termina quando l>r, cioè quanto il range [l,r] vuoto.

- Inizialmente [l,r]=[0,n-1] e quindi contiene n elementi
- Dopo la prima iterazione, [l,r] contiene al più $\lfloor n/2 \rfloor$ elementi
- Dopo la seconda iterazione, [l,r] contiene al più $\lfloor \lfloor n/2 \rfloor /2 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor$ elementi
- Dopo la terza iterazione, [l,r] contiene al più $\lfloor \lfloor n/4 \rfloor /2 \rfloor = \lfloor n/8 \rfloor$ elementi
- …
- Dopo la k-esima iterazione, [l,r] contiene al più $\lfloor n/2^k \rfloor$ elementi
- Per sapere quando termina il ciclo di while dobbiamo trovare il più piccolo intero k per cui $\lfloor n/2^k \rfloor < 1$

- Abbiamo gia` dimostrato che questo k e` $\Theta(\log n)$

- NB: per sbarazzarci deglle parti intere inferiori annidate abbiamo usato la proprieta` 2.

Espressione O	nome
$O(1)$	costante
$O(\log\log n)$	$\log\log$
$O(\log n)$	logaritmico
$O(\sqrt[c]{n}),\ c>1$	sublineare
$O(n)$	lineare
$O(n\log n)$	$n\log n$
$O(n^2)$	quadratico
$O(n^3)$	cubico
$O(n^k)\ (k\geq 1)$	polinomiale
$O(a^n)\ (a>1)$	esponenziale

51

Tempo $O(\sqrt{n})$

```
j=0;
i=0;
while(i<=n){
   j++;
   i=i+j;
}
```

Analisi :

Il while termina quando i diventa maggiore di n.

All'iterazione k al valore di i viene sommato j=k per cui dopo aver iterato il while k volte il valore di i è (1+2+3+...+k) =k(k+1)/2.

Affinche' si interrompa il while e` sufficiente che k(k+1)/2 > n

Per semplicità osserviamo che $k^2/2 \leq k(k+1)/2$ per cui se $k^2/2 > n$ allora $k(k+1)/2 > n$.

Risolviamo $k^2/2 > n$.

$k^2/2 > n \leftrightarrow k^2 > 2n \leftrightarrow k > (2n)^{1/2}$ (le implicazioni utili sono $\leftarrow$)

Dalla proprietà 1, $\lfloor (2n)^{1/2} \rfloor +1$ e` il più piccolo intero maggiore di $(2n)^{1/2}$ per cui dopo $\lfloor (2n)^{1/2} \rfloor +1 = O(\sqrt{n})$ iterazioni il while termina.

52

Tempo $O(\sqrt{n})$

```
j=0;
i=0;
while(i<=n){
   j++;
   i=i+j;
}
```

Analisi :

Il while termina quando i diventa maggiore di n.

All'iterazione k al valore di i viene sommato j=k per cui dopo aver iterato il while k volte il valore di i è $(1+2+3+...+k) = k(k+1)/2$.

Affinche' si interrompa il while e` sufficiente che $k(k+1)/2 > n$

Risolviamo la disequazione $k^2/2 + k/2 - n > 0$: le soluzioni di $k^2/2 + k/2 - n = 0$ sono $k_1 = -1/2-(1/4+4n/2)^{1/2}$ e $k_2 = -1/2+(1/4+4n/2)^{1/2}$ e la disequazione è soddisfatta per $k < k_1$ e $k > k_2$.

Siccome il nostro k è positivo puo` essere solo $k > k_2$.

Quindi dopo $k > -1/2+(1/4+2n)^{1/2}$ iterazioni si ha $i=k(k+1)/2 > n$ e il while si interrompe.

Dalla proprietà 1, il piu` piccolo intero strettamente maggiore di $-1/2+(1/4+4n/2)^{1/2}$ è $\lfloor -1/2+(1/4+2n)^{1/2} \rfloor+1 \leq \lfloor (1/4n+2n)^{1/2} \rfloor+1$. Quindi dopo $O(\sqrt{n})$ il while termina. Una singola iterazione del corpo del while richiede tempo costante quindi il tempo totale del while è $O(\sqrt{n})$

Logaritmi a confronto con polinomi e radici

Per ogni **costante** $x > 0$, $\log n = O(n^x)$. (N.B. x può essere < 1)

Dim. **Se $x \geq 1$** si ha $n \leq n^x$ per ogni $n \geq 0$ e quindi $n=O(n^x)$. Abbiamo già dimostrato che $\log n=O(n)$ per cui dalla proprietà transitiva si ha $\log n=O(n^x)$

Consideriamo il caso $x<1$. Vogliamo trovare le costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tale che $\log n \leq cn^x$ per ogni $n \geq n_0$

Siccome sappiamo che $\log_2 m < m$ per ogni $m \geq 1$ allora ponendo $m=n^x$ con $n \geq 1$, si ha $\log_2 n^x < n^x$ da cui $x\log_2 n < n^x$ e dividendo entrambi i membri per x si ha $\log_2 n < 1/x\, n^x$. Perchè la disequazione $\log_2 n \leq cn^x$ sia soddisfatta per ogni $n \geq n_0$, basta quindi prendere **$c=1/x$** ed **$n_0=1$.**

NB: abbiamo visto che nella notazione asintotica possiamo eliminare la base del log se questa e` costante

Potenze di logaritmi a confronto con polinomi e radici

Per ogni $x > 0$ e $b>0$ **costanti**, $(\log n)^b = O(n^x)$.

Dim.

Vogliamo trovare le costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $(\log n)^b \leq cn^x$ per ogni $n \geq n_0$

Risolviamo la disequazione $(\log n)^b \leq cn^x$:

$(\log n)^b \leq cn^x \leftrightarrow \log n \leq c^{1/b} n^{x/b}$ ($\leftarrow$ vale perchè $\log n > 0$)

Troviamo le costanti $c>0$ ed $n_0 \geq 0$ tali che $\log n \leq c^{1/b} n^{x/b}$ per ogni $n \geq n_0$

Abbiamo già dimostrato nella slide precedente che $\log n = O(n^y)$ per ogni $y>0$. Ciò vale anche se poniamo $y = x/b$. Quindi esistono due costanti $c'>0$ e $n'_0 \geq 0$ tali che $\log n \leq c' n^{x/b}$ per ogni $n \geq n'_0$.

Di conseguenza basta imporre $c^{1/b} = c'$ ed $n_0 = n'_0$ da cui $c=(c')^b$ ed $n_0 = n'_0$

55

Potenze di logaritmi a confronto con polinomi e radici

Dimostrare che per ogni $x > 0$, $a>0$ e $b>0$ **costanti**, $(\log n^a)^b = O(n^x)$.

La dimostrazione è molto semplice se si usa quanto visto nelle slide precedenti

56

Potenze di logaritmi a confronto con polinomi e radici

Per esercizio dimostriamo che per ogni $x > 0$ **costante**, $\log n$ **non** è $\Omega(n^x)$.

Per definizione di Ω: $\log n = \Omega(n^x)$ → esistono due costanti $c>0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $\log n \geq cn^x$ per ogni $n \geq n_0$

risolviamo la disequazione $\log n \geq cn^x$
$\log n \geq cn^x \leftrightarrow c \leq (\log n)/n^x$

quindi la costante c e la costante n_0 devono essere tali che $c \leq (\log n)/n^x$ per ogni $n \geq n_0$

il limite di $(\log n)/n^x$ al tendere di n all'infinito è 0 per cui comunque scegliamo piccola la costante c esistera` un n_c per cui $(\log n)/n^x < c$ per ogni $n \geq n_c$

quindi per qualsiasi costante c **non** è possibile trovare una costante n_0 per cui $\log n \geq cn^x$ per ogni $n \geq n_0$

57

Tempo O(n log n)

Tempo $O(n \log n)$. Tipicamente viene fuori quando si esamina la complessità di algoritmi basati sulla tecnica del divide et impera

Ordinamento. Mergesort e heapsort sono algoritmi di ordinamento che effettuano $O(n \log n)$ confronti.

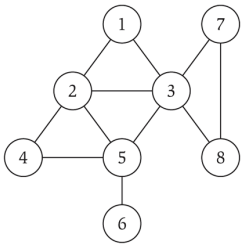
Il più grande intervallo vuoto. Dati n time-stamp $x_1, \ldots, x_n$ che indicano gli istanti in cui le copie di un file arrivano al server, vogliamo determinare qual è l'intervallo di tempo più grande in cui non arriva alcuna copia del file.

Soluzione $O(n \log n)$. Ordina in modo non decrescente i time stamp. Scandisci la lista ordinata dall'inizio computando la differenza tra ciascun istante e quello successivo. Prendi il massimo delle differenza calcolate. Tempo $O(n \log n + n) = O(n \log n)$

58

Grafo

- Esempio (vedremo meglio questo concetto nelle prossime lezioni)



V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
E = { 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6 }
n = 8
m = 11

Tempo polinomiale $O(n^k)$

Insieme indipendente di dimensione k (k costante). Dato un grafo, esistono k nodi tali che nessuno coppia di nodi è connessa da un arco?

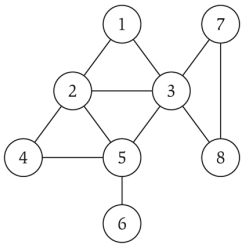
Soluzione $O(n^k)$. Enumerare tutti i sottoinsiemi di k nodi.

```
foreach sottoinsieme S di k nodi {
   controlla se S è un insieme indipendente
   if (S è un insieme indipendente)
      riporta che S è in insieme indipendente
   }
}
```

- Controllare se S è un insieme indipendente = $O(k^2)$
- Numero di sottoinsiemi di k elementi = $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots(2)(1)} \leq \frac{n^k}{k!}$
- Tempo totale $O(k^2 n^k / k!) = O(n^k)$

Insieme indipendente

- Esempio: per k=3 l'algoritmo riporta gli insiemi {1,4,6}, {1,4,7}, {1,4,8},{1,5,7},{1,5,8},{1,6,7}, {1,6,8}, {2,6,7},{2,6,8},{3,4,6}, {4,6,7},{4,6,8}



V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
E = { 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6 }
n = 8
m = 11

61

Tempo esponenziale

Esempio:
Massimo insieme indipendente . Dato un grafo G, qual è la dimensione massima di un insieme indipendente di G?

Def. insieme indipendente: un insieme indipendente di un grafo è un sottoinsieme di vertici a due a due non adiacenti

Soluzione $O(n^2 2^n)$. Esamina tutti i sottoinsiemi di vertici.
NB: Il numero totale di sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n

```
S* ← ϕ
foreach sottoinsieme S di nodi {
   controlla se S è un insieme indipendente
   Se (S è il più grande  insieme indipendente visto finora)
      aggiorna S* ← S
   }
}
```


62

Tempo esponenziale

Per esercizio proviamo che il tempo del nostro algoritmo per il massimo insieme indipendente è $\Theta(n^2 2^n)$

Dim: Assumiamo per semplicità n dispari

- Stimiamo il tempo per controllare l'indipendenza di tutti gli insiemi di dimensione maggiore o uguale di $\lceil n/2 \rceil$. Un limite inferiore a questo tempo è sicuramente un limite inferiore al tempo totale.

1. Il numero di insiemi di dimensione maggiore o uguale di $\lceil n/2 \rceil$ è 2^{n-1}
   Dim. Indichiamo con $S_1, S_2, S_3, \ldots$ gli insiemi di dimensione maggiore o uguale di $\lceil n/2 \rceil$
   - Per ogni insieme S_i di dimensione k , per $k=\lceil n/2 \rceil, \ldots, n$, il suo complemento $V-S_i$ ha dimensione n-k con $n-k < \lceil n/2 \rceil$.
   - Il complemento di un insieme è unico quindi se metto da una parte tutti gli insiemi $S_1, S_2, S_3, \ldots$ e dall'altra i complementi $V-S_1, V-S_2, V-S_3, \ldots$ avro` lo stesso numero di insiemi da una parte e dall'altra e per quanto detto al punto precedente gli insiemi $V-S_1, V-S_2, V-S_3, \ldots$ hanno dimensione $< \lceil n/2 \rceil$ → ho diviso tutti i $2^n$ insiemi di nodi in due meta` , una contenente gli insiemi di dimensione $\geq \lceil n/2 \rceil$ e l'altra gli insiemi di dimensione $< \lceil n/2 \rceil$ → numero insiemi di dimensione maggiore o uguale di $\lceil n/2 \rceil$ è numero totale insiemi $/2 = 2^n/2 = 2^{n-1}$
2. Il tempo per controllare l'indipendenza di ciascuno di questi insiemi è $\Omega(n^2)$ perché dobbiamo controllare almeno $n/2(n/2-1)/2$ coppie di nodi nel caso pessimo.

1. e 2. → Tempo totale per controllare insiemi di dimensione maggiore o uguale di $\lceil n/2 \rceil$ è $\Omega(n^2 2^{n-1}) = \Omega(n^2 2^n/2) = \Omega(n^2 2^n)$ → Algoritmo ha tempo $\Omega(n^2 2^n)$

63

Tempo esponenziale

Siccome nelle due slide precedenti abbiamo dimostrato che vale sia $O(n^2 2^n)$ che $\Omega(n^2 2^n)$ allora abbiamo dimostrato che il tempo **dell'algoritmo** è $\Theta(n^2 2^n)$. E se n è pari?

64

Esercizio:

Ci chiediamo: 3^n è $O(2^n)$?

Sappiamo che 3^n è $O(2^n)$ se e solo se esistono due costanti $c>0$ ed $n_0 \geq 0$ t.c. $3^n \leq c \cdot (2^n)$ per ogni $n \geq n_0$.

Proviamo a determinare tali costanti risolvendo la disequazione $3^n \leq c \cdot 2^n$ rispetto a c

$3^n \leq c \cdot 2^n \leftrightarrow c \geq 3^n/2^n = (3/2)^n$. Occorre quindi prendere $c \geq (3/2)^n$.

La funzione $(3/2)^n$ cresce al crescere di n e tende all'infinito al tendere di n all'infinito. Siccome $(3/2)^n$ tende all'infinito, qualsiasi valore scegliamo per la costante c, questo valore sarà superato da $(3/2)^n$ per n sufficientemente grande.

Ne deduciamo che **non** esistono $c>0$ ed $n_0 \geq 0$ t.c. $3^n \leq c \cdot (2^n)$ per ogni $n \geq n_0$.

→ Abbiamo dimostrato che 3^n non è $O(2^n)$