Algoritmi greedy
VI parte

Progettazione di Algoritmi a.a. 2019-20
Matricole congrue a 1
Docente: Annalisa De Bonis

129

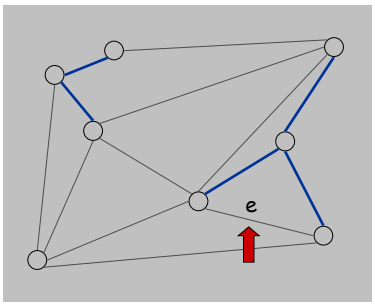
Algoritmo di Prim

- Esercizio: modificare il codice dell'algoritmo di Prim in modo che l'algoritmo restituisca l'insieme di T degli archi che fanno parte dello MST.

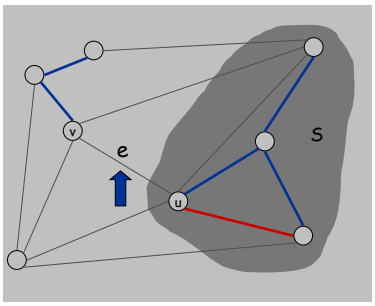
130

Algoritmo di Kruskal

- Algoritmo di Kruskal's . [Kruskal, 1956]
  - Considera ciascun arco in ordine non decrescente di peso
  - Caso 1: Se e crea un cliclo allora scarta e
  - Case 2: Altrimenti inserisce e in T
  - NB: Durante l'esecuzione di Kruskal su G=(V,E), l'insieme di vertici V e l'insieme di archi in T formano una foresta composta da uno o più alberi, cioè le componenti connesse del grafo (V,T) sono alberi.



Caso 1



Caso 2

131

131

Esempio

Archi in MST : rossi (già selezionati) e verdi (non ancora selezionati)

T={(r,q),(t,u),(t,x),(v,s),(s,y)} archi dello MST già inseriti

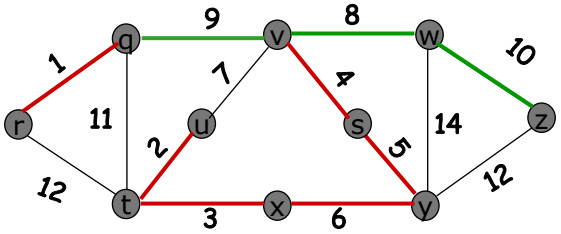
Componenti connesse (alberi) in G_T=(V,T) :

C_1=({r,q},{(r,q)})

C_2={{u,t,x,v,s,y},{(u,t),(t,x), (v,s),(s,y),(x,y)})

C_4=({w},∅)

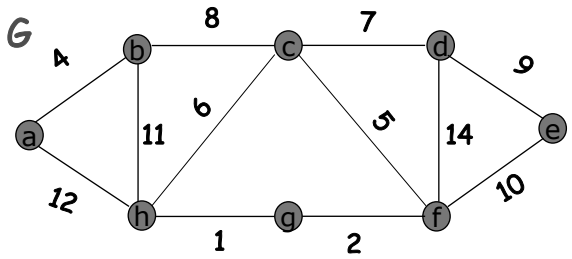
C_5=({z},∅)



Il prossimo arco selezionato è (v,w)

132

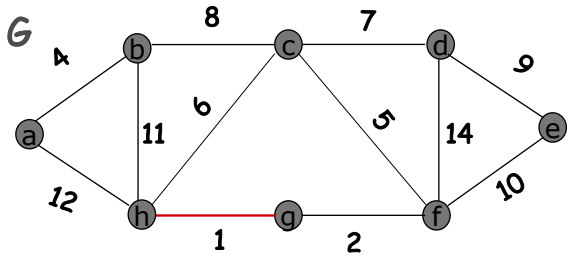
Un esempio



T = { }

133

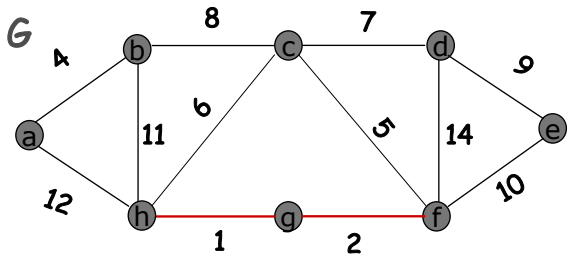
Un esempio



T = {(h,g) }

134

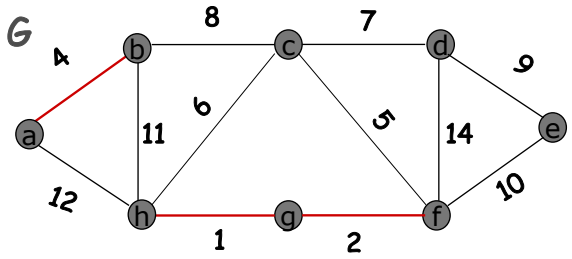
Un esempio



T = {(h,g), (g,f) }

135

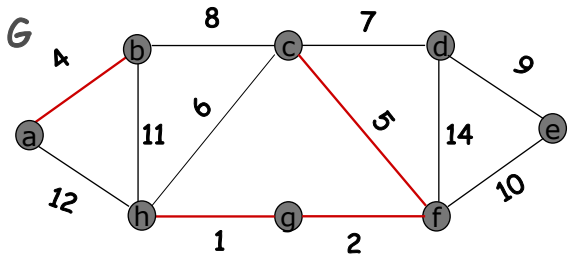
Un esempio



T = {(h,g), (g,f), (a,b) }

136

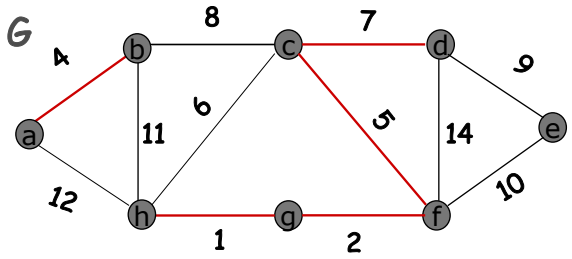
Un esempio



T = {(h,q), (g,f), (a,b),(c,f) }

137

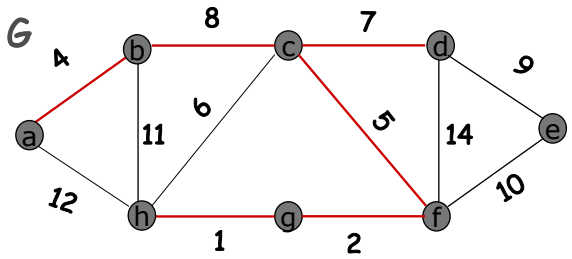
Un esempio



T = {(h,g), (g,f), (a,b),(c,f),(c,d)}

138

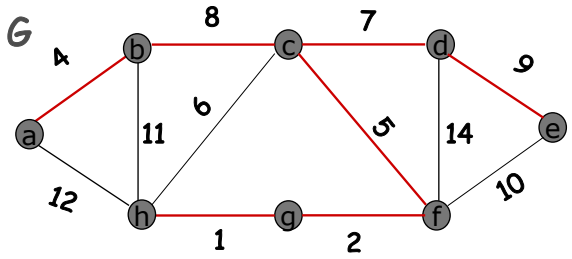
Un esempio



T = {(h,g), (g,f), (a,b),(c,f),(c,d), (b,c)}

139

Un esempio



T = {(h,g), (g,f), (a,b),(c,f),(c,d), (b,c),(d,e) }

140

Correttezza dell'algoritmo di Kruskal

L'insieme di archi T prodotto dall'algoritmo di Kruskal è un MST

- Dim. (per il caso in cui gli archi hanno costi a due a due distinti)
- Prima dimostriamo che ogni arco di T è anche un arco di MST
- Ad ogni passo l'algoritmo inserisce in T l'arco di **peso minimo** tra quelli **non ancora esaminati** e **che non creano cicli in T**.
- Sia **e=(u,v)** l'arco inserito in un certo passo. Osserviamo che T fino a quel momento non contiene un percorso che collega **u** a **v, altrimenti introducendo e=(u,v) in T si creerebbe un ciclo.**
- Ricordiamo che i vertici del grafo e gli archi di T formano una foresta di alberi. Consideriamo l'albero contenente **u** nel momento in cui e=**(u,v)** viene inserito in T. Chiamiamo S l'insieme dei vertici contenuti in questo albero, cioè l'insieme dei nodi connessi ad u fino a quel momento. Ovviamente **v** non è in S altrimenti esisterebbe un percorso da **u** a **v**. Quindi **e=(u,v)** attraversa il taglio [S, V-S] .

Correttezza dell'algoritmo di Kruskal

L'arco **e=(u,v)** è l'arco di peso minimo tra quelli che attraversano il taglio [S, V-S]

Dim.

- Dimostriamo che nessuno degli archi esaminati dall'algoritmo prima di e=(u,v) unisce un nodo di S ad un nodo di V-S.
  - Supponiamo per assurdo che l'algoritmo abbia esaminato prima dell'arco e=(u,v) un arco (x,y) che unisce un nodo x di S ad un nodo y di V-S. L'algoritmo avrebbe aggiunto l'arco (x,y) ad S visto che la sua introduzione non avrebbe creato cicli. Di conseguenza y non potrebbe trovarsi in V-S quando e=(u,v) viene esaminato e introdotto in T. Siamo arrivati ad una contraddizione in quanto stiamo supponendo che y sia in V-S quando ciò accade.
- Quindi e=(u,v) è il primo arco esaminato dall'algoritmo tra quelli che attraversano il taglio [S, V-S] . Siccome gli archi sono esaminati in ordine non decrescente di peso, e=(u,v) è l'arco di peso minimo che attraversa il taglio [S, V-S]

Correttezza dell'algoritmo di Kruskal

- Abbiamo dimostrato che per ciascuno degli archi (u,v) selezionati dall'algoritmo di Kruskal esiste un taglio [S, V-S] per cui (u,v) è l'arco di peso minimo tra quelli che attraversano il taglio [S, V-S] .
- Quindi per la proprietà del taglio tutti gli archi selezionati dall'algoritmo sono nel minimo albero ricoprente.

Ora dimostriamo che al termine dell'esecuzione dell'algoritmo T è un albero ricoprente.

- T è un albero ricoprente perchè
  - l'algoritmo non introduce mai cicli in T (ovvio!)
  - connette tutti i vertici
    - Se così non fosse esisterebbe un insieme W non vuoto e di al più n-1 vertici tale che non c'è alcun arco di T che connette un vertice di W ad uno di V-W.
    - Siccome il grafo input G è connesso devono esistere uno o più archi in G che connettono vertici di W a vertici di V-W
    - Dal momento che l'algoritmo di Kruskal esamina tutti gli archi avrebbe selezionato sicuramente l'arco di costo minimo tra quelli che connettono un vertice di W ad uno di V-W. Non è quindi possibile che in T non vi sia un arco che connette un nodo in W ad uno in V-W.

Implementazione dell'algoritmo di Kruskal

- Abbiamo bisogno di rappresentare le componenti connesse (alberi della foresta)
- Ciascuna componente connessa è un insieme di vertici disgiunto da ogni altro insieme.

```
Kruskal(G, c) {
   Sort edges weights so that c1 ≤ c2 ≤ ... ≤ cm.
   T ← ϕ

   foreach (u ∈ V) make a set containing singleton u

   for i = 1 to m                    are u and v in different connected components?
      (u,v) = ei                     ↙
      if (u and v are in different sets) {
         T ← T ∪ {ei}
         merge the sets containing u and v
      }                              ↖
   return T                          merge two components
}
```

Implementazione dell'algoritmo di Kruskal

- Ciascun albero della foresta è rappresentato dal suo insieme di vertici
- Per rappresentare questi insiemi di vertici, si utilizza la struttura dati Union-Find per la rappresentazione di insiemi disgiunti
- Operazioni supportate dalla struttura dati Union-Find
- MakeUnionFind(S): crea una collezione di insiemi ognuno dei quali contiene un elemento di S
  - Nella fase di inizializzazione dell'algoritmo di Kruskal viene invocato MakeUnionFind(V): ciascun insieme creato corrisponde ad un albero con un solo vertice.
- Find(x): restituisce l'insieme che contiene x
  - Per ciascun arco esaminato (u,v), l'algoritmo di Kruskal invoca find(u) e find(v). Se entrambe le chiamate restituiscono lo stesso insieme allora vuol dire che u e v sono nello stesso albero e quindi (u,v) crea un ciclio in T.
- Union(X,Y): unisce gli insiemi X e Y
  - Se l'arco (u,v) non crea un ciclo in T allora l'algoritmo di Kruskal invoca Union(Find(u),Find(v)) per unire le componenti connesse di u e v in un'unica componente connessa

145

145

Implementazione dell'algoritmo di Kruskal con Union-Find

```
Kruskal(G, c) {
   Sort edges weights so that c1 ≤ c2 ≤ ... ≤ cm.
   T ← ϕ

   MakeUnionFind(V)   //create n singletons for the n vertices

   for i = 1 to m
      (u,v) = ei
      if (Find(u)≠Find(v)) {
         T ← T ∪ {ei}
         Union(Find(u),Find(v))
      }
   return T
}
```


146

146

Implementazione di Union-Find con array

- La struttura dati Union-Find può essere implementata in vari modi
- Implementazione di Union-Find con array
  - Gli elementi sono etichettati con interi consecutivi da 1 ad n e ad ogni elemento è associata una cella dell'array S che contiene il nome del suo insieme di appartenenza.
  - Find(x): $O(1)$. Basta accedere alla cella di indice x dell'array S
  - Union: $O(n)$. Occorre aggiornare le celle associate agli elementi dei due insiemi uniti.
  - MakeUnionFind $O(n)$: Occorre inizializzare tutte le celle.

Analisi dell'algoritmo di Kruskal in questo caso:

Inizializzazione $O(n)+O(m \log m)=O(m \log n^2)=O(m \log n)$.

- $O(n)$ per creare la struttura Union-Find e $O(m \log m)$ per ordinare gli archi

Per ogni arco esaminato: $O(1)$ per le 2 find.

- In totale, 2m find → $O(m)$

Per ogni arco aggiunto a T : $O(n)$ per la union

- In totale n-1 union (perché?) → $O(n^2)$

Algoritmo: $O(m \log n)+ O(n^2)$

147

Implementazione di Union-Find con array e union-by-size

- Implementazione di Union-Find con array ed union-by-size
  - Stessa implementazione della slide precedente ma si usa anche un altro array A per mantenere traccia della cardinalità di ciascun insieme. L'array ha n celle perché inizialmente ci sono n insiemi.
  - La Find(x) è identica a prima
  - MakeUnionFind $O(n)$: occorre inizializzare tutte le celle S e tutte le celle di A. Inizialmente le celle di A sono tutte uguali ad 1.
  - Union: si guarda quali dei due insiemi è più piccolo e si aggiornano solo le celle di S corrispondenti agli elementi di questo insieme. In queste celle viene messo il nome dell'insieme più grande. La cella dell'array A corrispondente all'insieme più piccolo viene posta a 0 mentre quella corrispondente all'insieme più grande viene posta uguale alla somma delle cardinalità dei due insiemi uniti.
    - Corrisponde ad inserire gli elementi dell'insieme più piccolo in quello più grande.

148

Implementazione di Union-Find con array e union-by-size

- Nell'implementazione con union-by-size la singola operazione di unione richiede ancora O(n) nel caso pessimo perché i due insiemi potrebbero avere entrambi dimensione pari ad n diviso per una costante.
- Vediamo però cosa accade quando consideriamo una sequenza di unioni.
- Inizialmente tutti gli insiemi hanno dimensione 1.

Continua nella prossima slide

149

Implementazione di Union-Find con array e union-by-size

Affermazione. Una qualsiasi sequenza di unioni richiede al più tempo O(n log n).

Dim. Il tempo di esecuzione di una sequenza di Union dipende dal numero di aggiornamenti che vengono effettuati nell'array S.

- Calcoliamo quanto lavoro viene fatto per un qualsiasi elemento x.
- Questo lavoro dipende dal numero di volte in cui viene aggiornata la cella S[x] e cioè dal numero di volte in cui x viene spostato da un insieme ad un altro per effetto di una Union.
- Ogni volta che facciamo un'unione, x cambia insieme di appartenenza solo se proviene dall'insieme che ha dimensione minore o uguale dell'altro. Ciò vuol dire che l'insieme risultante dall'unione ha dimensione pari almeno al doppio dell'insieme da cui proviene x.
- Dopo un certo numero k di unioni che richiedono lo spostamento di x, l'elemento x si troverà in un insieme di taglia almeno 2^k→ x viene spostato al più log(n) volte in quanto, al termine della sequenza di unioni, x si troverà in un insieme B di cardinalità al più n.
- Quindi per ogni elemento viene fatto un lavoro che richiede tempo O(log n). Siccome ci sono n elementi, in totale il tempo richiesto dalla sequenza di Union è O(n log n).

150

Implementazione di Union-Find con array e union-by-size

Analisi algoritmo di Kruskal in questo caso:

- Inizializzazione $O(n)+O(m \log m)=O(m \log m)$.
  - $O(n)$ creare la struttura Union-Find e
  - $O(m \log m)$ ordinare gli archi
- In totale il numero di find è 2m che in totale richiedono $O(m)$
- Si effettuano esattamente n-1 union (perché?). Queste n-1 union, per il risultato sopra dimostrato, richiedono $O(n \log n)$

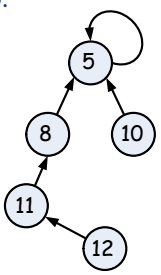
Algoritmo: $O(m \log m+n \log n)=O(m \log m)=O(m \log n^2) = O(m \log n)$

151

Implementazione basata su struttura a puntatori

- Insiemi rappresentati da strutture a puntatori
- Ogni nodo contiene un campo per l'elemento ed un campo con un puntatore ad un altro nodo dello stesso insieme.
- In ogni insieme vi è un nodo il cui campo puntatore punta a sé stesso. L'elemento in quel nodo dà nome all'insieme
- Inizialmente ogni insieme è costituito da un unico nodo il cui campo puntatore punta al nodo stesso.

Insieme chiamato 5

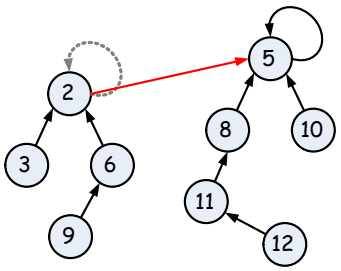


152

Union

- Per eseguire la union di due insiemi A e B, dove A è indicato con il nome dell' elemento x mentre B con il nome dell'elemento y, si pone nel campo puntatore del nodo contenente x un puntatore al nodo contenente y. In questo modo y diventa il nome dell'insieme unione. Si può fare anche viceversa, cioè porre nel campo puntatore del nodo contenente y un puntatore al nodo contenente x. In questo caso, il nome dell'insieme unione è x.

- Tempo: O(1)
- Unione dell'insieme di nome 2 con quello di nome 5. L'insieme unione viene indicato con 5.



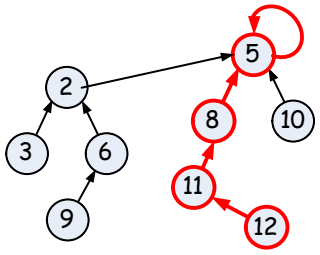
153

Find

- Per eseguire una find, si segue il percorso che va dal nodo che contiene l'elemento passato in input alla find fino al nodo che contiene l'elemento che dà nome all'insieme (nodo il cui campo puntatore punta a se stesso)

- Tempo: O(n) dove n è il numero di elementi nella partizione.
- Il tempo dipende dal numero di puntatori attraversati per arrivare al nodo contenente l'elemento che dà nome all'insieme.
- Il caso pessimo si ha quando la partizione è costituita da un unico insieme ed i nodi di questo insieme sono disposti uno sopra all'altro e ciascun nodo ha il campo puntatore che punta al nodo immediatamente sopra di esso

Find(12)



154

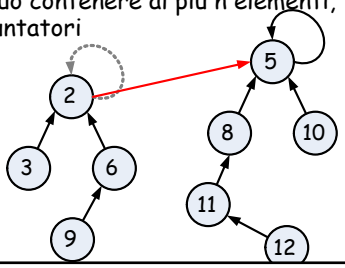
Euristica per migliorare l' efficienza

- **Union-by-size:** Diamo all'insieme unione il nome dell'insieme più grande

In questo modo find richiede tempo O(log n)

Dim.

- Contiamo il numero massimo di puntatori che possono essere attraversati durante l'esecuzione di un'operazione di find
- Osserviamo che un puntatore viene creato solo se viene effettuata una unione. Quindi attraversando il puntatore da un nodo contenente x ad uno contenente y passiamo da quello che prima era l'insieme x all'insieme unione degli insiemi x e y. Poiché usiamo la union-by-size, abbiamo che l'unione di questi due insiemi ha dimensione pari almeno al doppio della dimensione dell'insieme x
- Di conseguenza, ogni volta che attraversiamo un puntatore da un nodo ad un altro, passiamo in un insieme che contiene almeno il doppio degli elementi contenuti nell'insieme dal quale proveniamo.
- Dal momento che un insieme può contenere al più n elementi, in totale si attraversano al più O(log n) puntatori



155

Euristica per migliorare l' efficienza

- **Union-by-size**

- Consideriamo la struttura dati Union-Find creata invocando MakeUnionFind su un insieme S di dimensione n. Se si usa l'implementazione della struttura dati Union-Find basata sulla struttura a puntatori che fa uso dell'euristica union-by-size allora si ha
- Tempo Union : O(1) (manteniamo per ogni nodo un ulteriore campo che tiene traccia della dimensione dell'insieme corrispondente)
- Tempo MakeUnionFind: O(n) occorre creare un nodo per ogni elemento.
- Tempo Find: O(log n) per quanto visto nella slide precedente

Kruskal con questa implementazione di Union-Find richiede
$O(m \log m) = O(m \log n^2) = O(m \log n)$ per l'ordinamento
$O(m \log n)$ per le $O(m)$ find
$O(n)$ per le n-1 Union.

In totale $O(m \log n)$
come nel caso in cui si usa l'implementazione di Union-Find basata sull'array con uso dell'euristica union-by-size

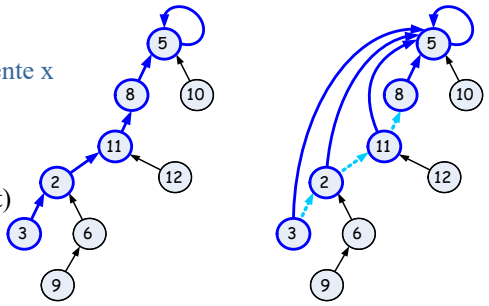
156

Un' altra euristica per l' efficienza

- **Path Compression** (non ci serve per migliorare il costo dell'algoritmo di Kruskal)
  - Dopo aver eseguito un'operazione di Find, tutti i nodi attraversati nella ricerca avranno il campo puntatore che punta al nodo contenente l'elemento che dà nome all'insieme
  - Intuizione: ogni volta che eseguiamo la Find con in input un elemento x di un certo insieme facciamo del lavoro in più che ci fa risparmiare sulle successive operazioni di Find effettuate su elementi incontrati durante l'esecuzione di Find(x). Questo lavoro in più non fa comunque aumentare il tempo di esecuzione asintotico della singola Find.

Indichiamo con q(x) il nodo contenente x

```
Find(x)
 if q(x) ≠q(x).pointer
  then  p← q(x).pointer
        q(x).pointer ← Find(p.element)
return q(x).pointer
```



157

Union-by-size e path-compression

- Se si utilizza le euristiche union-by-size e path-compression allora una sequenza di n operazioni union-find richiede tempo $O(n\ \alpha(n))$
- $\alpha(n)$ è l'inversa della funzione di Ackermann
- $\alpha(n) \leq 4$ per tutti i valori pratici di n

158