Grafi (IV parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2019-20

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

1

1

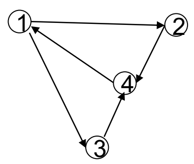
Visita di grafi direzionati

- Raggiungibilità con direzione. Dato un nodo s, trova tutti i nodi raggiungibili da s.
- Il problema del più corto percorso diretto da s a t. Dati due nodi s e t, qual è la lunghezza del percorso più corto da s a t?
- Visita di un grafo. Le visite BFS e DFS si estendono naturalmente ai grafi direzionati.
  - Quando si esaminano gli archi incidenti su un certo vertice u, si considerano solo quelli uscenti da u.
- Web crawler. Comincia dalla pagina web s. Trova tutte le pagine raggiungibili a partire da s, sia direttamente che indirettamente.

Connettività forte

- Def. I nodi u e v sono mutualmente raggiungibili se c'è un percorso da u a v e anche un percorso da v a u.

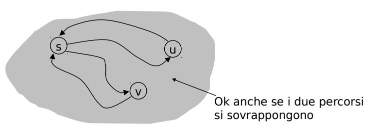
- Def. Un grafo in cui ogni ogni coppia di nodi è mutualmente raggiungibile si dice fortemente connesso



3

Connettività forte

- Lemma. Sia s un qualsiasi nodo di un grafo direzionato G. G è fortemente connesso se e solo se ogni nodo è raggiungibile da s ed s è raggiungibile da ogni nodo.
- Dim. $\Rightarrow$ Segue dalla definizione.
- Dim. $\Leftarrow$ Un percorso da u a v si ottiene concatenando il percorso da u ad s con il percorso da s a v. Un percorso da v ad u si ottiene concatenando il percorso da v ad s con il percorso da s ad u.



4

Algoritmo per la connettività forte

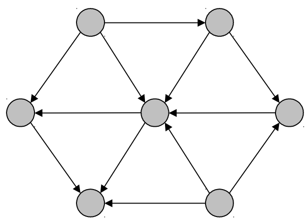
Teorema. Si può determinare se G è fortemente connesso in tempo $O(m + n)$.

Dim.

- Prendi un qualsiasi nodo s.
- Esegui la BFS con sorgente s in G.
- Crea il grafo G^{rev} invertendo la direzione di ogni arco in G
- Esegui la BFS con sorgente s in G^{rev}.
- Restituisci true se e solo se tutti i nodi di G vengono raggiunti in entrambe le esecuzioni della BFS.
- La correttezza segue dal lemma precedente.
  - La prima esecuzione trova i percorsi da s a tutti gli altri nodi
  - La seconda esecuzione trova i percorsi da tutti gli altri nodi ad s perchè avendo invertito gli archi un percorso da s a u è di fatto un percorso da u ad s nel grafo di partenza.

Grafi direzionati aciclici (DAG)

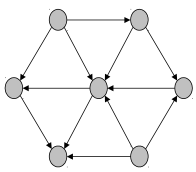
- Def. Un DAG è un grafo direzionato che non contiene cicli direzionati
- Possono essere usati per esprimere vincoli di precedenza o dipendenza: l'arco (v_i, v_j) indica che v_i deve precedere v_j o che v_j dipende da v_i
- Infatti generalmente i grafi usati per esprimere i suddetti vincoli sono privi di clicli
- Esempio. Vincoli di precedenza: grafo delle propedeuticità degli esami



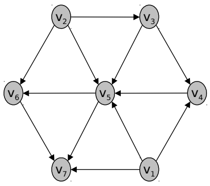
Un DAG G

Ordine topologico

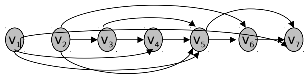
- Def. Un ordinamento topologico di un grafo direzionato $G = (V, E)$ è un etichettatura dei suoi nodi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tale che se G contiene l'arco (v_i, v_j) si ha $i < j$. Detto in un altro modo, un ordinamento topologico di G è un ordinamento dei nodi di G tale che se c'è l'arco (u,w) in G, allora il vertice u precede il vertice w nell'ordinamento (tutti gli archi puntano in avanti nell'ordinamento).
- Esempio. Nel caso in cui un grafo direzionato G rappresenti le propedeuticità degli esami, un ordinamento topologico indica un possibile ordine in cui gli esami possono essere sostenuti dallo studente.



Un DAG G



Un ordinamento topologico di G



Un modo diverso di ridisegnare G in modo da evidenziare l'ordinamento topologico di G

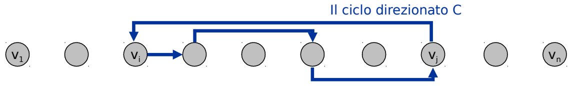
7

DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se un grafo direzionato G ha un ordinamento topologico allora G è un DAG.

Dim. (per assurdo)

- Supponiamo che G sia un grafo direzionato e che abbia un ordinamento $v_1, \ldots, v_n$. Supponiamo per assurdo che G non sia un DAG ovvero che abbia un ciclo direzionato C. Vediamo cosa accade.
- Consideriamo i nodi che appartengono a C e tra questi sia v_i quello con indice più piccolo e sia v_j il vertice che precede v_i nel ciclo C. Ciò ovviamente implica che (v_j, v_i) è un arco.
- Siccome (v_j, v_i) è un arco e $v_1, \ldots, v_n$ è un ordinamento topologico allora, deve essere $j < i$.
- $j < i$ è impossibile in quanto abbiamo scelto v_i come il vertice di indice più piccolo in C e di conseguenza vale $i < j$. Siamo arrivati ad un assurdo. Cioè una contraddizione al fatto che G contiene un ciclo.



L'ordinamento topologico $v_1, \ldots, v_n$

8

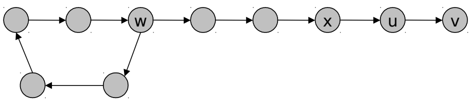
DAG e ordinamento topologico

- Abbiamo visto che se G ha un ordinamento topologico allora G è un DAG.
- Domanda. é vera anche l'implicazione inversa? Cioè dato un DAG, è sempre possibile trovare un suo ordinamento topologico?
- E se sì, come trovarlo?

DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se G è un DAG allora G ha un nodo senza archi entranti
Dim. (per assurdo)

- Supponiamo che G sia un DAG e che ogni nodo di G abbia almeno un arco entrante. Vediamo cosa succede.
- Prendiamo un qualsiasi nodo v e cominciamo a seguire gli archi in senso contrario alla loro direzione a partire da v. Possiamo farlo perchè ogni nodo ha un arco entrante: v ha un arco entrante (u,v), il nodo u ha un arco entrante (x,u) e così via.
- Possiamo continuare in questo modo per quante volte vogliamo. Immaginiamo di farlo per n o più volte. Così facendo attraversiamo a ritroso almeno n archi e di conseguenza passiamo per almeno n+1 vertici. Ciò vuol dire che c'è un vertice w che viene incontrato almeno due volte e quindi deve esistere un ciclo direzionato C che comincia e finisce in w



DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se G è un DAG, G ha un ordinamento topologico.
Dim. (induzione su n)

- Caso base: vero banalmente se n = 1.
- Passo induttivo: supponiamo asserto del lemma vero per DAG con $n \geq 1$ nodi
- Dato un DAG con n+1 > 1 nodi, prendiamo un nodo v senza archi entranti (abbiamo dimostrato che un tale nodo deve esistere).
- G - { v } è un DAG, in quanto cancellare un nodo non introduce clicli nel grafo.
- Poiché G - { v } è un DAG con n nodi allora, per ipotesi induttiva, G - { v } ha un ordinamento topologico.
- Consideriamo l'ordinamento dei nodi di G che si ottiene mettendo v all'inizio dell'ordinamento e aggiungendo gli altri nodi nell'ordine in cui appaiono nell'ordinamento topologico di G - { v }.
- Siccome v non ha archi entranti tutti i suoi archi sono archi uscenti e ovviamente puntano verso nodi di G-{v}. Quello che si ottiene è un ordinamento topologico (tutti gli archi puntano in avanti).

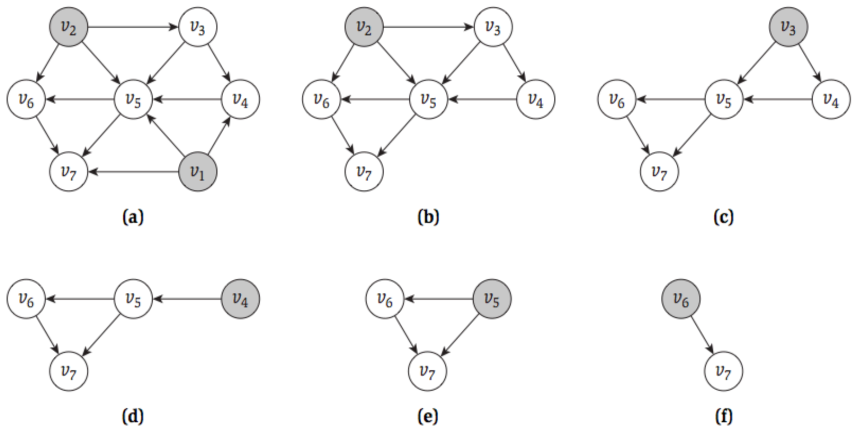
Algoritmo per l'ordinamento topologico

- La dimostrazione per induzione che abbiamo appena visto suggerisce un algoritmo ricorsivo per trovare l' ordinamento topologico di un DAG.

G: DAG

```
TopologicalOrder(G)
    if esiste nodo v senza archi entranti
        cancella v da G in modo da ottenere G-{v}
        L=TopologicalOrder(G-{v})
        aggiungi v all'inizio di L
        return L
    endif
    else //per un DAG G, else eseguito solo se G vuoto
        return lista vuota
```

Algoritmo per l'ordinamento topologico



Algoritmo per l'ordinamento topologico : analisi dell'algoritmo

1) Trovare un nodo senza archi entranti nell'if richiede O(n) se per ogni nodo viene memorizzato il numero di archi entranti
2) Cancellare un nodo v da G richiede tempo proporzionale al numero di archi uscenti da v che è **al più** deg(v)

- Se consideriamo tutte le n chiamate ricorsive il tempo è $O(n^2)$ per 1) e $O(m)$ per 2). Quindi il tempo di esecuzione è $O(n^2+m)=O(n^2)$

```
TopologicalOrder(G)
    if esiste nodo v senza archi entranti
        cancella v da G in modo da ottenere G-{v}
        L=TopologicalOrder(G-{v})
        aggiungi v all'inizio di L
        return L
    endif
    else
        return lista vuota
```

Algoritmo per l'ordinamento topologico con informazioni aggiuntive

- Il bound $O(n^2)$ non è molto buono se il grafo è sparso, cioè se il numero di archi è molto più piccolo di n^2
- Possiamo ottenere un bound migliore?

- Per ottenere un bound migliore occorre usare un modo efficiente per individuare un nodo senza archi entranti ad ogni chiamata ricorsiva

- Si procede nel modo seguente:
- Un nodo si dice attivo se non è stato ancora cancellato
- Occorre mantenere le seguenti informazioni:
- per ciascun vertice attivo w
  - count[w] = numero di archi entranti in w provenienti da nodi attivi.
  - S = insieme dei nodi attivi che non hanno archi entranti provenienti da altri nodi attivi.

Algoritmo per l'ordinamento topologico con informazioni aggiuntive: analisi

Teorema. L'algoritmo trova l'ordinamento topologico di un DAG in tempo $O(m + n)$.
Dim.

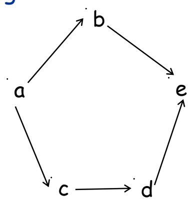
- Inizializzazione. Richiede tempo $O(m + n)$ in quanto
  - I valori di count[w] vengono inizializzati scandendo tutti gli archi e incrementando count[w] per ogni arco entrante in w basta scandire tutti gli archi una sola volta. → tempo $O(m)$
    - Se per ogni nodo viene memorizzato il numero di archi entranti → tempo $O(n)$
  - Inizialmente tutti i nodi sono attivi per cui S consiste dei nodi di G senza archi entranti ed è sufficiente esaminare count[w] per tutti i nodi w una sola volta per inizializzare S → tempo $O(n)$

- Aggiornamento. Per trovare il nodo v da cancellare basta prendere un nodo da S. Per cancellare v occorre
  1. Cancellare v da S e da G. Cancellarlo da G costa deg(v). Possiamo rappresentare S mediante una lista. Se cancelliamo ogni volta da S il primo nodo della lista→tempo $O(1)$ (anche in una lista a puntatori singoli)
  2. Decrementare count[w] per ogni arco (v,w). Se count[w]=0 allora occorre aggiungere w a S → tempo $O(deg(v))$.

I passi 1. e 2. vengono eseguiti una volta per ogni vertice tutti gli aggiornamenti vengono fatti in $\sum_{u \in V} O(1) + \sum_{u \in V} O(deg(u)) = O(n) + O(m) = O(n+m)$

Esercizio

Fornire tutti gli ordinamenti topologici del grafo sottostante



Soluzione. Potremmo esaminare le 5!= 120 possibili permutazioni…. Ragioniamo: il primo nodo dell'ordinamento non deve avere archi entranti, l'ultimo non deve avere archi uscenti. Gli unici nodi che rispettivamente soddisfano questi requisiti sono a ed e. Quindi ogni ordinamento topologico deve cominciare con a e finire con e. In quanti modi possono essere sistemati gli altri nodi? Osserviamo che l'arco (c,d) implica che c precede d in quasiasi ordinamento topologico mentre b può trovarsi in una qualsiasi posizione tra a ed e. In totale, ci sono quindi 3 ordinamenti topologici

a b c d e , a c b d e, a c d b e

17

17

Esercizio 2 Cap 3

- Fornire un algoritmo che, dato un grafo non direzionato G, scopre se G contiene cicli e in caso affermativo produce in output uno dei cicli. L'algoritmo deve avere tempo di esecuzione O(n+m)

- Soluzione. Si esegua una visita BFS sul grafo. Se il grafo non è connesso si eseguono più visite, una per componente connessa. Se al termine gli alberi BFS contengono tutti gli archi allora G non contiene cicli. In caso contrario, c'è almeno un arco (x,y) che non fa parte degli alberi BFS. Consideriamo l'albero BFS T in cui si trovano x e y e sia z l'antenato comune più vicino a x e y (LCA di x e y). L'arco (x,y) insieme ai percorsi tra z e x e quello tra z e y forma un ciclo .

Come facciamo a trovare lo LCA di x e y in tempo O(n)?

18

Esercizio 3 Cap. 3

- Modificare l'algoritmo per l'ordinamento topologico di un DAG in modo tale che se il grafo direzionato input non è un DAG l'algoritmo riporta in output un ciclo che fa parte del grafo.

Soluzione. Consideriamo l'algoritmo per l'ordinamento topologico e supponiamo di invocarlo su un grafo G non necessariamente aciclico

- Caso 1. Ogni volta che l'algoritmo viene invocato ricorsivamente su un grafo non vuoto, l'insieme S non è vuoto. In questo caso riusciamo ad ottenere un ordinamento topologico perché ogni nodo cancellato v non ha archi entranti che provengono dai nodi che sono ancora attivi e che quindi saranno posizionati nell'ordinamento dopo v. Il Lemma ci dice che se il grafo ha un ordinamento topologico allora il grafo è un DAG.
- Caso 2. All'inizio di una certa chiamata ricorsiva su un grafo non vuoto, si ha che S è vuoto. In questo caso il grafo formato dai nodi attivi non è un DAG per il lemma che dice che un DAG ha almeno un nodo senza archi entranti. Il ciclo è ottenuto percorrendo a ritroso gli archi a partire da un qualsiasi nodo attivo v fino a che non incontriamo uno stesso nodo w due volte.

Continua nella prossima slide

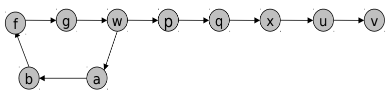
Esercizio 3 Cap. 3

- Basta quindi modificare l'algoritmo in modo che se all'inizio di una chiamata ricorsiva si ha che se G non è vuoto ed S è vuoto allora l'algoritmo sceglie un nodo attivo v e comincia a percorrere gli archi a ritroso a partire da v: si sceglie un arco (x,v) nella lista degli archi entranti in v, poi si sceglie un arco (y,x) nella lista degli archi entranti in x e così via.
  - NB: stiamo supponendo di mantenere per ogni nodo anche la lista degli archi entranti nel nodo
- Ogni volta che viene attraversato un arco (p,q) a ritroso, il nodo p raggiunto viene inserito all'inizio di una lista a doppi puntatori ed etichettato come visitato.
- Se ad un certo punto si raggiunge un nodo w già etichettato come visitato, l'algoritmo interrompe questo percorso all'indietro e cancella dalla lista tutti i nodi a partire dalla fine della lista fino a che incontra per la prima volta w.
- I nodi restanti nella lista formano un ciclo direzionato che comincia e finisce in w.
- Tempo O(n+m) in quanto l'algoritmo per l'ordinamento ha costo O(n+m) e il costo aggiuntivo per trovare il ciclo è O(n).

Continua nella prossima slide

Esercizio 3 Cap. 3

Esempio di grafo con ciclo



Se cominciamo il cammino a ritroso a partire da v, la lista dei nodi attraversati è w a b f g w p q x u v (aggiungiamo ogni nodo attraversato all'inizio della lista). Non appena incontriamo la seconda occorrenza di w, ci fermiamo e cancelliamo gli ultimi 5 nodi della lista scandendo la lista a partire dalla fine. I nodi che rimangono nella lista formano il ciclo w a b f g w.

Esercizio 7 Cap. 3

Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Sia G un grafo non direzionato con un numero n pari di vertici e in cui ogni vertice ha grado almeno n/2. G è connesso.

Soluzione:

- L'affermazione è vera.
- Dimostrazione. Immaginiamo di eseguire la BFS su G a partire da un certo vertice u.
- Siccome u ha grado almeno n/2 allora nel livello L_1 ci saranno almeno n/2 vertici.
- Se tutti i nodi diversi da u sono in in L_1 allora il grafo è ovviamente connesso. Supponiamo che esista un vertice v diverso da u che non è in L_1
- Siccome v ha grado almeno n/2 e non è adiacente ad u (perché?) allora almeno uno degli archi incidenti su u deve incidere su un vertice che si trova nel livello L_1.
  - Semplice argomento: se escludiamo u ed i nodi adiacenti ad u, rimangono al più n-1-n/2= n/2-1 altri nodi.
- Quindi ogni vertice v diverso da u e che non è adiacente ad u deve essere adiacente ad un nodo adiacente ad u.
- Quindi ogni nodo che non è nei primi due livelli sara inserito nella BFS nel terzo livello $L_2 \rightarrow G$ è connesso

Esercizio 6 Cap. 3

Sia G un grafo connesso tale che il DFS tree e il BFS tree di G sono uguali allo stesso albero T. Dimostrare che G=T (cioè non ci sono archi di G che non sono inclusi in T).

Soluzione:

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un arco (x,y) di G che non è in T.

1. Siccome T è un BFS tree allora per la proprietà dimostrata per BFS si ha:
   (x,y) in G → i livelli di x e y in T differiscono al più di 1.
2. Siccome T è anche un DFS tree allora per la proprietà dimostrata per DFS si ha:
   (x,y) in G → x è discendente di y o y è discendente di x
3. Siccome per ipotesi (x,y) non è in T allora x e y non sono in relazione padre figlio.

- Dalla 2. sappiamo che x e y sono uno discendente dell'altro in T e quindi non possono essere sullo stesso livello. La 1. e la 2. insieme allora implicano che x e y sono in livelli consecutivi e sono uno discendente dell'altro. Ciò è possibile solo se x e y sono in relazione padre figlio.
- Siamo arrivati a contraddire la 3. e quindi non è possibile che esista un arco di G che non è in T.

23