

Cognome e Nome:  
Numero di Matricola:

**Spazio riservato alla correzione**

1	2	3	4	5	6	Totale
/18	/20	/18	20	/10	/14	/100

**1.**

- a) Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
1.  $(\log n)n^{1/8} = O((\log n)^2)$
  2.  $n^2 2^{n/2} = \Omega(2^n)$
  3.  $10n + n^k = O(n)$ ,  $k$  e' una costante minore o uguale di 1
  4.  $1000n^4 - 100n^2 = \Omega(n^3)$
  5.  $\frac{1}{4}n + n^{1/2}\log n = O(n)$
- b) Si dimostri che se  $f(n) = O(g(n))$  allora  $nf(n) = O(ng(n))$ . **Occorre utilizzare solo la definizione di  $O$  e nessuna altra proprieta`.**

- c) Si analizzi il tempo di esecuzione nel caso pessimo del seguente segmento di codice fornendo una stima asintotica **quanto migliore e` possibile** per esso. **Si giustifichi in modo chiaro la risposta.**

```
i=1, j=1;  
WHILE( i≤n and j≤n){  
    print(i*j);  
    i=i+1;  
    j=j*2  
  
}
```

2

- a) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo basato sul paradigma del **Divide et Impera** che prende in input un array NON ordinato A e un elemento x e restituisce l'indice della cella dell'array contenente x. Se x non è presente nell'array, l'algoritmo restituisce -1.

- b)** Si fornisca la relazione di ricorrenza che esprime il tempo di esecuzione  $T(n)$  dell'algoritmo di cui al punto a). **Spiegare in modo chiaro come si ottiene la formula da voi fornita. Se l'algoritmo al punto a) non risulterà corretto, questo punto non verrà valutato.**

- c) A partire dalla relazione di ricorrenza di cui al punto b), si fornisca una stima asintotica quanto migliore e` possibile del tempo di esecuzione nel caso pessimo dell'algoritmo al punto a) . **Giustificare la risposta usando o il metodo iterativo o quello per sostituzione (induzione).**

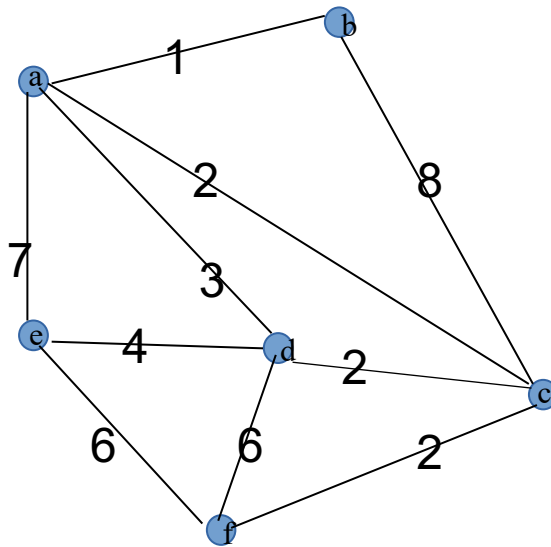
3.

- a) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo BFS **senza** coda FIFO che abbia tempo di esecuzione  $O(n+m)$ .

- b) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo che prende in input un grafo  $G$  non orientato e restituisce true se il grafo  $G$  è bipartito e false altrimenti. L'algoritmo deve avere tempo di esecuzione  $O(n+m)$ . Il voto dipenderà, oltre che dalla correttezza dell'algoritmo, anche da quanto dettagliato è lo pseudocodice.

4.

- a) Si mostri l'esecuzione dell'algoritmo di Kruskal sul seguente grafo. **Occorre mostrare per ogni passo la foresta di alberi ottenuta fino a quel passo.**





- b) Sia  $G$  un grafo non orientato connesso con pesi degli archi a due a due distinti. Si dimostri che se si esegue l'algoritmo di Kruskal su  $G$  allora ogni arco selezionato in questa esecuzione fa parte del minimo albero ricoprente di  $G$ .

- c) Si spieghi in che cosa consiste un'istanza (input) del problema del **Partizionamento di Intervalli** e in cosa consiste una soluzione (output) del problema. **Se dalla risposta a questo punto si evincerà che lo studente non sa in cosa consiste il problema del Partizionamento di Intervalli, il punto successivo del quesito non sarà valutato.**
- d) Si descriva la strategia greedy che permette di ottenere la soluzione ottima per il problema del **Partizionamento di Intervalli** e si dica a cosa è uguale il valore della soluzione ottima. Fornire una definizione chiara di eventuali concetti utilizzati per rispondere al quesito.

5.

a) Si consideri la seguente istanza di Interval Scheduling Pesato:

$$s_1 = 5, s_2 = 1, s_3 = 4, s_4 = 2$$

$$f_1 = 7, f_2 = 8, f_3 = 6, f_4 = 4$$

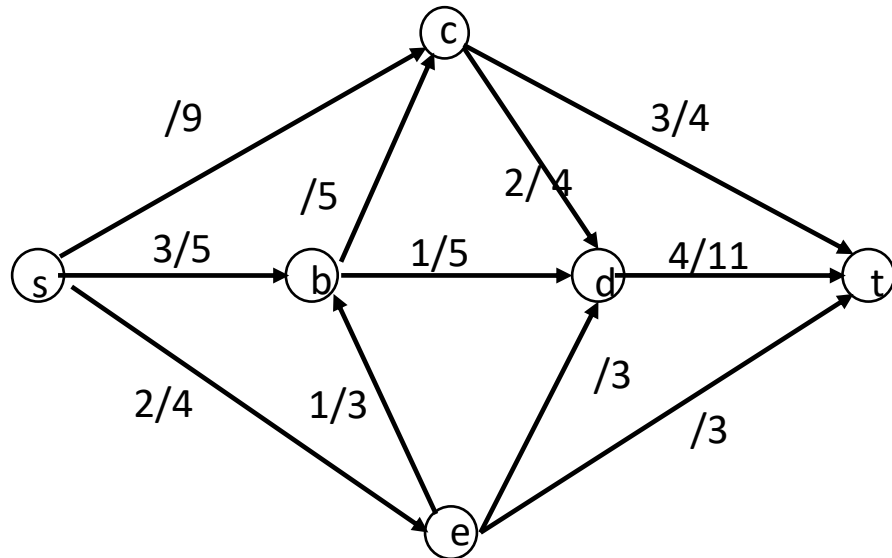
$$v_1 = 15, v_2 = 21, v_3 = 4, v_4 = 10$$

Si calcolino i valori  $p(j)$  e i valori  $OPT(j)$  per  $j=1,2,3,4$  e si fornisca la **soluzione ottima** per la suddetta istanza del problema (non solo il suo valore).

**Attenzione:** gli indici  $j$  di  $p(j)$  e  $OPT(j)$  non corrispondono necessariamente agli indici  $j$  dei valori input  $s_j$ ,  $f_j$  e  $v_j$ .

6.

a) Nella seguente figura sono indicate le quantità di flusso associate ad alcuni degli archi della rete. Si associ a ciascuno dei restanti archi una quantità di flusso in modo che i valori da voi forniti siano compatibili con quelli già indicati e si dica qual è il valore della funzione flusso così definita.



b) Si definisca la nozione di taglio s-t di una rete di flusso e di capacità di un taglio s-t.

- b) Si descriva un algoritmo efficiente per ottenere un taglio di capacità minima di una rete di flusso  $G$ .