Programmazione dinamica (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2018-19

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

Paradigmi della Progettazione degli Algoritmi

- Greedy. Costruisci una soluzione in modo incrementale, ottimizzando (in modo miope) un certo criterio locale.
- Divide-and-conquer. Suddividi il problema in sottoproblemi, risolvi ciascun sottoproblema indipendentemente e combina le soluzioni dei sottoproblemi per formare la soluzione del problema di partenza.
- Programmazione dinamica. Suddividi il problema in un insieme di sottoproblemi che si sovrappongono, cioè che hanno dei sottoproblemi in comune. Costruisci le soluzioni a sottoproblemi via via sempre più grandi **in modo da computare la soluzione di un dato sottoproblema un'unica volta**.
- Nel divide and conquer, se due sottoproblemi condividono uno stesso sottoproblema quest'ultimo viene risolto più volte.

Storia della programmazione dinamica

- Bellman. Negli anni '50 è stato il pionere nello studio sistematico della programmazione dinamica.
- Etimologia.
  - Programmazione dinamica = pianificazione nel tempo.

Applicazioni della programmazione dinamica

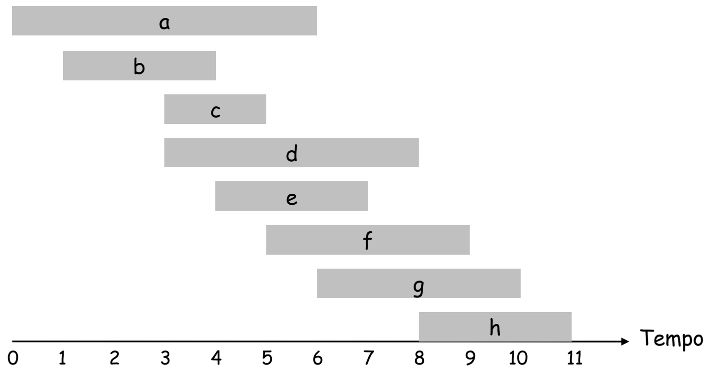
Aree.

- Bioinformatica.
- Teoria dell'informazione
- Ricerca operativa
- Informatica teorica
- Computer graphics
- Sistemi di Intelligenza Artificiale

Interval Scheduling Pesato

Interval scheduling con pesi

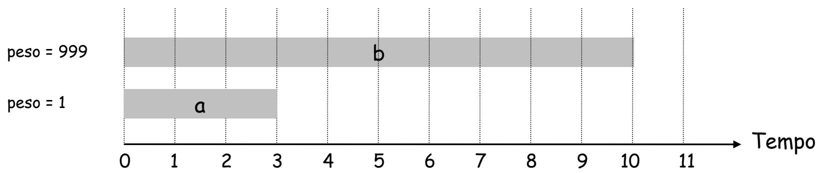
- Job j: comincia al tempo s_j, finisce al tempo f_j, ha associato un valore (peso) v_j .
- Due job sono compatibili se non si sovrappongono
- Obiettivo: trovare il sottoinsieme di job compatibili con il massimo peso totale .



Interval scheduling senza pesi

- L'algoritmo greedy Earliest Finish Time funziona quando tutti i pesi sono uguali ad 1.
- Considera i job in ordine non decrescente dei tempi di fine
- Seleziona un job se è compatibile con quelli già selezionati

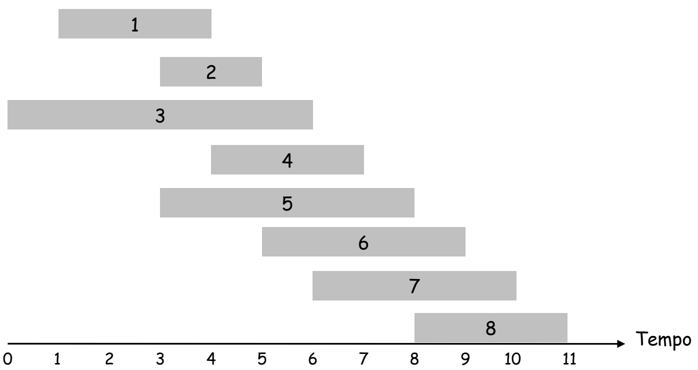
Osservazione. L'algoritmo greedy Earliest Finish Time può fallire se i pesi dei job sono valori arbitrari.



Interval Scheduling Pesato

Notazione. Etichettiamo i job in base al tempo di fine :
$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$.
Def. p(j) = il più grande indice i < j tale che i è compatibile con j

Ex: p(8) = 5, p(7) = 3, p(2) = 0.



Interval Scheduling Pesato: soluzione basata sulla PD

Notazione. OPT(j) = valore della soluzione ottima per l'istanza del problema dell'Interval Scheduling Pesato costituita dalle j richieste con i j tempi di fine più piccoli
Si possono verificare due casi:

- *Caso 1*: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli include il job j.
  - In questo caso la soluzione non può usare i job incompatibili { p(j) + 1, p(j) + 2, ..., j - 1 }
  - Deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato **per** i job 1, 2, ..., p(j) (la soluzione non e` formata necessariamente da tutti questi job)

- *Caso 2*: La soluzione ottima per i j job con i tempi di fine piu` piccoli non contiene il job j.
  - In questo caso la soluzione deve includere la soluzione ottima al problema dell'Interval Scheduling Pesato per i job 1, 2, ..., j-1

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \max \left\{ v_j + OPT(p(j)),\ OPT(j-1) \right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo **inefficiente**

- Inizialmente Compute-Opt viene invocato con j=n

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Compute-Opt(j) {
   if (j = 0)
      return 0
   else
      return max(vj + Compute-Opt(p(j)), Compute-Opt(j-1))
}
```


Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

L'algoritmo computa correttamente OPT(j)

Dim per induzione.

- **Caso base** j=0. Il valore restituito è correttamente 0.
- **Passo Induttivo.** Consideriamo un certo j>0 e supponiamo (ipotesi induttiva) che l'algoritmo produca il valore corretto di OPT(i) per ogni i<j.
- Il valore computato per j dall'algoritmo è

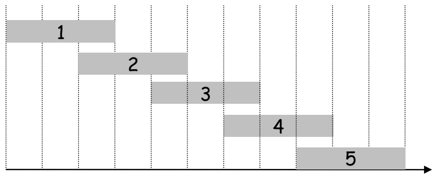
`Compute-Opt(j)= max(`v_j` + Compute-Opt(p(j),Compute-Opt(j-1))`

- Siccome per ipotesi induttiva
- `Compute-Opt(p(j))= OPT(p(j))` **e**
- `Compute-Opt(j-1)= OPT(j-1)`

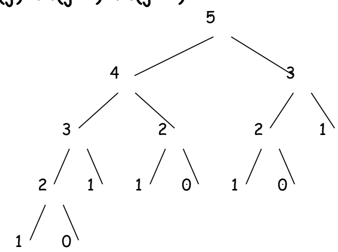
- allora ne consegue che
- `Compute-Opt(j)= max(`v_j` + OPT(p(j)), OPT(j-1))= OPT(j)`

Interval Scheduling Pesato: algoritmo ricorsivo inefficiente

- Osservazione. L'algoritmo ricorsivo corrisponde ad un algoritmo di forza bruta perchè ha tempo esponenziale
  - Ciò è dovuto al fatto che
    - ✓ Un gran numero di sottoproblemi sono condivisi da più sottoproblemi
    - ✓ L'algoritmo computa più volte la soluzione ad uno stesso sottoproblema.
- **Esempio**. In questo esempio il numero di chiamate ricorsive cresce come i numeri di Fibonacci.
- N(j)= numero chiamate ricorsive per j. N(j)=N(j-1)+N(j-2)



P(1) = 0, p(2)=0 e p(j) = j-2 per ogni j>1



Interval Scheduling Pesato: Memoization

- Osservazione: l'algoritmo ricorsivo precedente computa la soluzione di n+1 sottoproblemi soltanto OPT(0),…,OPT(n). Il motivo dell'inefficienza dell'algoritmo è dovuto al fatto che computa la soluzione ad uno stesso problema più volte.
- Memoization. Consiste nell'immagazzinare le soluzioni di ciascun sottoproblema in un'area di memoria accessibile globalmente.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.
Compute p(1), p(2), …, p(n)

for j = 1 to n
   M[j] = empty        ← array globale

M-Compute-Opt(j) {
   if j = 0 Return 0
   if (M[j] is empty)
      M[j] = max(vj + M-Compute-Opt(p(j)), M-Compute-Opt(j-1))
   return M[j]
}
```

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione. La versione "memoized" dell'algoritmo ha tempo di esecuzione $O(n \log n)$.

Fase di inizializzazione: $O(n \log n)$

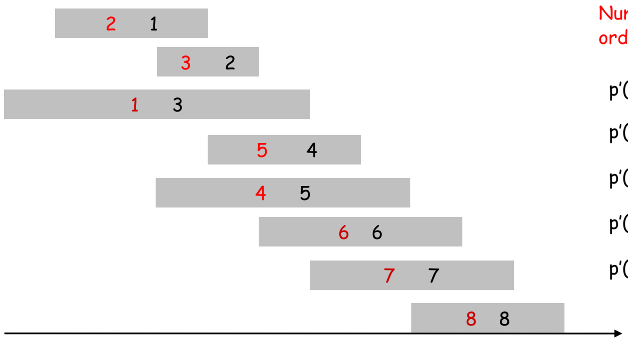
- Ordinamento in base ai tempi di fine: $O(n \log n)$.
- Computazione dei valori $p(\cdot)$: $O(n)$ dopo aver ordinato i job (rispetto ai tempi di inizio e di fine). Siano $a_1,\ldots,a_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di inizio e $b_1,\ldots,b_n$ i job ordinati rispetto ai tempi di fine. (si noti che il job con l'i-esimo tempo di inizio non corrisponde necessariamente a quello con l'i-esimo tempo di fine)
  - Si confronta il tempo di fine di b_1 con i tempi di inizio di $a_1,a_2,a_3\ldots$, fino a che non si incontra un job a_j con tempo di inizio $\geq f_1$. Si pone $p'(1)=p'(2)=\ldots=p'(j-1)=0$. Si confronta il tempo di fine di b_2 con i tempi di inizio di $a_j,a_{j+1},a_{j+2}\ldots$, fino a che non si incontra un job a_k con tempo di inizio $\geq f_2$. Si pone $p'(j)=p'(j+1)=p'(j+2)=\ldots=p'(k-1)=1$. Si confronta il tempo di fine di b_3 con i tempi di inizio di $a_k,a_{k+1},a_{k+2}\ldots$, fino a che non si incontra un job a_m con tempo di inizio $\geq f_3$. Si pone $p'(k)=p'(k+1)=p'(k+2)=\ldots=p'(m-1)=2$, e cosi` via.

Continua nel slide successiva

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

- Si noti che in $p'(j)$, j e` l'indice del job nella sequenza $a_1,\ldots,a_n$.
  - Per ottenere il corrispondente valore $p(r)$ basta sostituire a j l'indice del job nella sequenza $b_1,\ldots,b_n$. L'associazione tra il job e la sua posizione nella sequenza $a_1,\ldots,a_n$ e quella nella sequenza $b_1,\ldots,b_n$ puo` essere creata quando si ordinano i job.

Numeri neri= indici nella sequenza ordinata $b_1,\ldots,b_n$
Numeri rossi= indici nella sequenza ordinata $a_1,\ldots,a_n$



$p'(1)=p'(3)=p'(4)=0$ $p(3)=p(2)=p(5)=0$

$p'(5)=1$ $p(4)=1$

$p'(6)=2$ $p(6)=2$

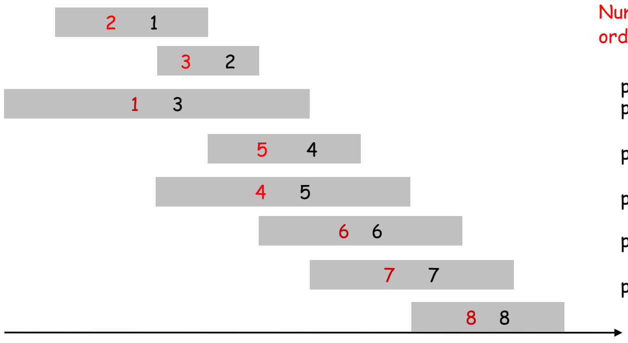
$p'(7)=3$ $p(7)=3$

$p'(8)=5$ $p(8)=5$

Continua nel slide successiva

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

- Il tempo per calcolare i valori p(1),…,p(n) (una volta ottenuti i due ordinamenti $a_1,\ldots,a_n$ e $b_1,\ldots,b_n$) e` O(n) perche` dopo ogni confronto l'algoritmo passa a considerare o il prossimo job nell'ordinamento $b_1,\ldots,b_n$ (nel caso di confronto tra due job compatibili) o il prossimo job nell'ordinamento $a_1,\ldots,a_n$ (nel caso di confronto tra due job incompatibili).



Numeri neri= indici nella sequenza ordinata $b_1,\ldots,b_n$
Numeri rossi= indici nella sequenza ordinata $a_1,\ldots,a_n$

p'(1)=p'(2)=p'(3)=p'(4)=0
p(3)=p(1)=p(2)=p(5)=0

p'(5)=1 p(4)=1

p'(6)=2 p(6)=2

p'(7)=3 p(7)=3

p'(8)=5 p(8)=5

Continua nel slide successiva

Interval Scheduling pesato: Tempo di Esecuzione

Affermazione: `M-Compute-Opt(n)` richiede O(n)
Dim.

- `M-Compute-Opt(j)`: escludendo il tempo per le chiamate ricorsive, ciascuna invocazione prende tempo O(1) e fa una delle seguenti cose
  - (i) restituisce il valore esistente di `M[j]`
  - (ii) riempie l'entrata `M[j]` facendo due chiamate ricorsive

- Per stimare il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(j)` dobbiamo stimare il numero totale di chiamate ricorsive innescate da `M-Compute-Opt(j)`
  - Abbiamo bisogno di una misura di come progredisce l'algoritmo
  - Misura di progressione Φ = # numero di entrate non vuote di `M[]`.
  - inizialmente Φ = 0 e durante l'esecuzione si ha sempre $\Phi \leq$ n.
  - per far crescere Φ di 1 occorrono al piu` 2 chiamate ricorsive.
  - quindi per far andare Φ da 0 a j, occorrono al piu` 2j chiamate ricorsive per un tempo totale di O(j)

- Il tempo di esecuzione di `M-Compute-Opt(n)` e` quindi O(n).

N.B. O(n), una volta ordinati i job in base ai valori di inizio.

Memoization nei linguaggi di programmazione

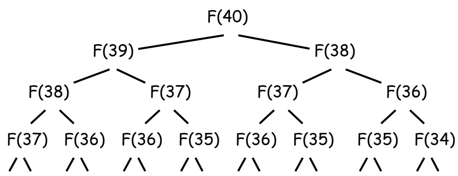
- Automatica. Molti linguaggi di programmazione funzionale, quali il Lisp, prevedono un meccanismo per rendere automatica la memoization

```
(defun F (n)
  (if
    (<= n 1)
    n
    (+ (F (- n 1)) (F (- n 2)))))
```

Lisp (efficiente)

```
static int F(int n) {
   if (n <= 1) return n;
   else return F(n-1) + F(n-2);
}
```

Java (esponenziale



Interval Scheduling Pesato: Trovare una soluzione

- Domanda. Gli algoritmi di programmazione dinamica computano il valore ottimo. E se volessimo trovare la soluzione ottima e non solo il suo valore?
- Risposta. Facciamo del post-processing (computazione a posteriori).

```
Run M-Compute-Opt(n)
Run Find-Solution(n)

Find-Solution(j) {
   if (j = 0)
      output nothing
   else if (vj + M[p(j)] > M[j-1])
      print j
      Find-Solution(p(j))
   else
      Find-Solution(j-1)
}
```

Interval Scheduling Pesato: Bottom-Up

Programmazione dinamica bottom-up

Per capire il comportamento dell'algoritmo di programmazione dinamica e` di aiuto formulare una versione iterativa dell'algoritmo.

```
Input: n, s1,…,sn , f1,…,fn , v1,…,vn

Sort jobs by finish times so that f1 ≤ f2 ≤ ... ≤ fn.

Compute p(1), p(2), …, p(n)

Iterative-Compute-Opt {
   M[0] = 0
   for j = 1 to n
      M[j] = max(vj + M[p(j)], M[j-1])
}
```

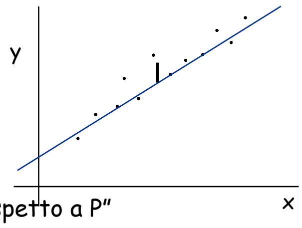
Correttezza: Con l'induzione su j si puo` dimostrare che ogni entrata M[j] contiene il valore OPT(j)

Tempo di esecuzione: n iterazioni del for, ognuna della quali richiede tempo O(1) → tempo totale O(n)

Segmented Least Squares

- Minimi quadrati.
  - Problema fondazionale in statistica e calcolo numerico.
  - Dato un insieme P di n punti del piano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
  - Trovare una linea L di equazione y = ax + b che minimizza la somma degli errori quadratici.

$$Error(L,P) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$



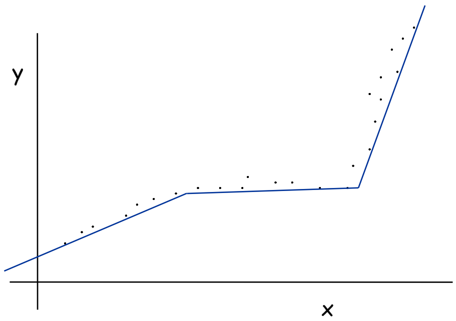
  - Chiameremo questa quantita` "Errore di L rispetto a P"
  - Chiameremo "Errore minimo per P", il minimo valore di Error(L,P) su tutte le possibili linee L
- Soluzione. Analisi ⇒ il minimo errore per un dato insieme P di punti si ottiene usando la linea di equazione y = ax + b con a e b dati da

$$a = \frac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i - a \sum_i x_i}{n}$$

Segmented Least Squares

- L'errore minimo per alcuni insiemi input di punti puo` essere molto alto a causa del fatto che i punti potrebbero essere disposti in modo da non poter essere ben approssimati usando un'unica linea.

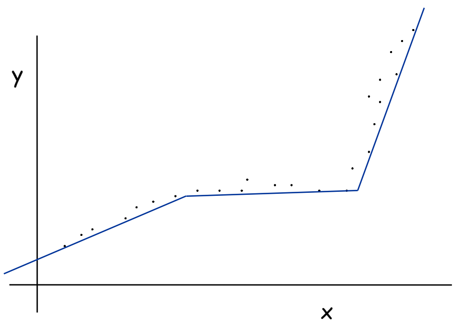
Esempio: i punti in figura non possono essere ben approssimati usando un'unica linea. Se pero` usiamo tre linee riusciamo a ridurre di molto l'errore.



Segmented Least Squares

Segmented least squares.

- In generale per ridurre l'errore avremo bisogno di una sequenza di linee intorno alle quali si distribuiscono sottoinsiemi di punti di P.
- Ovviamente se ci fosse concesso di usare un numero arbitrariamente grande di segmenti potremmo ridurre a zero l'errore:
  - Potremmo usare una linea per ogni coppia di punti consecutivi.
- Domanda. Qual e` la misura da ottimizzare se vogliamo trovare un giusto compromesso tra accuratezza della soluzione e parsimonia nel numero di linee usate?



Segmented Least Squares

Formulazione del problema Segmented Least Squares.

- Dato un insieme P di n punti nel piano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, vogliamo partizionare P in un certo numero m di sottoinsiemi $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in modo tale che
- Ciascun P_i e` costituito da punti contigui lungo l'asse delle ascisse
  - P_i viene chiamato segmento
- La sequenza di linee $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ottime rispettivamente per $P_1, P_2, \ldots, P_m$ minimizzi la somma delle 2 seguenti quantita:

1) La somma E degli m errori minimi per $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (l'errore minimo per il segmento P_i e` ottenuto dalla linea L_i)

$$E = Error(L_1, L_2, \ldots, L_m; P_1, P_2, \ldots, P_m) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(x_i, y_i) \in P_j} (y_i - a_j x_i - b_j)^2$$

2) Il numero m di linee (pesato per una certa costante $C>0$)

- Penalita` : $E + C\,m$, dove $C > 0$ e` una costante.

Segmented Least Squares

- Il numero di partizioni in segmenti dei punti in P e` esponenziale
- La programmazione dinamica ci permette di progettare un algoritmo efficiente per trovare una partizione di penalita` minima
- A differenza del problema dell'Interval Scheduling Pesato in cui utilizzavamo una ricorrenza basata su due possibili scelte, per questo problema utilizzeremo una ricorrenza basata su un numero polinomiale di scelte.

Approccio basato sulla programmazione dinamica

Notazione

- OPT(j) = costo minimo della penalita` per i punti $p_1, p_2, \ldots, p_j$.
- e(i, j) = minimo errore per l'insieme di punti $\{p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j\}$.

Per computare OPT(j), osserviamo che

- se l'ultimo segmento nella partizione di $\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$ e` costituito dai punti $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$ per un certo i, allora
- penalita` = e(i, j) + C + OPT(i-1).

- Il valore della penalita` cambia in base alla scelta di i
- Il valore OPT(j) e` ottenuto in corrispondenza dell'indice i che minimizza e(i, j) + C + OPT(i-1)

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0 \\ \min\limits_{1 \le i \le j} \left\{ e(i,j) + C + OPT(i-1) \right\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Segmented Least Squares: Algorithm

```
INPUT: n, p1,…,pn, c

Segmented-Least-Squares() {
   M[0] = 0
   for j = 1 to n
      for i = 1 to j
         compute the least square error eij for
         the segment pi,…, pj

   for j = 1 to n
      M[j] = min 1 ≤ i ≤ j (eij + C + M[i-1])

   return M[n]
}
```

Tempo di esecuzione. $O(n^3)$.

- Collo di bottiglia = dobbiamo computare il valore e(i, j) per $O(n^2)$ coppie i, j. Usando la formula per computare la minima somma degli errori quadratici, ciascun e(i,j) e` computato in tempo O(n)

Algoritmo che produce la partizione

Tempo di esecuzione $O(n^2)$ se, oltre ai valori M[i], abbiamo memorizzato i valori $e_{i,j}$

```
Find-Segments(j)
  If j = 0 then
    Output nothing
  Else
    Find an i that minimizes e_{i,j} + C + M[i − 1]
    Output the segment {p_i, ..., p_j} and the result of
           Find-Segments(i − 1)
  Endif
```


Subset sums

Input
- n job 1,2,…,n
  - il job i richiede tempo $w_i > 0$.
- Un limite W al tempo per il quale il processore puo` essere utilizzato

- Obiettivo: selezionare un sottoinsieme S degli n job tale che $\sum_{i \in S} w_i$ sia quanto piu` grande e` possibile, con il vincolo $\sum_{i \in S} w_i \le W$

Greedy 1: ad ogni passo inserisce in S il job con peso piu` alto in modo che la durata complessiva dei job in S non superi W
Esempio: Input una volta ordinato [W/2+1,W/2,W/2]. L'algoritmo greedy seleziona solo il primo mentre la soluzione ottima e` formata dagli ultimi due.
Greedy 2: ad ogni passo inserisce in S il job con peso piu` basso in modo che la duranta complessiva dei job in S non superi W
Esempio: Input [1,W/2,W/2] una volta ordinato . L'algoritmo greedy seleziona i primi due per un peso complessivo di 1+W/2. mentre la soluzione ottima e` formata dagli ultimi due di peso complessivo W.

Programmazione dinamica: falsa partenza

Def. OPT(i) = valore della soluzione ottima per {1, …, i}.

- Caso 1: OPT non include i.
  - OPT include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 }
- Caso 2: OPT include i.
  - Prendere i non implica immediatamente l'esclusione di altri elementi.
  - Se non conosciamo i job selezionati prima di i, non sappiamo neanche se c'e` tempo sufficiente per eseguire i

Conclusione. Approccio sbagliato!

Programmazione dinamica: approccio corretto

- Per esprimere il valore della soluzione ottima per un certo i in termini dei valori delle soluzioni ottime per input piu` piccoli di i, dobbiamo introdurre un limite al tempo totale da dedicare all'esecuzione dei job selezionati prima di i.
- Per ciascun j, consideriamo il valore della soluzione ottima per i job 1, …, j con il vincolo che il tempo necessario per eseguire i job selezionati non superi un certo w.
- Def. OPT(i, w) = valore della soluzione ottima per i job 1, …, i con limite w sul tempo di utilizzo del processore.

Programmazione dinamica: approccio corretto

Def. OPT(i, w) = valore della soluzione ottima OPT per i job 1, …, i con limite w sul tempo di utilizzo del processore.

- Caso 1: OPT non include il job i.
  - OPT include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } in modo che il tempo di esecuzione totale dei job non superi w
- Case 2: OPT include il job i.
  - OPT include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } in modo che il tempo di esecuzione totale dei job non superi w– w_i

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } i=0 \\ OPT(i-1,w) & \text{if } w_i > w \\ \max\left\{ OPT(i-1,w),\ \ w_i + OPT(i-1,w-w_i) \right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Subset sums: algoritmo

- Versione iterativa in cui si computa la soluzione in modo bottom-up
- Si riempie un array bidimensionale nxW a partire dalle locazioni di indice di riga i piu` piccolo

```
Input: n, w1,…,wn ,W

for w = 0 to W
   M[0, w] = 0

for i = 1 to n
   for w = 0 to W
      if (wi > w)
         M[i, w] = M[i-1, w]
      else
         M[i, w] = max {M[i-1, w], wi + M[i-1, w-wi ]}

return M[n, W]
```

Subset sums: esempio di esecuzione dell'algoritmo

Limite W = 6, durate job $w_1 = 2$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$

3							
2							
1							
0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

Initial values

3							
2							
1	0	0	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

Filling in values for $i = 1$

3							
2	0	0	2	2	4	4	4
1	0	0	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

Filling in values for $i = 2$

3	0	0	2	3	4	5	5
2	0	0	2	2	4	4	4
1	0	0	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6

Filling in values for $i = 3$

Subset sums: correttezza algoritmo

Induzione sui i. Dimostriamo che all'i-esima iterazione ogni riga di M con indice r compreso tra 0 e i contiene i valori OPT(r,0),OPT(r,1),….,OPT(r, W)

- Base induzione. i=0: La riga 0 ha correttamente tutte le entrate uguali a 0
- Passo induttivo:
  - Ipotesi induttivaSupponiamo che alla iterazione i-1 ≥0, le righe di indice r compreso tra 0 e i-1 contengano correttamente i valori OPT(r,0),OPT(r,1),….,OPT(r, W).
  - Vediamo cosa succede all'i-esima iterazione.
  - Per ipotesi induttiva M[i-1, w]=OPT(i-1,w) ed M[i-1, w-w_i]=OPT(i-1,w-w_i)
  - All'i-esima iterazione, l'algoritmo pone

```
M[i, w] = M[i-1, w] = OPT(i-1,w) se wi > w

M[i, w] = max {M[i-1, w], wi + M[i-1, w-wi ]}
        = max {OPT[i-1, w], wi + OPT[i-1, w-wi ]} altrimenti
```

  - Per cui M[i,w] = OPT(i,w)

Subset sums: tempo di esecuzione algoritmo

- Tempo di esecuzione. $\Theta(n\ W)$.

- Non e\` polinomiale nella dimensione dell'input!
- "Pseudo-polinomiale": L'algoritmo e\` efficiente quando W ha un valore ragionevolmente piccolo.

- Se volessimo produrre la soluzione ottima, potremmo scrivere un algoritmo simile a quelli visti prima in cui la soluzione ottima si ricostruisce andando a ritroso nella matrice M. Tempo O(n).

- Esercizio: Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo che produce la soluzione ottima per un'istanza di Subset Sum.

- Esercizio: Scrivere la versione ricorsiva dell'algoritmo di programmazione dinamica per Subset Sums

Problema dello zaino

- Input
  - n oggetti ed uno zaino
  - L'oggetto i pesa $w_i > 0$ chili e ha valore $v_i > 0$.
  - Lo zaino puo\` trasportare fino a W chili.
- Obiettivo: riempire lo zaino in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti inseriti.
- Esempio: { 3, 4 } ha valore 40.

W = 11

Oggetto	Valore	Peso
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7

Greedy: seleziona ad ogni passo l'oggetto con il rapporto v_i/w_i piu\` grande in modo che il peso totale dei pesi selezionati non superi w

Esempio: soluzione greedy { 5, 2, 1 } ha valore = 35 $\Rightarrow$ greedy non e\` ottimo

Problema dello zaino

Input

- n oggetti ed uno zaino
- L'oggetto i pesa $w_i > 0$ chili e ha valore $v_i > 0$.
- Lo zaino puo` trasportare fino a W chili.
- **Obiettivo:** riempire lo zaino in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti inseriti.

Corrisponde al problema subset sums quanto $v_i=w_i$ per ogni i.

Problema dello zaino: estensione approccio usato per Subset Sums

Def. OPT(i, w) = valore della soluzione ottima per gli oggetti 1, …, i con limite di peso totale w.

- Caso 1: OPT non include l'elemento i.
  - OPT include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } in modo che il peso totale degli elementi non superi w
- Case 2: OPT include l'elemento i.
  - OPT include la soluzione ottima per { 1, 2, …, i-1 } in modo che il peso totale degli elementi non superi $w - w_i$

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } i=0 \\ OPT(i-1,w) & \text{if } w_i > w \\ \max\{ OPT(i-1,w),\ \ v_i + OPT(i-1,w-w_i)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Problema dello zaino: algoritmo

```
Input: n, W,w1,…,wn, v1,…,vn

for w = 0 to W
   M[0, w] = 0

for i = 1 to n
   for w = 0 to W
      if (wi > w)
         M[i, w] = M[i-1, w]
      else
         M[i, w] = max {M[i-1, w], vi + M[i-1, w-wi ]}

return M[n, W]
```


Algoritmo per il problema della zaino: esempio

W →

n ↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
φ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{ 1 }	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
{ 1, 2 }	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
{ 1, 2, 3 }	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
{ 1, 2, 3, 4 }	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
{ 1, 2, 3, 4, 5 }	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

OPT(5,11) = OPT(4,11) = v_4+OPT(3,11-w_4) = v_4+OPT(3,5)
= v_4+v_3+OPT(2,0) = v_4+v_3+OPT(1,0)
= v_4+v_3+OPT(0,0) = 22+18+0 = 40

Soluzione ottima : { 4, 3 }
Valore soluzione ottima = 22 + 18 = 40

W = 11

Oggetto	Valore	Peso
1	1	1
2	6	2
3	18	5
4	22	6
5	28	7