# Programmazione dinamica (II parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2018-19

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis



## Allineamento di sequenze

- Quanto sono simili le due stringhe seguenti ?
  - **ocurrance**
  - **occurrence**
  - Allineamo i caratteri
  - Ci sono diversi modi per fare questo allineamento
  - Qual e` migliore?

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| o | c | u | r | r | a | n | c | e | - |
| o | c | c | u | r | r | e | n | c | e |

6 mismatch, 1 gap

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| o | c | - | u | r | r | a | n | c | e |
| o | c | c | u | r | r | e | n | c | e |

1 mismatch, 1 gap

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| o | c | - | u | r | r | - | a | n | c | e |
| o | c | c | u | r | r | e | - | n | c | e |

0 mismatch, 3 gap

## Edit Distance

- Applicazioni.
  - Base per il comando Unix diff.
  - Riconoscimento del linguaggio.
  - Biologia computazionale.

- Edit distance. [Levenshtein 1966, Needleman-Wunsch 1970]
  - Gap penalty $\delta$;
  - Mismatch penalty $\alpha_{pq}$. Si assume $\alpha_{pp}$=0

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | T | G | A | C | C | T | A | C | C | T |
| C | C | T | G | A | C | T | A | C | A | T |

$\alpha_{TC} + \alpha_{GT} + \alpha_{AG} + 2\alpha_{CA}$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | C | T | G | A | C | C | T | A | C | C | T |
| C | C | T | G | A | C | - | T | A | C | A | T |

$2\delta + \alpha_{CA}$



## Applicazione del problema dell'allineamento di sequenze

- I problemi su stringhe sorgono naturalmente in biologia: il genoma di un organismo e` suddiviso in molecole di DNA chiamate cromosomi, ciascuno dei quali serve come dispositivo di immagazzinamento chimico.

- Di fatto, si puo` pensare ad esso come ad un enorme nastro contenente una stringa sull'alfabeto {*A*,*C*,*G*,*T*}. La stringa di simboli codifica le istruzioni per costruire molecole di proteine: usando un meccanismo chimico per leggere porzioni di cromosomi, una cellula puo` costruire proteine che controllano il suo metabolismo.

Continua nella prossima slide

## Applicazione del problema dell'allineamento di sequenze

- Perche` le somiglianze tra stringhe sono rilevanti in questo scenario?
- Le sequenze di simboli nel genoma di un organismo determinano le proprieta` dell'organismo.
- Esempio. Supponiamo di avere due ceppi di batteri X e Y che sono strettamente connessi dal punto di vista evolutivo.
- Supponiamo di aver determinato che una certa sottostringa nel DNA di X sia la codifica di una certa tossina.
- Se scopriamo una sottostringa molto simile nel DNA di Y, possiamo ipotizzare che questa porzione del DNA di Y codifichi un tipo di tossina molto simile a quella codificata nel DNA di X.
- Esperimenti possono quindi essere effettuati per convalidare questa ipotesi.
- Questo e` un tipico esempio di come la computazione venga usata in biologia computazionale per prendere decisioni circa gli esperimenti biologici.



## Allineamento di sequenze

- Abbiamo bisogno di un modo per allineare i caratteri di due stringhe
  - Formiamo un insieme di coppie di caratteri, dove ciascuna coppia e` formata da un carattere della prima stringa e uno della seconda stringa.
- Def. insieme di coppie e` un matching se ogni elemento appartiene ad una sola coppia
- Def. Le coppie $(x_i,y_j)$ e $(x_{i'},y_{j'})$ si incrociano se $i < i'$ ma $j > j'$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| - | T | A | C | C |
| C | T | - | - | T |
| $y_1$ | $y_2$ | | | $y_3$ |

Def. Un allineamento M e` un insieme di coppie $(x_i,y_j)$ tali che
- M e` un matching
- M non contiene coppie che si incrociano

Esempio: `CTACCG` **VS.** `TACATG`
Soluzione:
$M = (x_2,y_1), (x_3,y_2), (x_4,y_3), (x_5,y_4), (x_6,y_6)$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| C | T | A | C | C | - | G |
| - | T | A | C | A | T | G |
| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |

## Allineamento di sequenze

- Obiettivo: Date due stringhe $X = x_1 x_2 \ldots x_m$ e $Y = y_1 y_2 \ldots y_n$ trova l'allineamento di minimo costo.

$$\text{cost}(M) = \underbrace{\sum_{(x_i, y_j) \in M} \alpha_{x_i y_j}}_{\text{mismatch}} + \underbrace{\sum_{i:\, x_i \text{ unmatched}} \delta + \sum_{j:\, y_j \text{ unmatched}} \delta}_{\text{gap}}$$

- Affermazione.
- Dato un allineamento M di due stringhe $X = x_1 x_2 \ldots x_m$ e $Y = y_1 y_2 \ldots y_n$, se in M non c'e` la coppia $(x_m, y_n)$ allora o $x_m$ non e` accoppiato in M o $y_n$ non e` accoppiato in M.
- Dim. Supponiamo che $x_m$ e $y_n$ sono entrambi accoppiati ma non tra di loro. Supponiamo che $x_m$ sia accoppiato con $y_j$ e $y_n$ sia accoppiato con $x_i$. In altre parole M contiene le coppie $(x_m, y_j)$ e $(x_i, y_n)$. Siccome $i<m$ ma $n>j$ allora si ha un incrocio e cio` contraddice il fatto che M e` allineamento.



## Allineamento di sequenze: struttura del problema

- Def. OPT(i, j) = costo dell'allineamento ottimo OPT per le due stringhe $x_1 x_2 \ldots x_i$ and $y_1 y_2 \ldots y_j$.
- Caso 1: in OPT $x_i$ e $y_j$ sono accoppiati.
  - OPT(i, j) = Costo dell'eventuale mismatch tra $x_i$ e $y_j$ + costo dell'allineamento ottimo di $x_1 x_2 \ldots x_{i-1}$ and $y_1 y_2 \ldots y_{j-1}$
- Caso 2a: in OPT $x_i$ non e` accoppiato.
  - OPT(i, j) = Costo del gap $x_i$ + costo dell'allineamento ottimo di $x_1 x_2 \ldots x_{i-1}$ e $y_1 y_2 \ldots y_j$
- Case 2b: in OPT $y_j$ non e` accoppiato.
  - OPT(i, j) = Costo del gap $y_j$ + costo dell'allineamento ottimo di $x_1 x_2 \ldots x_i$ e $y_1 y_2 \ldots y_{j-1}$

$$OPT(i,j) = \begin{cases} j\delta & \text{se } i = 0 \\ \min \begin{cases} \alpha_{x_i y_j} + OPT(i-1, j-1) \\ \delta + OPT(i-1, j) \\ \delta + OPT(i, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \\ i\delta & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

## Allineamento di sequenze: algoritmo

```
Sequence-Alignment(m, n, x1x2...xm, y1y2...yn, δ, α) {
   for i = 0 to m
      M[i, 0] = iδ
   for j = 0 to n
      M[0, j] = jδ

   for i = 1 to m
      for j = 1 to n
         M[i, j] = min(α[xi, yj] + M[i-1, j-1],
                       δ + M[i-1, j],
                       δ + M[i, j-1])
   return M[m, n]
}
```

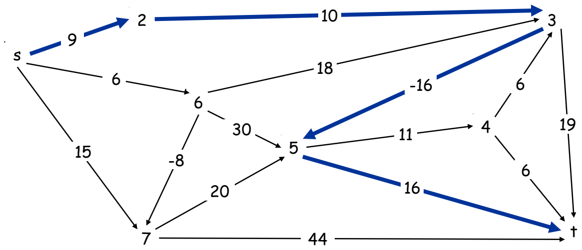
- Analisi. Tempo e spazio $\Theta(mn)$.
- Parole inglesi: m, n $\leq$ 10.
- Applicazioni di biologia computazionale: m = n = 100,000.
- Quindi mxn=10 miliardi . OK per il tempo ma non per lo spazio (10GB)



## Cammini minimi

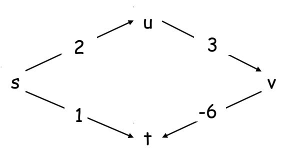
- Problema del percorso piu` corto. Dato un grafo direzionato G = (V, E), con pesi degli archi $c_{vw}$, trovare il percorso piu` corto da s a t.

- Esempio. I nodi rappresentano agenti finanziari e $c_{vw}$ e` il costo (eventualmente <0) di una transazione che consiste nel comprare dall'agente v e vendere immediatamente a w.

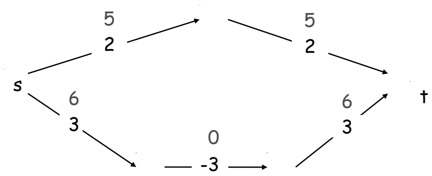


## Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

- Dijkstra. Puo` fallire se ci sono archi di costo negativo



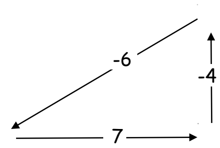

- Re-weighting. Aggiungere una costante positiva ai pesi degli archi potrebbe non funzionare.

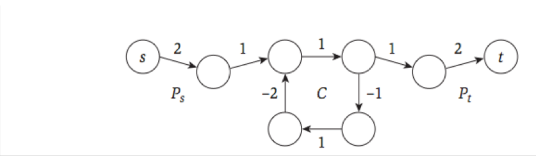





## Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

- Ciclo di costo negativo.



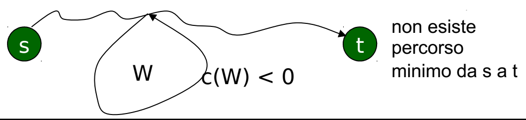



## Cammini minimi in presenza di archi con costo negativo

Osservazione. Se qualche percorso da s a t contiene un ciclo di costo negativo allora non esiste un percorso minimo da s a t. In caso contrario esiste un percorso minimo da s a t che e` semplice (nessun nodo compare due volte sul percorso).

- Dim. Se esiste un percorso P da s a t con un ciclo C di costo negativo –c allora gni volta che attraversiamo il ciclo riduciamo il costo del percorso di un valore pari a c. Cio` rende impossibile definire il costo del percorso minimo perche` dato un percorso riusciamo sempre a trovarne uno di costo minore attraversando il ciclo C (osservazione questa che avevamo gia` fatto in precedenti lezioni).

Suopponiamo ora che nessun percorso da s a t contenga cicli negativi e sia P un percorso minimo da s a t (ovviamente P e` privo di cicli di costo negativo). Supponiamo che un certo vertice v appaia almeno due volte in P. C'e` quindi in P un ciclo che contiene v e che per ipotesi deve avere costo **non negativo**. In questo caso potremmo rimuovere le porzioni di P tra due occorrenze consecutive di v in P senza far aumentare il costo del percorso che risulterebbe ancora minimo.




53

## Cammini minimi: Programmazione dinamica

Def. OPT(i, v) = lunghezza del cammino piu` corto P per andare da v a t che consiste di al piu` i archi

Per computare OPT(i,v) quando i>0 e v≠t, osserviamo che

- il percorso ottimo P deve contenere almeno un arco (che ha come origine v).
- se (v, w) e` il primo arco di P allora P e` formato da (v, w) e dal percorso piu` corto da w a t di al piu` i-1 archi

$$OPT(i,v) = \min_{(v,w)\in E} \left\{ OPT(i-1, w) + c_{vw} \right\}$$

$$\text{OPT(i,v)}=\begin{cases} 0 & \text{se } v=t \\ \infty & \text{se } i=0 \text{ e } v \neq t \\ \min_{(v,w)\in E}\{OPT(i-1,w)+c_{vw}\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

54

## Cammini minimi: Programmazione dinamica

$$\text{OPT(i,v)}=\begin{cases} 0 & \text{se v=t} \\ \infty & \text{se } i=0 \text{ e } v \neq t \\ \min_{(v,w)\in E}\{OPT(i-1,w)+c_{vw}\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove si usa l'osservazione di prima sul fatto che in assenza di cicli negativi il percorso minimo e` semplice?

Ecco dove….

**Affermazione.** Se non ci sono cicli di costo negativo allora OPT(n-1, v) = lunghezza del percorso piu` corto da v a t.

Dim. Dall'osservazione precedente se non ci sono cicli negativi allora il percorso piu` corto da v a t e` semplice e di conseguenza contiene al piu` n-1 archi



## Algoritmo di Bellman-Ford per i cammini minimi

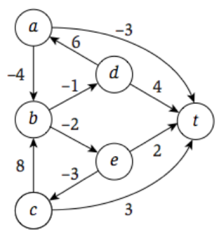
```
Shortest-Path(G, t) {
   foreach node v ∈ V
      M[0, v] ← ∞

   for i = 0 to n-1
      M[i, t] ← 0

   for i = 1 to n-1
      foreach node v ∈ V
         M[i, v] ← ∞
         foreach edge (v, w) ∈ E
            M[i, v] ← min {M[i,v], M[i-1, w] + cvw }
}
```

- Analisi. Tempo $\Theta(mn)$, spazio $\Theta(n^2)$.
- Trovare il percorso minimo. Memorizzare un successore per ogni entrata della matrice

## Bellman-Ford: esempio




(a)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | ∞ | −3 | −3 | −4 | −6 | −6 |
| b | ∞ | ∞ | 0 | −2 | −2 | −2 |
| c | ∞ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| d | ∞ | 4 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| e | ∞ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

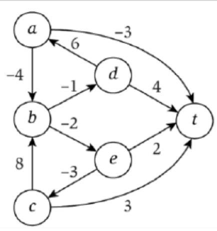
(b)

In questa tabella qui l'elemento di indice (u,i) corrisponde al valore M(i,u)



## Bellman-Ford: esempio

$$OPT(i,v)=\begin{cases} 0 & \text{se v=t} \\ \infty & \text{se } i=0 \text{ e } v \neq t \\ \min_{(v,w)\in E}\{OPT(i-1,w)+c_{vw}\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$




| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | ∞ | −3 | −3 | −4 | −6 | −6 |
| b | ∞ | ∞ | 0 | −2 | −2 | −2 |
| c | ∞ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| d | ∞ | 4 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| e | ∞ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- OPT(5,a)=min{$c_{ab}$+OPT(4,b) , $c_{at}$+OPT(4,t)}=min{-4-2, -3+0}=-6
- OPT(4,b)=min{$c_{bd}$+OPT(3,d),$c_{be}$+OPT(3,e)}=min{-1+4,-2+0}=-2
- OPT(4,t)=0
- OPT(3,d)=min{$c_{dt}$+OPT(2,t),$c_{da}$+OPT(2,a)}={4+0, 6+3}=4
- OPT(3,e)=min{$c_{ec}$+ OPT(2,c), $c_{et}$+ OPT(2,t)}=min{-3+3, 2+0}=0
- OPT(2,t)=0
- OPT(2,c)={$c_{cb}$+ OPT(1,b), $c_{ct}$+ OPT(1,t)}=min {8+∞, 3+0}=3
- OPT(2,a)={$c_{ab}$+ OPT(1,b), $c_{at}$+ OPT(1,a)}=min {8+∞, 3+0}=3
- OPT(1,t)=0
- OPT(1,b)=min{$c_{bd}$+ OPT(0,d), $c_{be}$+ OPT(0,e)}={-1+∞ ,-2+∞}=∞
- OPT(1,a)=min{$c_{ab}$+ OPT(0,b), $c_{at}$+ OPT(0,t)}={-4+∞,-3+0}=-3
- OPT(0,t)=0
- OPT(0,d)=OPT(0,b)=OPT(0,e)=∞

## Bellman-Ford: esempio

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | ∞ | −3 | −3 | −4 | −6 | −6 |
| $b$ | ∞ | ∞ | 0 | −2 | −2 | −2 |
| $c$ | ∞ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $d$ | ∞ | 4 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| $e$ | ∞ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- OPT(5,a)=min{$c_{ab}$+OPT(4,b) , $c_{at}$+OPT(4,t)}=min{-4-2, -3+0}=-6
- OPT(4,b)=min{$c_{bd}$+OPT(3,d),$c_{be}$+OPT(3,e)}=min{-1+4,-2+0}=-2
- OPT(4,t)=0
- OPT(3,d)=min{$c_{dt}$+OPT(2,t),$c_{da}$+OPT(2,a)}={4+0, 6+3}=4
- OPT(3,e)=min{$c_{ec}$+ OPT(2,c), $c_{et}$+ OPT(2,t)}=min{-3+3, 2+0}= 0
- OPT(2,t)=0
- OPT(2,c)={$c_{cb}$+ OPT(1,b), $c_{ct}$+ OPT(1,t)}=min {8+∞, 3+0}=3
- OPT(2,a)={$c_{ab}$+ OPT(1,b), $c_{at}$+ OPT(1,a)}=min {8+∞, 3+0}=3
- OPT(1,t)=0
- OPT(1,b)=min{$c_{bd}$+ OPT(0,d), $c_{be}$+ OPT(0,e)}={-1+∞ ,-2+∞}=∞
- OPT(1,a)=min{$c_{ab}$+ OPT(0,b), $c_{at}$+ OPT(0,t)}={-4+∞,-3+0}=-3
- OPT(0,t)=0
- OPT(0,d)=OPT(0,b)=OPT(0,e)=∞

Percorso ottimo da a a t: a b e c t
Ho ottenuto questo percorso partendo da M[a,5]=OPT(5,a) e osservando che e` uguale a $c_{ab}$+M[b,4] → il percorso e` formato da a e b seguiti dal percorso ottimo per andare da b a t attraversando al piu` 4 archi
Per ottenere il percorso ottimo per andare da b a t attraversando al piu` 4 archi osserviamo che M[b,4] e` uguale a $c_{be}$+M[e,3] → il percorso e` formato da b ed e seguiti dal percorso ottimo per andare da e a t attraversando al piu` 3 archi.
Per ottenere il percorso ottimo per andare da e a t attraversando al piu` 3 osserviamo che M[e,3] e` uguale a $c_{ec}$+M[c,2] → il percorso e` formato da e e c seguiti dal percorso ottimo per andare da c a t attraversando al piu` 2 archi
Per ottenere il percorso ottimo per andare da c a t attraversando al piu` 2 osserviamo che M[c,2] e` uguale a $c_{ct}$+M[t,1] → il percorso e` formato da c e t seguiti dal percorso ottimo per andare da t a t attraversando al piu` 1 arco. Ho finito perche' sono arrivata in t.



## Miglioramento dell'algoritmo

- Usiamo un array unidimensionale M:
  - M[v] = percorso da v a t piu` corto che abbiamo trovato fino a questo momento
  - Per ogni i=1,...,n-1 computiamo cosi` M[v] per ogni v:

$$M[v] = \min(M[v], \min_{(v,w)\in E}(c_{vw} + M[w]))$$

## Miglioramento dell'algoritmo

- Teorema. Durante l'algoritmo, M[v] e` la lunghezza di un certo percorso da v a t, e dopo i aggiornamenti il valore di M[v] **non e` piu` grande della lunghezza del percorso minimo da v a t che usa al piu` i archi**

- Conseguenze sullo spazio
  - Memoria: O(n).

- Tempo:
- il tempo e` sempre O(nm) nel caso pessimo pero` in pratica l'algoritmo si comporta meglio.
  - Possiamo interrompere le iterazioni non appena accade che durante una certa iterazione i nessun valore M[v] cambia



## Computazione del cammino minimo

- Per ogni vertice v memorizziamo in successor[v] il primo nodo che segue v lungo il percorso da v a t di costo M[v].

- First[v] viene aggiornato ogni volta che M[v] viene aggiornato. Se M[v] viene posto uguale a $c_{vw}$+M[w] allora si pone successor[v]=w.

## Implementazione efficiente di Bellman-Ford

```
Push-Based-Shortest-Path(G, s, t) {
   foreach node v ∈ V {
      M[v] ← ∞
      successor[v] ← ϕ   //nel libro si chiama first[v]
   }

   M[t] = 0
   for i = 1 to n-1 {
      foreach node v ∈ V {
      if (M[v] has been updated in previous iteration) {
         foreach node w such that (v, w) ∈ E {
            if (M[v] > M[w] + cvw) {
               M[v] ← M[w] + cvw
               successor[v] ← w
            }
         }
      }
      If no M[w] value changed in iteration i, stop.
   }
}
```



## Minimum Coin Change Problem

- Dato un insieme di monete con valori $v_1<v_2<v_3<\ldots<v_n$ e una banconota di valore V, fornire una formula per calcolare il minimo numero di monete richieste per cambiare la banconota. Assumiamo $v_1=1$ in modo che il problema ammetta una soluzione.

- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- Possiamo cambiare la banconota in 5 modi:
- {1,1,1,1,1,1} {1,1,1,1,2}, {1,1,2,2},{1,1,4}, {2,4}
- La soluzione che include meno monete e` quindi {2,4}

## Minimum Coin Change Problem

OPT(i,v)= minimo numero di monete di valore $v_1,\ldots,v_i$ per cambiare una banconota di valore v

- Se $v_i \leq v$ bisogna considerare sia il caso in cui la soluzione include monete di valore $v_i$ sia il caso in cui non le contiene:
  - Numero monete nella soluzione ottima tra quelle che contengono una moneta di valore $v_i$ e` = 1+ numero monete nella soluzione ottima per l'importo $v-v_i$ quando si possono utilizzare monete di valore $v_1,\ldots,v_i$
  - Numero monete nella soluzione ottima tra quelle che non contengono una moneta di valore $v_i$ e` = numero monete nella soluzione ottima per l'importo v quando si possono utilizzare monete di valore $v_1,\ldots,v_{i-1}$

    $\rightarrow$ $OPT(i,v)= \min\{OPT(i,v-v_i)+1, OPT(i-1,v)\}$
  - Se v=0 allora OPT(i,v)=0 per ogni i
  - Se i=1 allora OPT(i,v)=v per ogni v



## Minimum Coin Change problem

```
MinCoinChange(d, n, V)
For i = 1 to n
  M[i, 0] ← 0 //importo da cambiare = 0 → soluzione contiene 0 monete
For v = 1 to V
  M[1, v] ← v //si possono usare solo monete da un euro
For i = 1 to n
   For v= 1 to V
    if v < v_i
     then M[i, v] =M[i-1,v]
    else
     M[i, v] := min{1+M[i,v-v_i],M[i-1,v]}
```

## Minimum Coin Change problem

**Esercizio:** scrivere l'algoritmo che costruisce la soluzione ottima del minimum change coin problem.



## Coin change problem

- Dato un insieme infinito di monete C di n diversi valori $v_1,\ldots, v_n$ ed una certa banconota di valore V, fornire una strategia per trovare in quanti modi possiamo usare le monete in C per cambiare la banconota.
- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- Possiamo cambiare la banconota in 5 modi:
- {1,1,1,1,1,1} {1,1,1,1,2}, {1,1,2,2},{1,1,4}, {2,2,2}, {2,4}

## Coin change problem

$N(i,v)$=numero di modi in cui possiamo cambiare v con monete di valore $v_1,\ldots,v_i$

- Se $v_i \le v$ allora la soluzione puo` includere o meno una moneta di valore $v_i$
  - Dobbiamo sommare il numero di soluzioni che includono monete di valore $v_i$ al numero di soluzioni che non includono monete di valore $v_i$
  - $N(i,v)= N(i,v-v_i)+ N(i-1, v)$
- Se il valore $v_i$ e` maggiore dell'importo da coprire allora
  - Le soluzioni possibili sono solo quelle che non includono monete di valore $v_i$
  - $N(i,v)=N(i-1, v)$



## Sottosequenza comune piu` lunga

Def. Dati una sequenza di caratteri $x=x_1,x_2,\ldots,x_m$ ed un insieme di indici $\{k_1,k_2,\ldots,k_t\}$ tali che $1 \le k_1<k_2<\ldots<k_t \le m$, la sequenza formata dai caratteri di x in posizione $k_1,k_2,\ldots,k_t$ viene detta sottosequenza di x (N.B. I caratteri della sottosequenza non devono essere necessariamente consecuti in x).

**Problema:** Date due sequenze $x=x_1,x_2,\ldots,x_m$ e $y=y_1,\ldots,y_n$, vogliamo trovare la sottosequenza piu` lunga comune ad entrambe le sequenze.

**Esempio:** x=BACBDAB e y=BDCABA,
BCAB e` una sottosequenza comune a x e y di lunghezza massima.
I caratteri della sequenza BCAB appaiono nelle posizioni 1, 3, 6, 7 in x e nelle posizioni 1, 3, 4, 5 in y.
BDAB e` un'altra una sottosequenza comune a x e y di lunghezza massima.

Approccio brute force: Per ogni sottosequenza di x controlla se la sottosequenza compare in y.
Ci sono $2^m$ sottosequenze di x per cui l'algoritmo sarebbe esponenziale.

## Sottosequenza comune piu` lunga

Input: $x=x_1,x_2,\dots,x_m$ e $y=y_1,\dots,y_n$

Sia OPT(i,j) la lunghezza della sottosequenza piu` lunga comune a $x_1,\dots,x_i$ e $y_1,\dots,y_j$.

Per calcolare OPT(i,j) consideriamo i 3 seguenti casi:

- Se $x_i = y_j$ allora la sottosequenza comune piu` lunga termina con $x_i$
  - In questo caso la soluzione ottima e` formata dalla sottosequenza piu` lunga comune a $x_1,\dots,x_{i-1}$ e $y_1,\dots,y_{j-1}$ seguita dal carattere $x_i = y_j$
- Se $x_i \neq y_j$ e la sottosequenza comune piu` lunga termina con un simbolo diverso da $x_i$ allora la soluzione ottima e` data dalla soluzione ottima per $x_1,\dots,x_{i-1}$ e $y_1,\dots,y_j$
- Se $x_i \neq y_j$ e la sottosequenza comune piu` lunga termina con un simbolo diverso da $y_j$ allora la soluzione ottima e` data dalla soluzione ottima per $x_1,\dots,x_i$ e $y_1,\dots,y_{j-1}$

## Sottosequenza comune piu` lunga

Quindi si ha che per i>0 e j>0

$$OPT(i,j) = \begin{cases} OPT(i,j)=0 & \text{se } i=0 \text{ o } j=0 \\ OPT(i-1,j-1)+1 & \text{se } i>0,\ j>0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max\{OPT(i-1,j),OPT(i,j-1)\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Sottosequenza comune piu` lunga: algoritmo

```
ComputaLunghezzaLCS(X,Y)
m← lunghezza di X
n ← lunghezza di Y
For i=1 to m
     M[i,0]← 0
For j=0 to n
     M[0,j]← 0
For i=1 to m
    For j=0 to n
        If x_i=y
          Then M[i,j]← 1+M[i-1,j-1]
                 b[i,j]="\"
        Else if  M[i-1,j]>M[i,j-1]
          Then M[i,j]← M[i-1,j]
                 b[i,j]="↑"
        Else  M[i,j]← M[i,j-1]
                 b[i,j]="← "
```

L'algoritmo oltre a computare i valori M[i,j]=OPT(i,j), memorizza nelle entrate b[i,j] della matrice b delle frecce in modo che successivamente la sottosequenza comune piu` lunga possa essere ricostruita agevolmente (si veda algoritmo nella slide successiva).

## L'algortimo che stampa la sottosequenza comune piu` lunga

```
Stampa-LCS(b,X,i,j)
If i=0 or j=0
    Then return
If b[i,j]="\"
  Then Stampa-LCS(b,X,i-1,j-1)
          print(x_i )
Else if b[i,j]="↑"
   Then Stampa-LCS(b,X,i-1,j)
Else Stampa-LCS(b,X,i,j-1)
```

## Esercizio 27 cap. 6

- I proprietari di una pompa di carburante devono confrontarsi con la seguente situazione:
- Hanno un grande serbatoio che immagazzina gas; il serbatoio puo` immagazzinare fino ad L galloni alla volta.
- Ordinare carburante e` molto costoso e per questo essi vogliono farlo raramente. Per ciascun ordine pagano un prezzo fisso P in aggiunta al costo della carburante.
- Immagazzinare un gallone di carburante per un giorno in piu` costa c dollari per cui ordinare carburante troppo in anticipo aumenta i costi di immagazzinamento.
- I proprietari del distributore stanno progettando di chiudere per una settimana durante l'inverno e vogliono che per allora il serbatoio sia vuoto.
- In base all'esperienza degli anni precedenti, essi sanno esattamente di quanto carburante hanno bisogno. Assumendo che chiuderanno dopo n giorni e che hanno bisogno di $g_i$ galloni per ciascun giorno i=1,…,n e che al giorno 0 il serbatoio e` vuoto, dare un algoritmo per decidere in quali giorni devono effettuare gli ordini e la quantita` di carburante che devono ordinare in modo da minimizzare il costo.



## Esercizio 27 cap. 6: Soluzione

- Supponiamo che il giorno 1 i proprietari ordinino carburante per i primi i-1 giorni: $g_1+g_2+\ldots+g_{i-1}$
- Il costo di questa operazione si traduce in un costo fisso di P piu` un costo di $c(g_2+2g_3+3g_4\ldots+(i-2)g_{i-1})$
- Sia OPT(d) il costo della soluzione ottima per il periodo che va dal giorno d al giorno n partendo con il serbatoio vuoto
- La soluzione ottima da d ad n include sicuramente un ordine al giorno d per un certo quantitativo di carburante. Sia f il giorno in cui verra` fatto il prossimo ordine.
  - La quantita ordinata il giorno d deve essere $g_d+g_{d+1}+\ldots+g_{f-1}$ $(g_d+g_{d+1}+\ldots+g_{f-1} \leq L)$
  - Il costo connesso a questo ordine e` $P+c(g_{d+1}+2g_{d+2}+3g_{d+3}\ldots+(f-1-d)g_{f-1})$
  - Il costo della soluzione ottima da d ad n se il secondo ordine in questo intervallo avviene al tempo f e` $P + \sum_{i=d}^{f-1} c(i-d)g_i + OPT(f)$

$$OPT(d) = P + \min_{f>d:\sum_{i=d}^{f-1} g_i \leq L} \sum_{i=d}^{f-1} c(i-d)g_i + OPT(f)$$