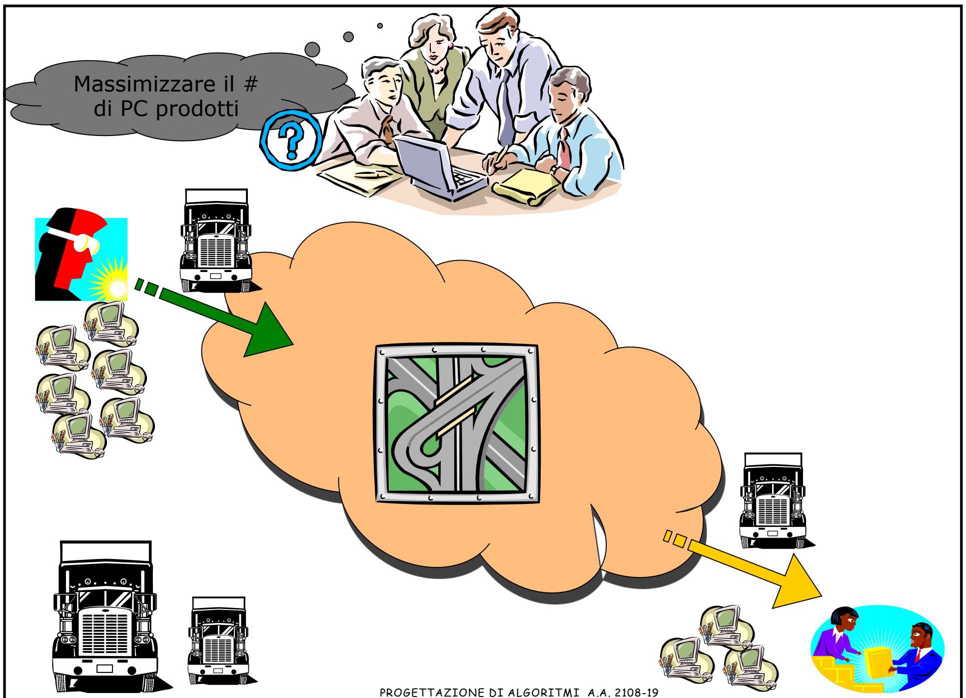
Massimo flusso

Progettazione di Algoritmi a.a. 2108-19
Matricole congrue a 1
Docente: Annalisa De Bonis

1



Descrizione del problema

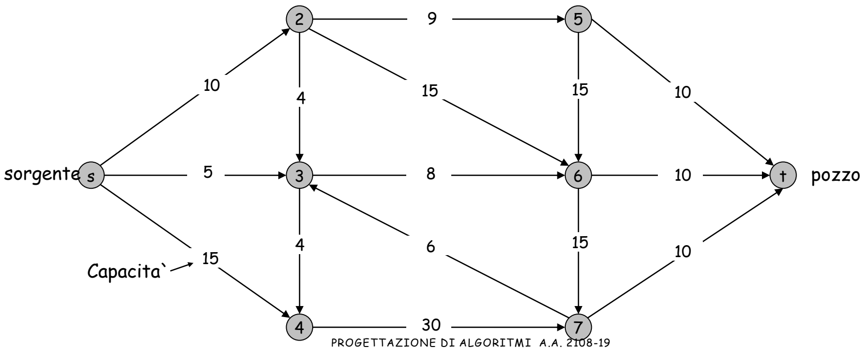
- Una fabbrica (sorgente) di PC deve stabilire il numero di PC da assemblare giornalmente.
- Tutti i PC prodotti verranno venduti in un negozio (destinazione).
- La fabbrica ed il negozio sono collegati attraverso una rete di comunicazione.
- Su ogni tratto della rete è in servizio un furgone che può trasportare un numero fissato di PC (numero che dipende dalla grandezza del furgone).

Ulteriori vincoli

- In ogni nodo della rete di comunicazione:
  - Non è possibile produrre PC
  - Non è possibile stoccare PC
- In altre parole, il numero di PC che entra in un nodo è uguale al numero di PC che esce dal nodo.
- Obiettivo: Qual è il maggior numero di PC che può essere trasportato dalla sorgente alla destinazione senza violare i vincoli del problema?

Rete di flusso

- Gli archi rappresentano condotte attraverso le quali fluisce materiale.
- $G = (V, E)$: grafo direzionato senza archi paralleli (il materiale fluisce in una sola direzione)
- Due nodi speciali sorgente s e pozzo t.
- $c(e) \geq 0$: capacita` dell'arco e
- Assumiamo inoltre che ogni vertice si trovi lungo un percorso da s a t



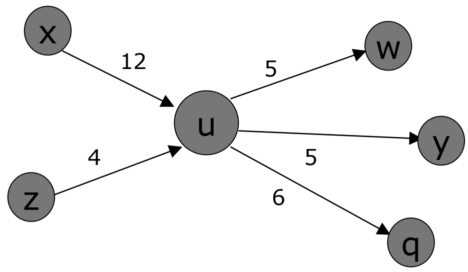
Funzione flusso

- Una funzione flusso f e` una funzione che assegna ad ogni arco (u,v) un valore reale f(u,v) **maggiore o uguale di 0** e soddisfa le due seguenti proprieta`:

- Vincolo sulla capacita`: per ogni arco (u,v) si ha $f(u,v) \leqq c(u,v)$
  - il flusso su un arco (u,v) deve essere minore o uguale della capacita` dell'arco (u,v)
- Conservazione del flusso: per ogni nodo u diverso da s e t si ha
  - la quantita` di flusso che entra in un nodo u deve essere uguale alla quantita` di flusso che esce da u.

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$$

Conservazione del flusso: esempio



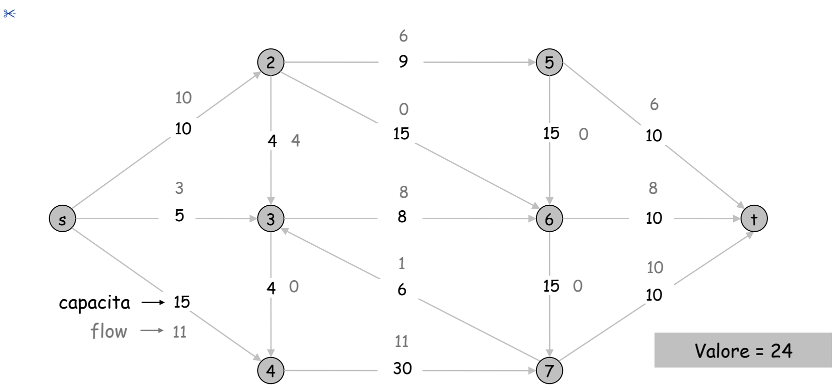
Valore del flusso

Dato un flusso f di G, **il valore del flusso** è definito come:

- $v(f) = \sum_{v \in V} f(s,v)$

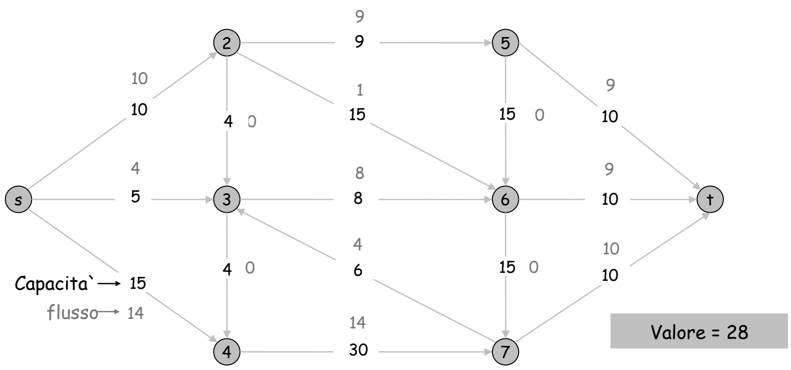
E' possibile verificare che vale anche
$v(f) = \sum_{v \in V} f(v,t)$

Flussi



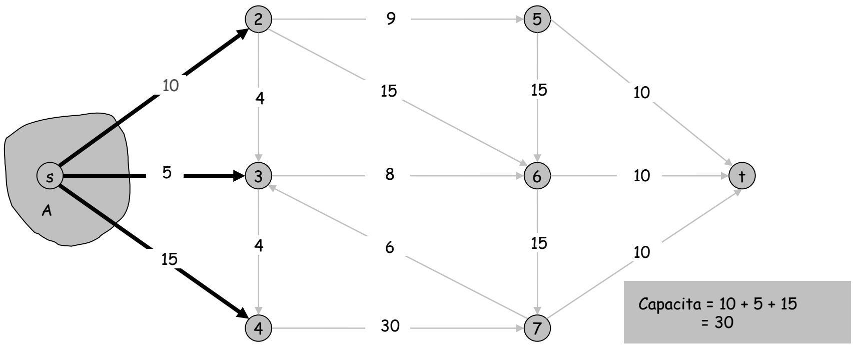
Il problema del massimo flusso

- Il problema del massimo flusso. Trova un flusso da s a t di valore massimo.



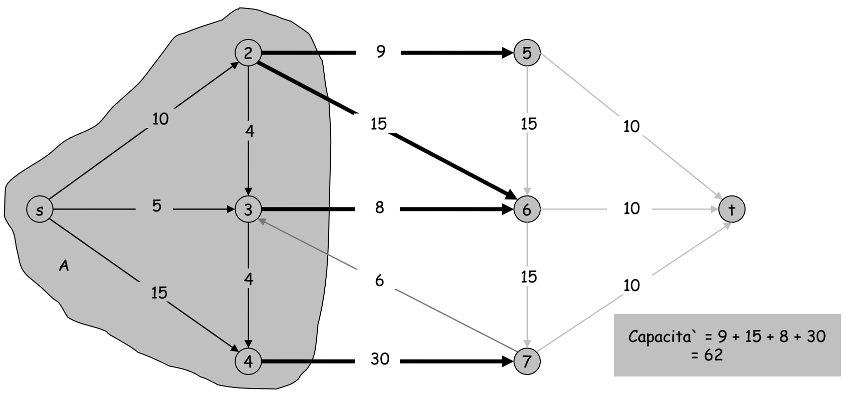
Taglio

- Def. Un taglio s-t (o semplicemente taglio) e` una partizione (A, B) di V con $s \in A$ e $t \in B$.
- Def. La capacita` di un taglio (A, B) e`: $cap(A, B) = \sum_{e \text{ uscente da } A} c(e)$



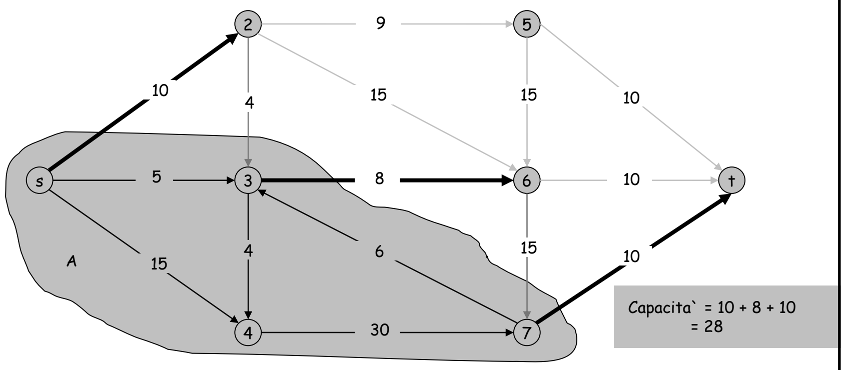
11

Tagli



Il problema del minimo taglio

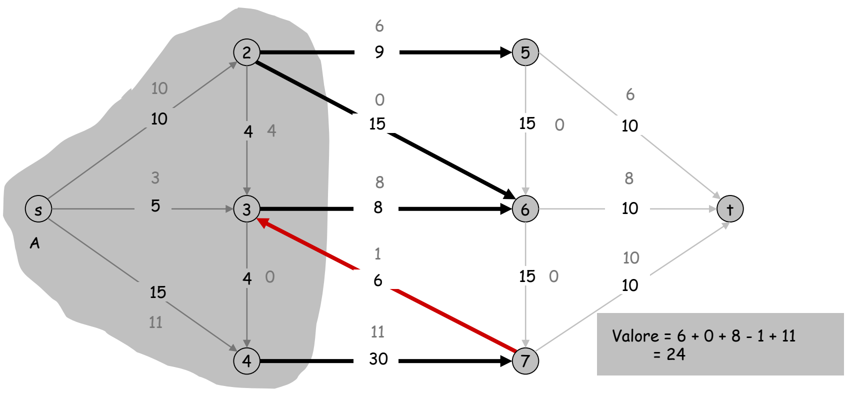
- Problema del minimo taglio s-t. Trova un taglio s-t di capacita` minima



Flussi e tagli

- Def. Sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il flusso netto inviato attraverso il taglio e` la differenza

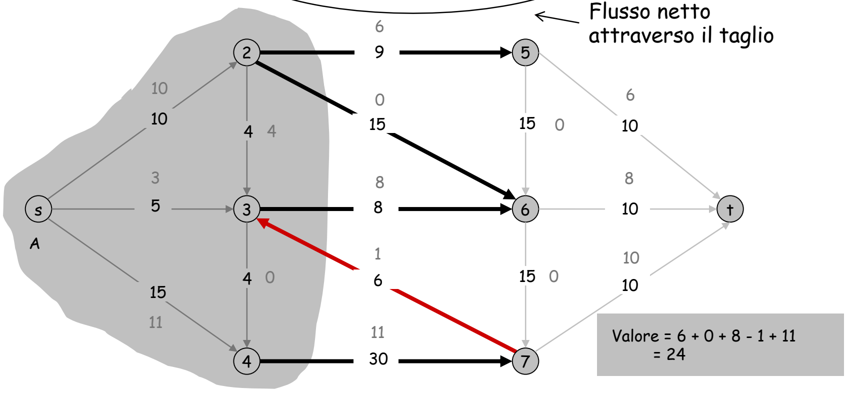
$$\sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e)$$



Flussi e tagli

- Lemma del valore del taglio. Sia f un qualsiasi flusso e sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il flusso netto inviato attraverso il taglio e` uguale a:

$$\sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e)$$

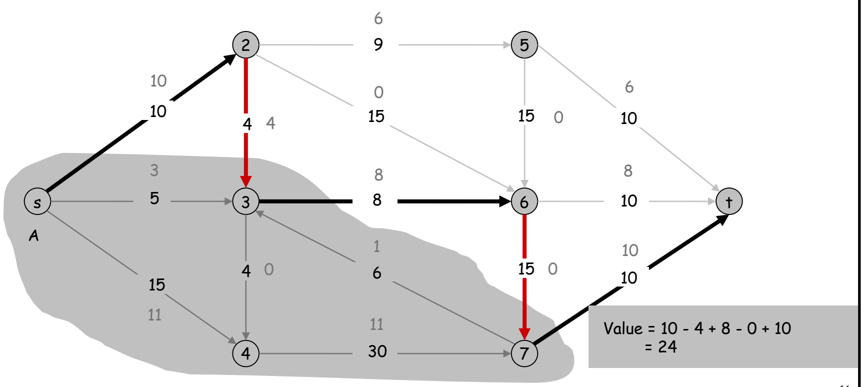


15

Flussi e Tagli

- Lemma del valore del taglio. Sia f un qualsiasi flusso e sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il flusso netto inviato attraverso il taglio e` uguale al valore del flusso (quantita` di flusso uscente da s).

$$v(f) = \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e)$$



16

Flussi e tagli

- Lemma del valore del taglio. Sia f un qualsiasi flusso e sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il flusso netto inviato attraverso il taglio e` uguale al valore del flusso.

$$v(f) = \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e)$$

Dim.

$$v(f) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e)$$

Dalla definizione del valore del flusso

$$= \sum_{e \text{ out of } s} f(e) + \sum_{v \in A-\{s\}} \Big(\sum_{e \text{ out of } v} f(e) - \sum_{e \text{ into } v} f(e) \Big)$$

Per la conservazione del flusso la quantita` sommata e` 0

$$= \sum_{e \text{ out of } s} f(e) - \sum_{e \text{ into } s} f(e) + \sum_{\substack{v \in A \\ v \neq s}} \Big(\sum_{e \text{ out of } v} f(e) - \sum_{e \text{ into } v} f(e) \Big)$$

La quantita` sottratta e` 0 perche` nella sorgente non entra niente

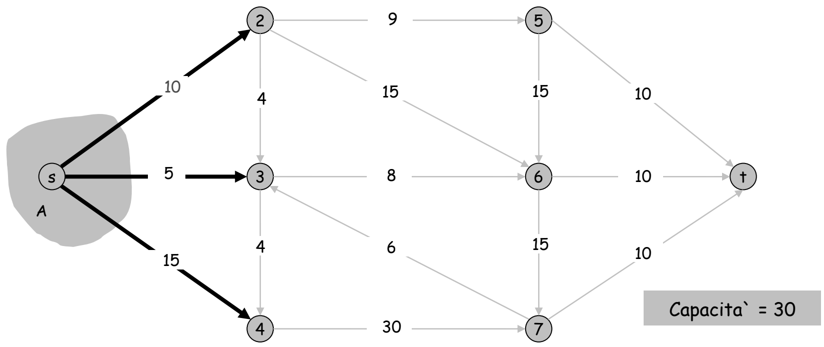
$$= \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \text{ out of } v} f(e) - \sum_{e \text{ into } v} f(e) \right)$$

$$= \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e).$$

Flussi e tagli

- Dualita` debole. Sia f un qualsiasi flusso, e sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il valore del flusso e` al piu` la capacita` del taglio.

Capacita` taglio = 30 $\Rightarrow$ Valore flusso $\leq$ 30



Flussi e tagli

- Dualita` debole. Sia f un qualsiasi flusso, e sia (A,B) un qualsiasi taglio s-t. Il valore del flusso e` al piu` la capacita` del taglio (A,B).
  In altre parole, per ogni taglio s-t (A,B), si ha v(f) ≤ cap(A, B).

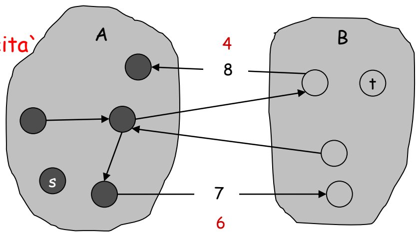
Dim.

$$v(f) = \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ into } A} f(e)$$ Dal lemma del valore del taglio

$$\leq \sum_{e \text{ out of } A} f(e)$$

$$\leq \sum_{e \text{ out of } A} c(e)$$ Dal vincolo della capacita`

$$= \text{cap}(A, B)$$



cap(A,B)=v(f)

Massimo flusso e Minimo taglio

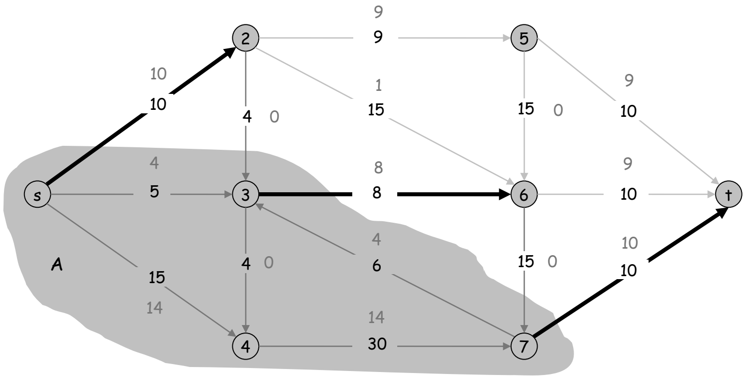
Corollario. Sia f un flusso di G e sia (A, B) un taglio s-t di G. Se si ha che v(f) = cap(A, B) allora f e` un massimo flusso e (A, B) e` un minimo taglio.

Dim.

- Sia (X,Y) un qualsiasi taglio s-t e sia f' una qualsiasi funzione flusso e siano (A,B) ed f rispettivamente il taglio s-t e la funzione flusso dell'ipotesi per cui si ha che cap(A,B)=v(f).
- Risulta allora v(f') ≤ cap(A,B)=v(f) ≤ cap(X,Y),
  - la prima e l'ultima disuguaglianza sono conseguenza della dualita` debole
- Dal punto precedente si ha che

1. per ogni flusso f', v(f) e` maggiore o uguale di v(f') per cui f e` un flusso massimo
2. Per ogni taglio s-t (X,Y), cap(A,B) e` minore o uguale di cap(X,Y) per cui (A,B) e` un taglio con capacita` minima.

Massimo flusso e Minimo taglio



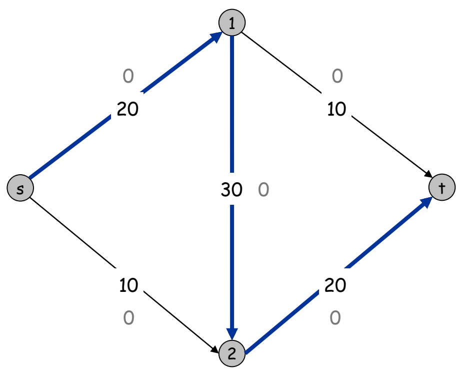
Valore del flusso= 28
Capacita` del taglio = 28

il valore del flusso indicato sugli archi e la capacita` del taglio considerato sono uguali per cui il flusso e` un massimo flusso (cioe flusso di valore massimo) e il taglio e` un minimo taglio (cioe` un taglio di capacita` minima)

21

Algoritmo per il max flusso: approccio sbagliato

- Algoritmo greedy.
- Cominciamo con $f(e) = 0$ per ogni arco $e \in E$.
- Ad ogni passo,
  - Troviamo un percorso P da s a t dove per ogni arco sul percorso si ha $f(e) < c(e)$.
  - Aumentiamo il flusso lungo il percorso P in modo da rispettare il vincolo della capacita` e quello sulla conservazione del flusso.
  - Ripetiamo fino a che non e` piu` possibile trovare un percorso lungo il quale e` possibile aumentare il flusso



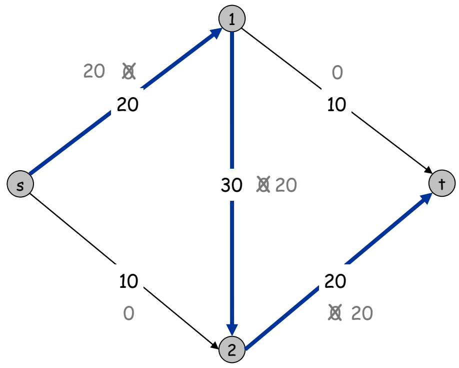
Valore del flusso= 0

22

Algoritmo per il max flusso: approccio sbagliato

Algoritmo greedy.

- Cominciamo con f(e) = 0 per ogni arco e ∈ E.
- Ad ogni passo,
  - troviamo un percorso P da s a t dove per ogni arco sul percorso si ha f(e) < c(e).
  - Aumentiamo il flusso lungo il percorso P in modo da rispettare il vincolo della capacita` e quello sulla conservazione del flusso.
  - Ripetiamo fino a che non e` piu` possibile trovare un percorso lungo il quale e` possibile aumentare il flusso

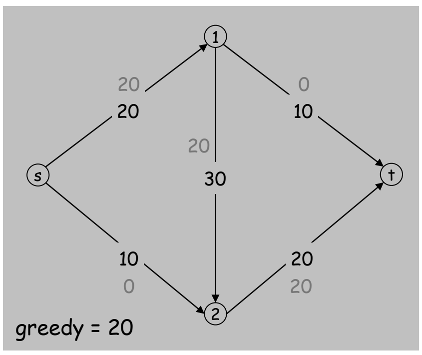


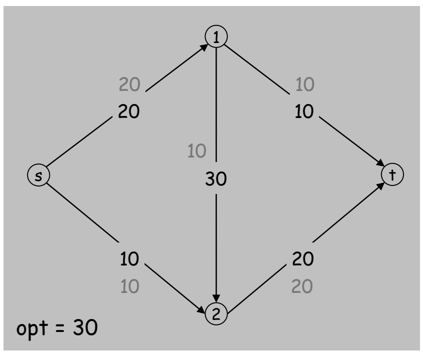
Valore del flusso= 20

23

Algoritmo per il max flusso: approccio sbagliato

- Algoritmo greedy.
- Cominciamo con f(e) = 0 per ogni arco e ∈ E.
- Ad ogni passo,
  - Troviamo un percorso P da s a t dove per ogni arco sul percorso si ha f(e) < c(e).
  - Aumentiamo il flusso lungo il percorso P in modo da rispettare il vincolo della capacita` e quello sulla conservazione del flusso.
  - Ripetiamo fino a che non e` piu` possibile trovare un percorso lungo il quale e` possibile aumentare il flusso

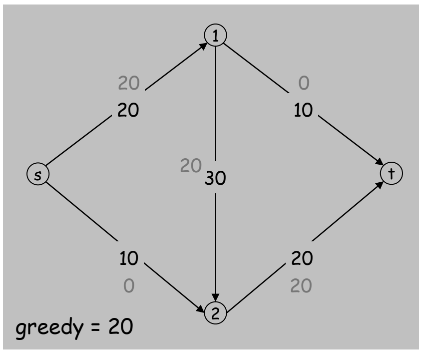


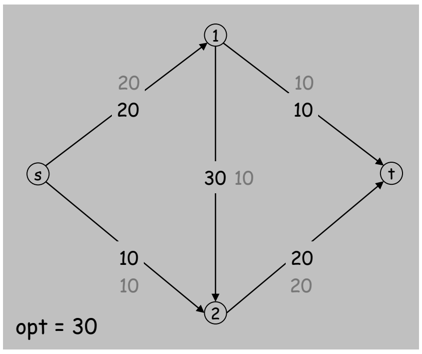


24

Algoritmo per il max flusso: approccio sbagliato

- Il problema con l'algoritmo di prima e` che si blocca quando non riesce a trovare un percorso lungo il quale spingere altro flusso.
- Per sbloccare la situazione, possiamo provare ad annullare in parte o del tutto il flusso inviato su alcuni degli archi.
- Come facciamo ad annullare in parte o del tutto il flusso lungo un certo arco e=(u,v)? Risposta: Immaginiamo di far tornare indietro il flusso.
- Quanto flusso possiamo far tornare indietro? Risposta: Al piu` una quantita` pari al flusso f(e) spinto lungo e.



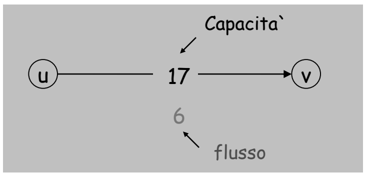


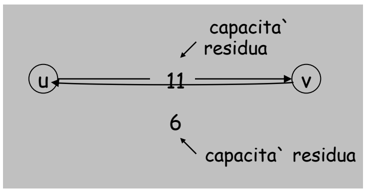
25

Grafo residuo

- Sia data una rete di flusso G=(V,E)
  - Per ogni arco (originale) e = (u, v) $\in$ E, indichiamo con c(e) la sua capacita`.
- Sia data una funzione flusso f.
- **Notazione: Per ogni arco e=(u,v), indichiamo con e^R l'arco (v,u)**

Def. Insieme di archi residui E_f rispetto ad f:
- per ogni arco (originale) e = (u, v) $\in$ E,
  - se $f(e) < c(e)$ allora $e \in E_f$ e ha capacita` $c_f(e)= c(e)-f(e)$.
  - se $f(e)>0$ allora $e^R=(v,u) \in E_f$ e ha capacita` $c_f(e^R)=f(e)$.
- Quindi $E_f = \{e: e\in E,\ f(e) < c(e)\} \cup \{e^R : e\in E,\ f(e) > 0\}$
- Le capacita` $c_f$ degli archi residui vengono dette capacita` residue.
- Def. Grafo residuo di G rispetto ad f: $G_f = (V, E_f)$.





26

Grafo residuo rispetto ad f

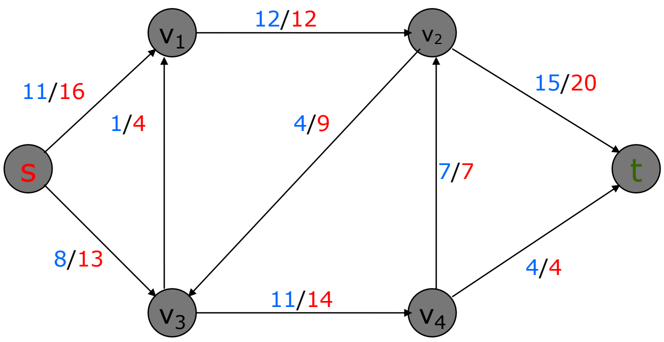
- Per definizione, un arco (u,v) appartiene ad E_f se
  - (u,v) $\in$ E , c(u,v)>0 e f(u,v)<c(u,v).
    - e in questo caso si ha $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$

  oppure se
  - (v,u) $\in$ E e f(v,u)>0.
    - e in questo caso si ha $c_f(u,v)=f(v,u)$
    - L'arco (u,v) incluso in questo modo di E_f viene detto arco backward
- Ne consegue che $|E_f| \leq 2|E|$

Augmentig path
(cammino aumentante)

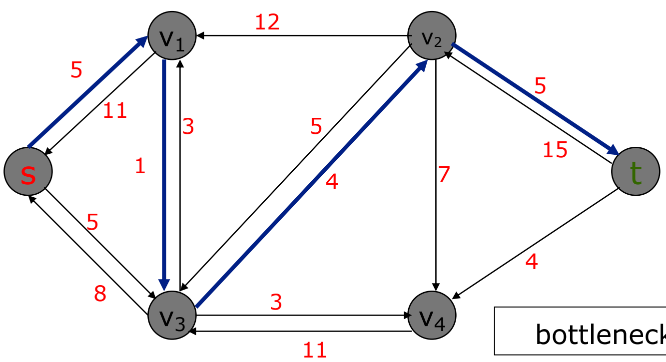
- Data una rete di flusso G=(V,E) ed un flusso f, un *augmenting path* (cammino aumentante) P è un cammino semplice da s a t nella rete residua G_f
- Dato un *augmenting path* P definiamo la *capacità residua* di P (**collo di bottiglia di P rispetto al flusso f**) come
- bottleneck(P,f) = min{$c_f(u,v)$: (u,v) è un arco in P}
- La capacità residua rappresenta la massima quantità di flusso che si può trasportare lungo P
- Se esiste un cammino aumentante P in G_f e\` quindi possibile aumentare il valore del flusso di una quantita\` pari a bottleneck(P,f)
- Si computa una nuova funzione di flusso f' che differisce da f solo per i valori assegnati agli archi e (del grafo originario G) tali che e o e^R si trovano lungo P.
  - Se e= (u,v) e\` un arco del grafo originario G e (u,v) si trova lungo P allora f'(u,v)=f(u,v)+ bottleneck(P,f)
  - Se e=(u,v) e\` un arco del grafo originario G e (v,u) si trova lungo P allora f'(u,v)=f(u,v)- bottleneck(P,f)

Esempio di rete di flusso



Esempio di augmentig path

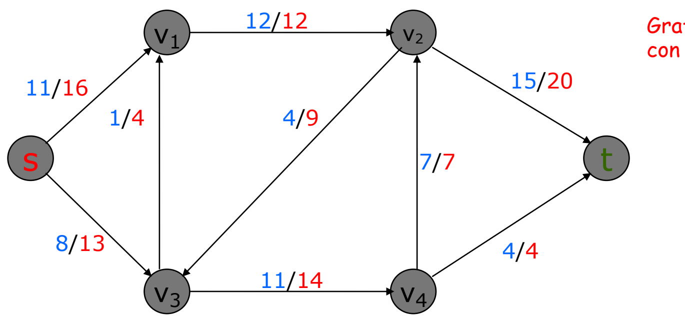
Rete residua della rete disegnata nella slide precedente (rispetto alla funzione flusso li` data)



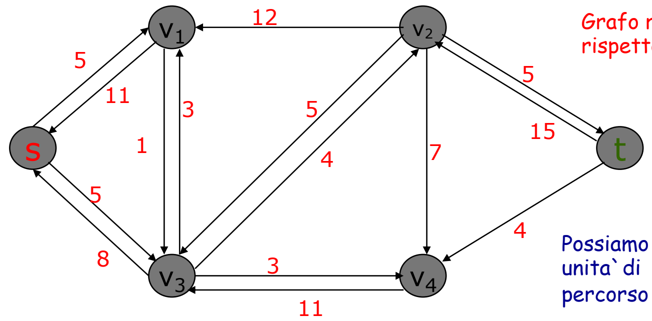
bottleneck(P,f)=1

$P=(s,v_1)(v_1,v_3)(v_3,v_2)(v_2,t)$

Esempio di come si usa la rete residua per aumentare il valore del flusso



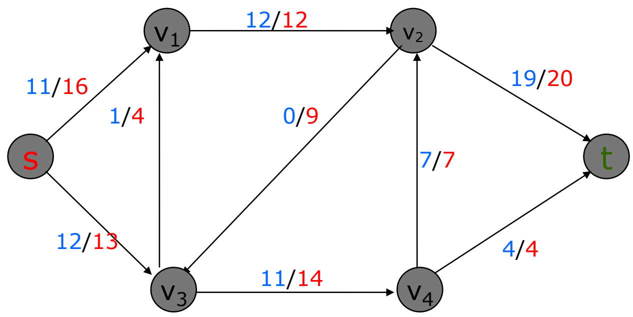
Grafo di partenza con flusso f



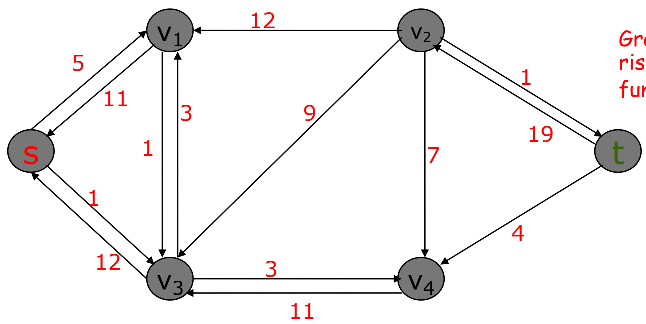
Grafo residuo rispetto ad f

Possiamo spingere 4 unita` di flusso lungo il percorso s, v_3 , v_2 , t

Esempio di come si usa la rete residua per aumentare il valore del flusso



Grafo originale con i valori del flusso aggiornati. Chiamiamo f' la nuova funzione flusso.



Grafo residuo rispetto alla nuova funzione flusso f'

32

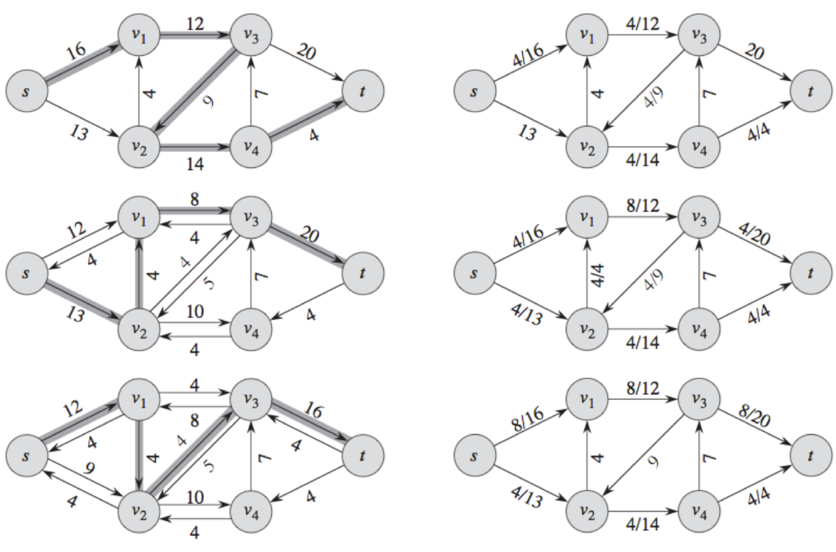
Algorithm di Ford-Fulkerson

```
Augment(f, c_f, P) {
   b ← bottleneck(P,c_f)
   foreach e ∈ P {
      if (e ∈ E) f(e) ← f(e) + b
      else       f(e^R) ← f(e^R) - b
   }
   return f
}
```

```
Ford-Fulkerson(G, s, t, c) {
   foreach e ∈ E  f(e) ← 0
   G_f ← residual graph with respect to f

   while (there exists augmenting path P in G_f) {
      f ← Augment(f, c_f , P)
      update G_f
   }
   return f
}
```


Esempio



Algoritmo di Ford Fulkerson

Teorema. Sia $G=(V,E)$ una rete di flusso e sia f un flusso in G. Sia P un *augmentig path* nella rete residua G_f. Indichiamo con f' il flusso restituito da `Augment(f, c, P)`. Allora f' è un flusso in G con valore $val(f') = val(f)+bottleneck(P,f) > val(f)$

Teorema del max flusso e minimo taglio

- Teorema: Sia dato un flusso f per la rete di flusso $G=(V,E)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti
- (i) Esiste un taglio (A, B) tale che $v(f) = cap(A, B)$.
- (ii) Il flusso f e` un max flusso
- (iii) Non esiste un cammino aumentante in G_f.

Dim:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Questo e` il corollario che abbiamo gia` dimostrato

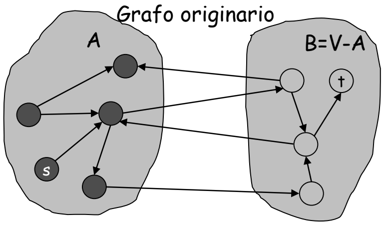
(ii) $\Rightarrow$ (iii)

- Se esistesse un percorso aumentante in G_f allora potremmo aumentare il flusso spingendo altro flusso lungo il cammino aumentante e di conseguenza f non sarebbe massimo. Infatti il teorema precedente implica che il nuovo flusso avrebbe valore = f + bottleneck(P,f) > f

Continua nella prossima slide

Teorema del max flusso e minimo taglio

- (iii) $\Rightarrow$ (i)
  - Supponiamo che G_f non contenga cammini aumentanti.
  - Sia A l' insieme dei vertici raggiungibili da s in G_f
  - Per definizione di A, $s \in A$.
  - Siccome per ipotesi G_f non contiene cammini aumentanti allora t non e` raggiungibile da s e di conseguenza $t \notin A$. Quindi (A,B) con B=V-A e ` un taglio s-t.

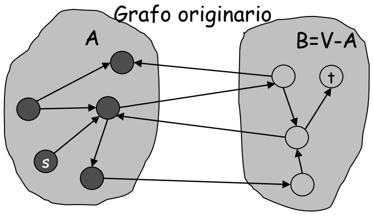


continua nella prossima sliede

Teorema del max flusso e minimo taglio

Possiamo allora applicare il lemma del valore del taglio al flusso f e al taglio (A,B)

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to } A} f(e) \\ &= \sum_{e \text{ out of } A} c(e) \\ &= cap(A,B) \end{aligned}$$



- La seconda uguaglianza e` conseguenza delle seguenti osservazioni.

Gli archi di G che vanno da A a B non sono nel grafo residuo G_f \altrimenti vi sarebbero nodi in B raggiungibili da nodi di A il che per come e` stato costruto il taglio (A,B) e` impossibile

$\rightarrow \sum_{e \text{ out of } A} f(e) = \sum_{e \text{ out of } A} c(e)$

Gli archi di G che vanno da B ad A hanno flussi uguali a 0: supponiamo che un arco (v,u) con u in A e v in B abbia flusso f(v,u)>0. Questo vuol dire che $c_f(u,v)>0$ e quindi (u,v) e` in $G_f$ e di conseguenza v e` in anch'esso in A. Contraddizione!

$\rightarrow \sum_{e \text{ in to } A} f(e) = 0$

Conseguenze del teorema

- Un flusso f e` massimo se e solo se non ci sono cammini aumentanti
- Il valore del massimo flusso e` uguale alla capacita` del minimo taglio

Tempo di esecuzione

- Il *tempo di esecuzione* dell'algoritmo di Ford-Fulkerson dipende da come si determina il cammino aumentante
- Quando la capacità assume valori reali (irrazionali), se il cammino aumentante non è scelto con cura Ford-Fulkerson potrebbe non convergere mai
- Se l'AP è scelta usando la BFS, l'algoritmo ha un *running-time* polinomiale

Tempo di esecuzione nel caso di capacita` intere

Assunzione. Tutte le capacita` sono interi tra uno e C
→somma capacita` archi uscenti da s ≤n C
→ valore massimo flusso $v(f^*) \leq nC$

Invariante. Ciascun valore del flusso f(e) e ciascuna capacita` residua $c_f(e)$ rimane un intero durante l'intera esecuzione dell'algoritmo di Ford-Fulkerson

Teorema. L'algoritmo termina in $v(f^*)$ iterazioni.
Dim. Ogni iterazione aumenta il flusso di almeno uno

Tempo di esecuzione nel caso di capacita` intere

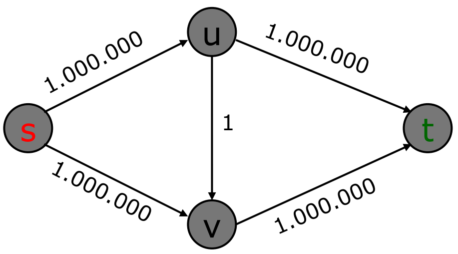
- Teorema. Sia f^* la funzione di massimo flusso e supponiamo che la capacita` degli archi sia compresa tra 1 e C. L'algoritmo di Ford-Fulkerson ha tempo di esecuzione $O(m \times v(f^*)) = O(mnC)$
- Dim.
- Ogni iterazione del while impiega
  - Tempo O(n+m)=O(m) per trovare il cammino aumentante con BFS o DFS.
  - Tempo O(n)=O(m) per Augment
  - Tempo O(m) per costruire il nuovo grafo residuo.
- Dal teorema nella pagina precedente si ha che il numero di iterazioni del while e` al piu` $v(f^*)$ per cui il tempo di esecuzione del while e` $O(m \times v(f^*))$. Abbiamo osservato che $v(f^*) \leq nC$ per cui tale tempo e` $O(m \times nC)$.
- Corollario. Se C=1, Ford-Fulkerson ha tempo di esecuzione O(mn).

Max flusso per rete con capacita` intere

Teorema. Se tutte le capacita` sono intere allora il valore del flusso max v(f*) e` intero ed esiste una funzione flusso f con valore v(f*) tale che f(e) e` un intero per ogni arco e

- Dim. Basta considerare l'algoritmo di Ford-Fulkerson:
  - l'algoritmo termina quando non ci sono piu` cammini aumentanti e, per il teorema del massimo flusso e minimo taglio, il flusso restituito e` max.
  - abbiamo osservato che, in presenza di capacita` intere, il valore del flusso restituito dall'algoritmo di Ford-Fulkerson e` intero e assegna ad ogni arco e un valore f(e) intero.
  - I due punti precedenti implicano che la funzione di flusso restituita in output dall'algoritmo di Ford-Fulkerson ha valore max v(f*) ed e` tale che f(e) e` un intero per ogni arco e

Scelta del cammino aumentante



f^*=2.000.000

AP_1=(s,u)(u,v)(v,t) Percorso aumentante nelle iterazioni di ordine dispari

AP_2=(s,v)(v,u)(u,t) Percorso aumentante nelle iterazioni di ordine pari

Numero iterazioni = 2.000.000

Scegliere buoni cammini aumentanti

- Alcune scelte dei cammini aumentanti possono portare ad un numero elevato di iterazioni
- Scelte piu` attente possono portare ad algoritmi polinomiali
- Come gia` osservato, se le capacita` sono numeri irrazionali, l'algoritmo potrebbe non terminare.
  - NB: capacita` reali razionali possono essere trasformate in interi → l'algoritmo converge.

[Edmonds-Karp 1972, Dinitz 1970]

- Viene scelto il cammino aumentante piu` corto (BFS!).
- $O(nm)$ iterazioni
- Si puo` implementare in modo il tempo di esecuzione sia $O(nm^2)$