

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

Spazio riservato alla correzione

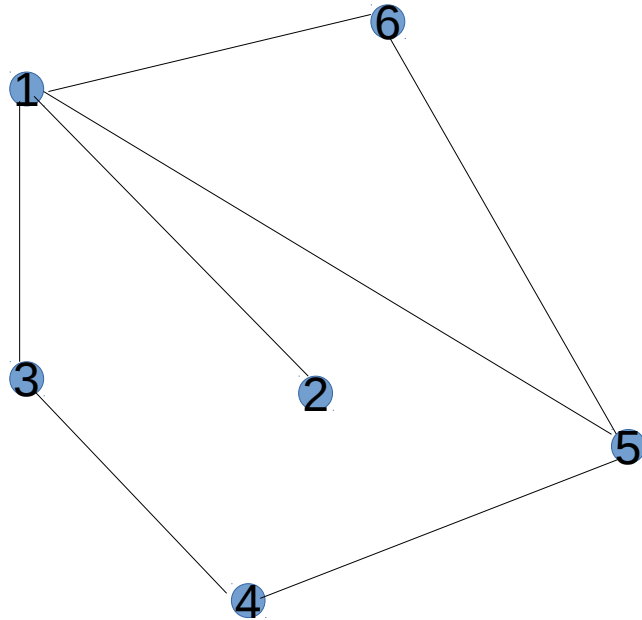
1	2	3	4	Totale
/25	/22	/28	25	/100

Grafi

- a) Spiegare in cosa consiste l'ordinamento topologico di un grafo direzionato aciclico.

- b) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo **ricorsivo** che computa l'ordinamento topologico di un grafo direzionato aciclico in tempo $O(n+m)$. Si descrivano tutte le strutture dati utilizzate dall'algoritmo e si dimostri che l'algoritmo ha tempo di esecuzione $O(n+m)$ nel caso pessimo.

- c) Disegnare gli alberi BFS e DFS che si ottengono rispettivamente eseguendo una visita BFS e una visita DFS sul seguente grafo a partire dal nodo 1. **Si assuma che i nodi siano disposti nelle liste di adiacenza in ordine crescente di etichetta.**



3. Algoritmi greedy

- a) Si spieghi in che cosa consiste un'istanza (input) del problema del caching offline e in cosa consiste una soluzione (output) del problema.

- b) Si spieghi che cosa è un eviction scheduling ridotto (se non lo si è già spiegato al punto precedente) e si dimostri che è sempre possibile trasformare un eviction schedule in un eviction schedule ridotto senza aumentare il numero totale di inserimenti nella cache.

- c) Si illustri in che modo può essere usata una coda a priorità per implementare l'algoritmo di Belady. Non è necessario fornire lo pseudocodice dell'algoritmo.

4. Programmazione dinamica

- a) Si fornisca una formula ricorsiva per computare il valore $OPT(i,v)$ della soluzione ottima per il problema dei cammini minimi. Si spieghi **in modo chiaro** come si arriva a questa formula. **Prima di procedere però si completi la seguente frase. L'esercizio 3 sarà valutato solo se lo studente fornirà una definizione corretta di $OPT(i,v)$.**

$OPT(i,v) =$ lunghezza del ...

- b) In generale, per quanti valori di i dobbiamo computare $OPT(i,v)$ per essere certi di ottenere il valore più piccolo di $OPT(i,v)$ tra tutti i possibili valori di i ? **Giustificare la risposta.**

- c) Si consideri la seguente istanza di interval scheduling pesato e si disegni il vettore M dei valori computati dall'algoritmo per interval scheduling pesato basato sulla programmazione dinamica. Dire qual è la soluzione ottima e qual è il suo valore. Indicare con un cerchietto le celle ispezionate dall'algoritmo che costruisce la soluzione ottima.

i	s_i	f_i	v_i
1	2	5	2
2	1	3	4
3	5	7	8
4	3	6	1
5	6	10	9
6	0	2	6

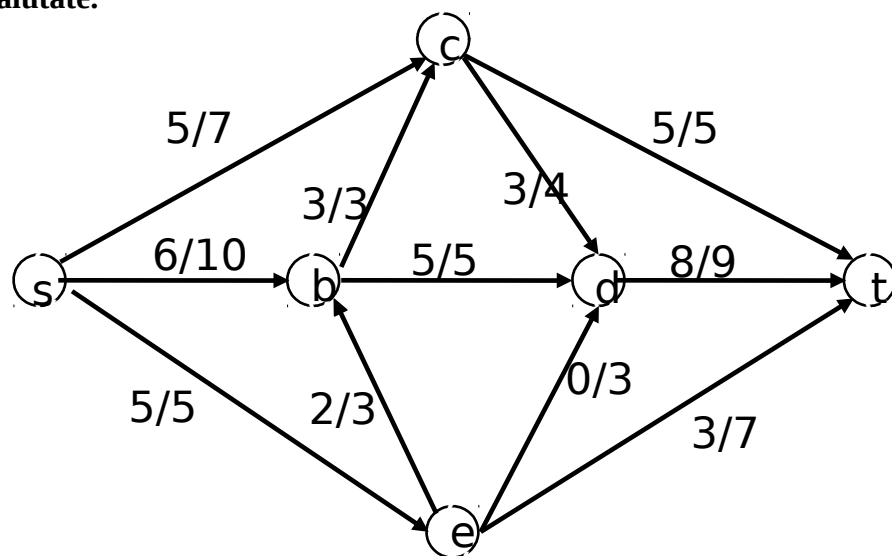
4. **Massimo flusso**

a) Si consideri la seguente rete di flusso e la funzione di flusso i cui valori sono indicati a sinistra delle capacità degli archi. Si disegni la rete residua rispetto alla funzione flusso indicata e si dica se questa funzione ha valore massimo. Nel caso in cui la funzione non abbia valore massimo, si fornisca **la funzione flusso con valore massimo e il taglio di capacità minima**. A tal fine si eseguano una o più iterazioni dell'algoritmo di Ford-Fulkerson **a partire dalla funzione di flusso data**.

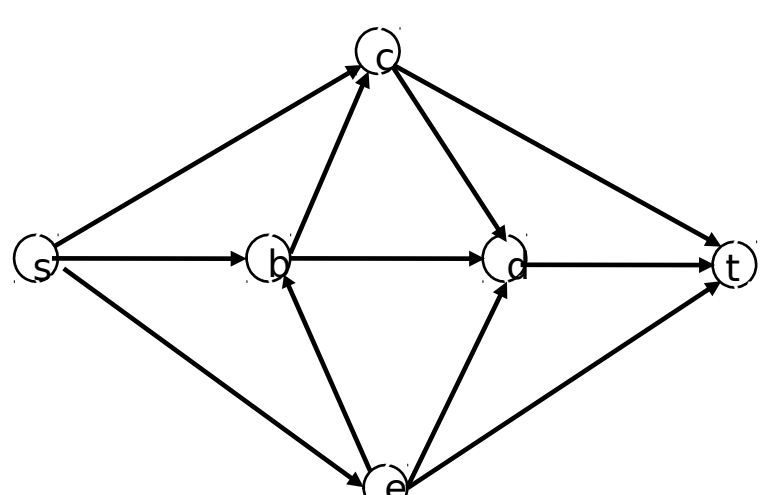
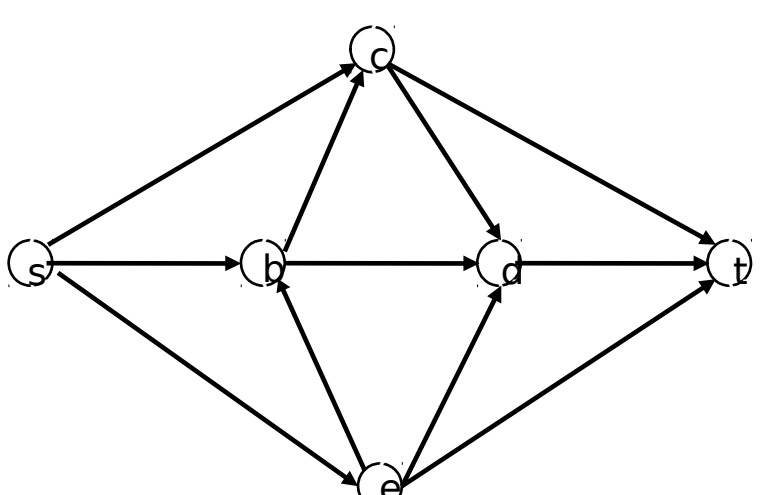
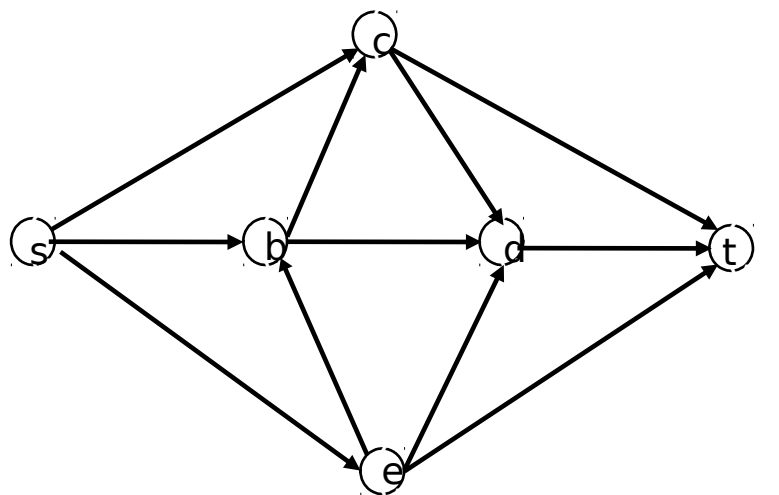
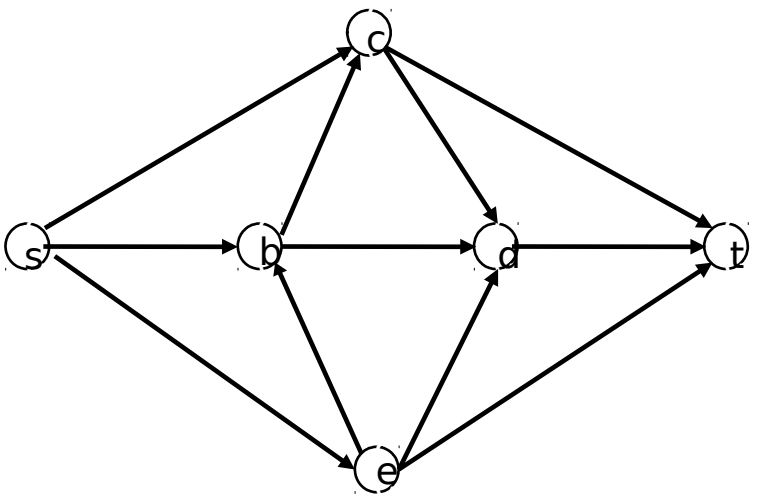
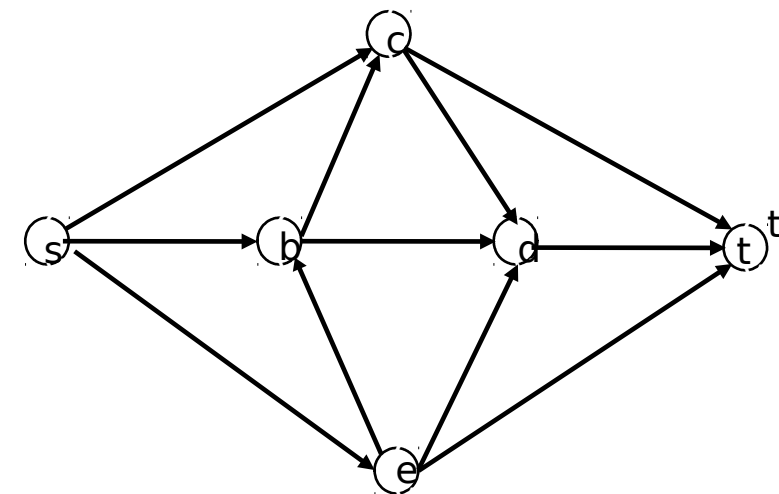
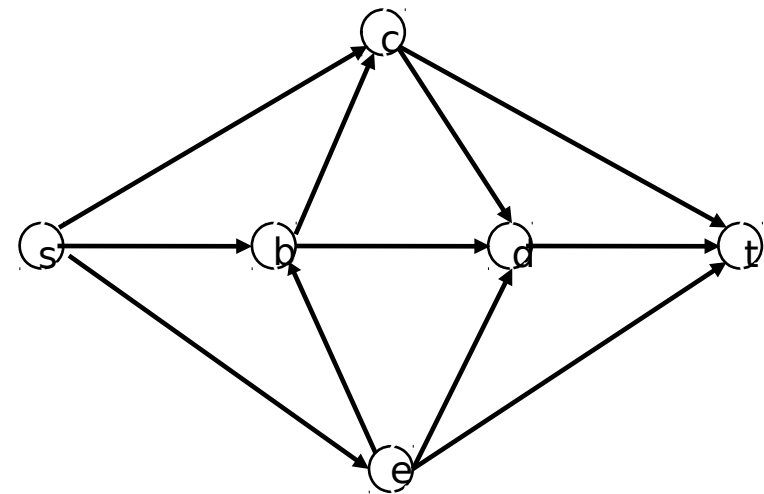
Per ogni iterazione dell'algoritmo, occorre

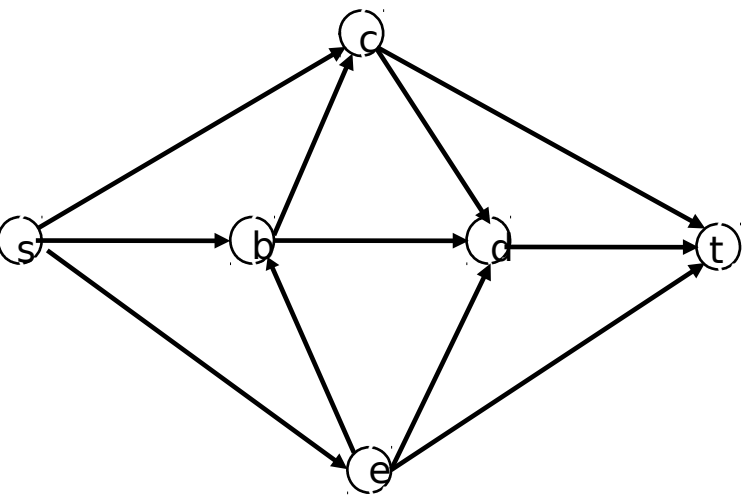
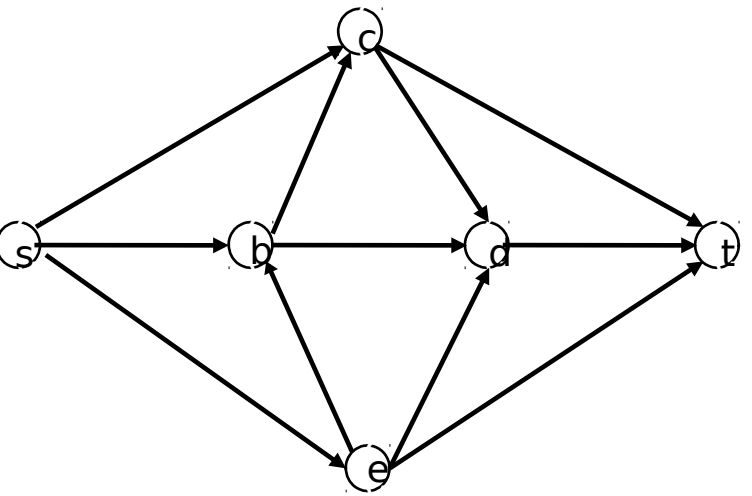
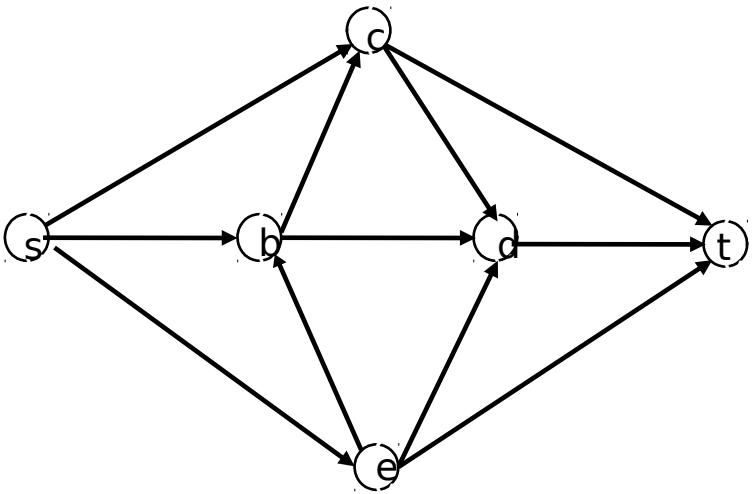
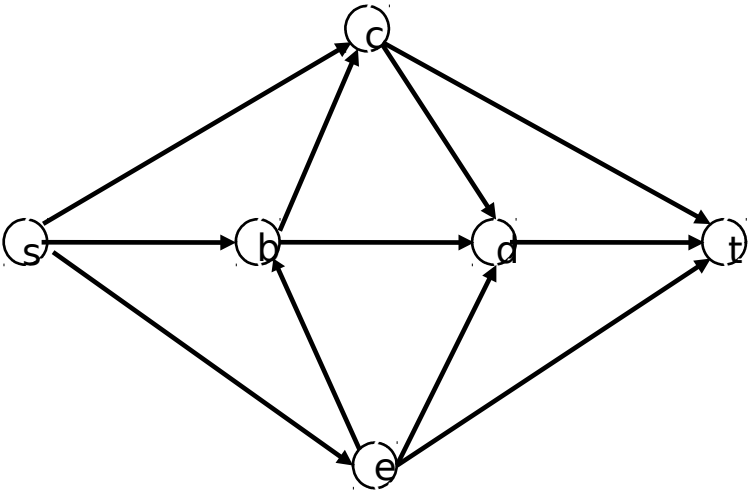
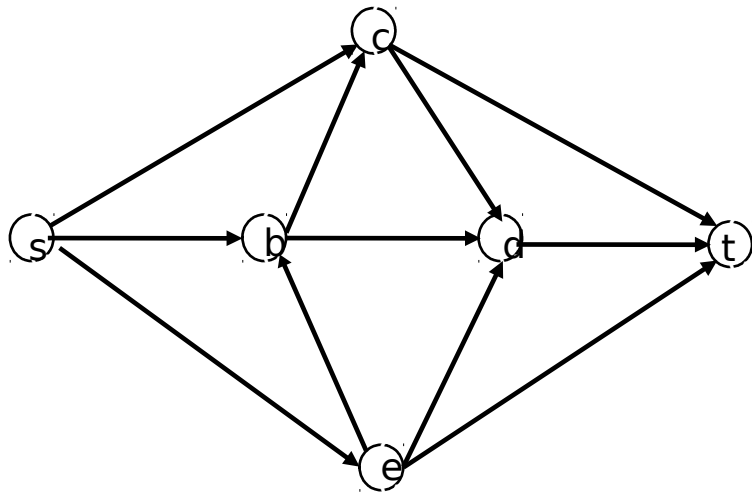
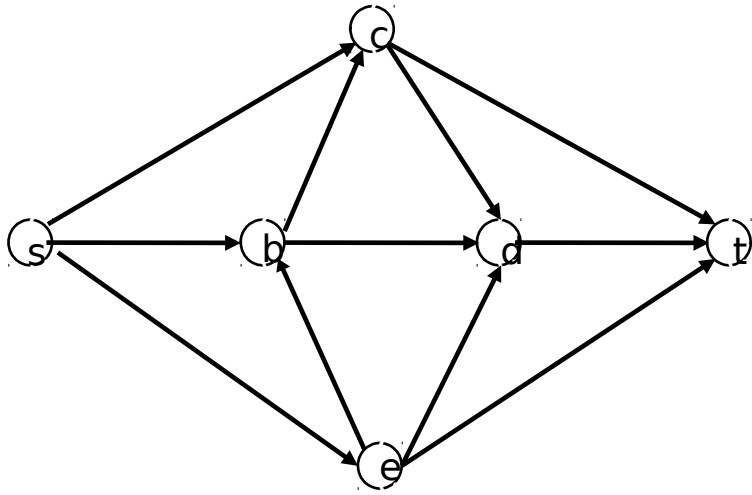
- **disegnare la rete residua all'inizio di quell'iterazione**
- **indicare il cammino aumentante da voi scelto**
- **mostrare il valore associato ad ogni arco del grafo al termine di quella iterazione**

N.B.: le risposte che non sono ottenute a partire dalla funzione di flusso data non saranno valutate.



Per vostra comodità, di seguito sono riportate diverse copie della rete di flusso, suddivise a coppie. **A partire dalla funzione di flusso data, usate l'immagine di sinistra di ciascuna coppia per disegnare la rete residua e l'immagine di destra per riportare i valori della funzione flusso assegnati a ciascun arco.** Ovviamente potrebbe essere necessario aggiungere e/o cancellare (con una x) degli archi nelle immagini di sinistra. Il numero di coppie non è indicativo del numero di iterazioni effettuate dall'algoritmo di Ford-Fulkerson. Procedete dall'alto verso il basso utilizzando solo le coppie di grafi che vi servono per illustrare l'intera esecuzione dell'algoritmo. **N.B.:** Se non saranno rispettate queste indicazioni per lo svolgimento dell'esercizio, l'esercizio non sarà valutato.





- b) Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo di Ford-Fulkerson e dell'algoritmo Augment da esso invocato.

- c) Analizzare il tempo di esecuzione nel caso pessimo dell'algoritmo di Ford-Fulkerson nel caso di una rete di flusso con capacità intere. Analizzare il tempo di esecuzione di un algoritmo significa fornire una stima asintotica quanto migliore e` possibile del tempo di esecuzione **giustificando in modo chiaro la risposta.**