

Applicazioni del Massimo flusso (II parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2017-18

Matricole congrue a 1

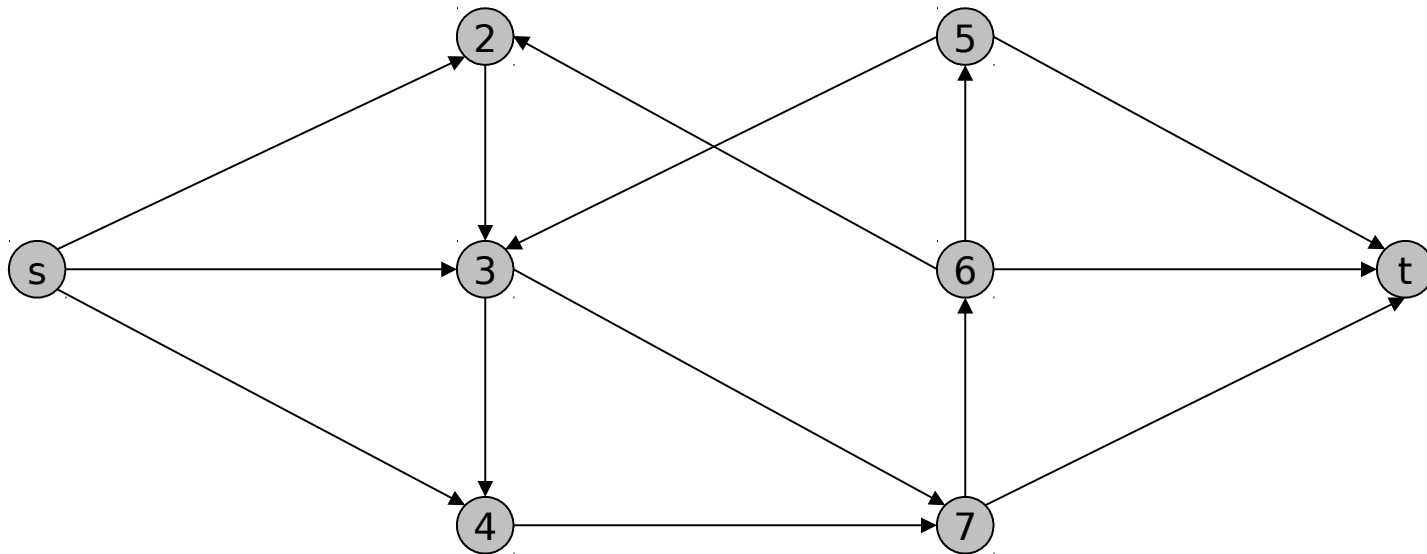
Docente: Annalisa De Bonis

Percorsi disgiunti

Percorsi senza archi in comune

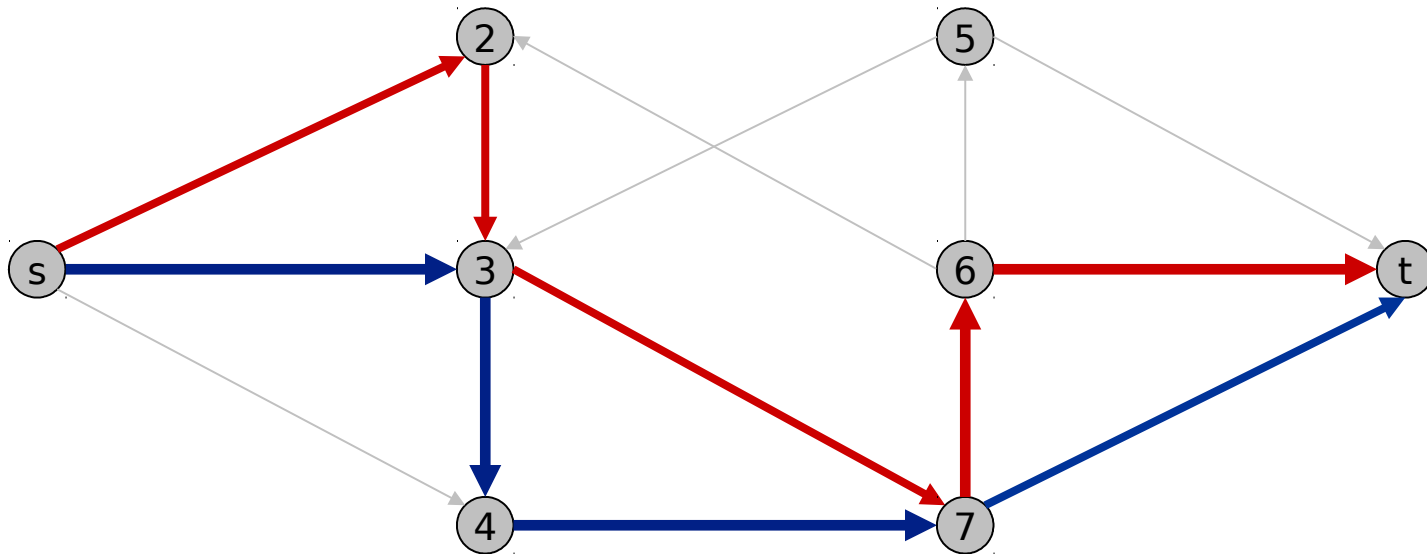
- **Def.** Due percorsi vengono detti disgiunti se non hanno archi in comune
- **Il problema dei percorsi disgiunti.** Dato un grafo direzionato e due nodi s e t , trovare il massimo numero di percorsi da s a t senza archi in comune.

Esempio: reti di comunicazione



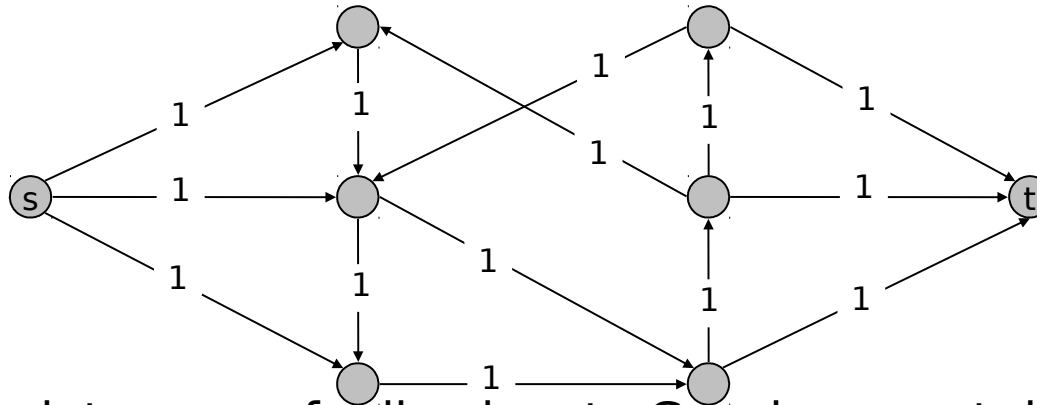
Percorsi senza archi in comune

- Esempio: questi sono percorsi disgiunti nell'esempio precedente



Percorsi senza archi in comune

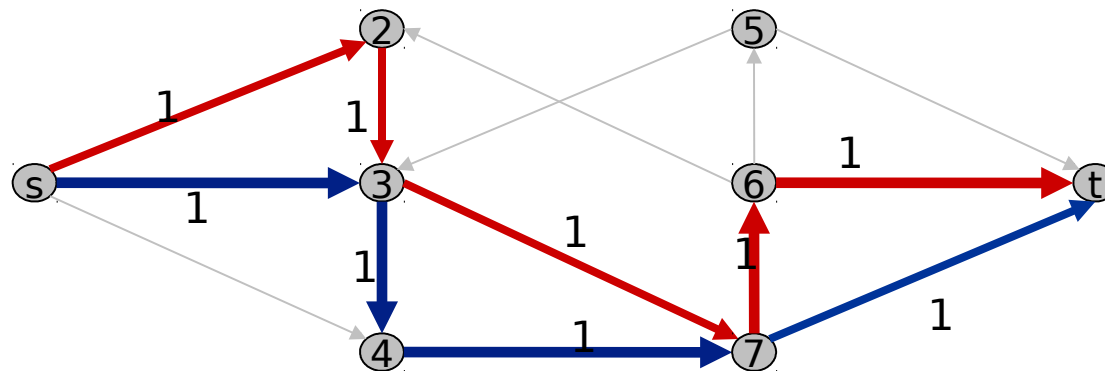
- **Formulazione in termini di max flusso:** assegnamo flusso pari ad 1 ad ogni arco.



- **Teorema.** Sia dato un grafo direzionato G e siano s e t due nodi di G . Il massimo numero di percorsi disgiunti da s a t in G e` uguale al valore del max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita` 1 agli archi di G .
- **Dim.** Dimostriamo **max numero percorsi disgiunti** \leq **max flusso**
 - Supponiamo che ci siano k percorsi disgiunti P_1, \dots, P_k .
 - Poniamo $f(e) = 1$ se e compare su qualche percorso P_i ; altrimenti poniamo $f(e) = 0$
 - Siccome P_1, \dots, P_k sono disgiunti, se m di questi percorsi passano per un certo nodo u allora ci sono esattamente m archi di P_1, \dots, P_k che entrano in u ed m archi di P_1, \dots, P_k che escono da $u \rightarrow$ conservazione del flusso soddisfatta
 - valore di $f = k$ (in quanto k **distinti** archi e uscenti da s con $f(e)=1$)

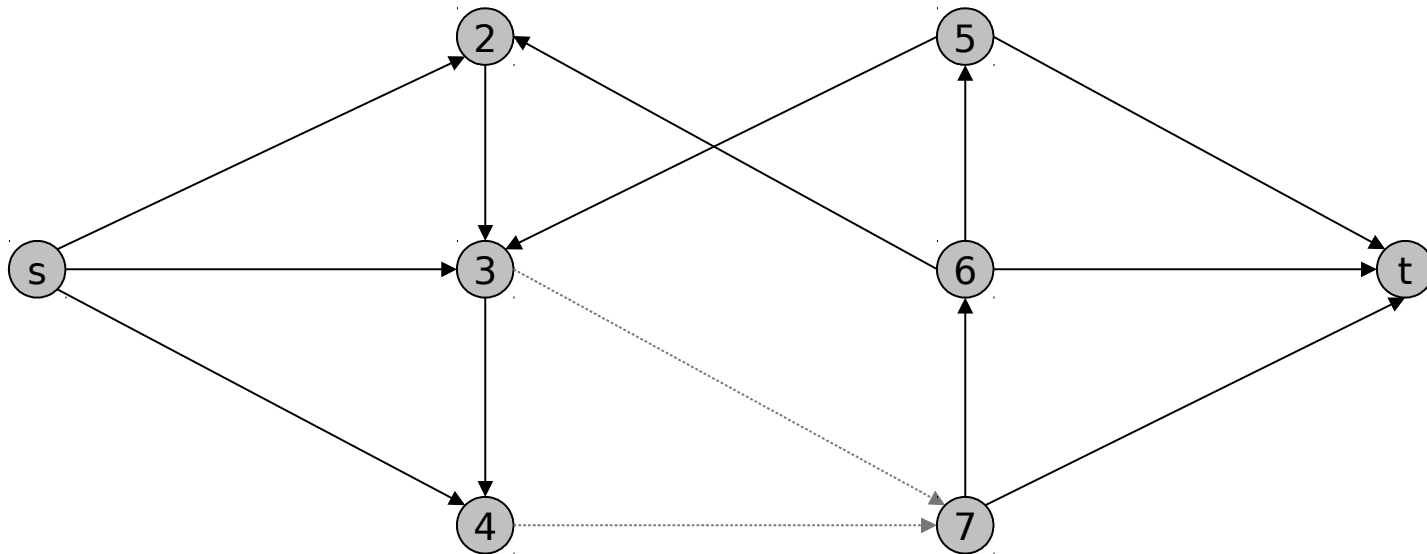
Percorsi disgiunti

- Dimostriamo $\max \text{ numero percorsi disgiunti} \geq \max \text{ flusso}$
 - Supponiamo che il max flusso abbia valore k .
 - Siccome capacita` sono interi uguali ad 1 \Rightarrow esiste una funzione flusso f che assegna valori interi (0 o 1) ad ogni arco e ha valore k .
 - Consideriamo un arco (s, u) con $f(s, u) = 1$.
 - Per la conservazione del flusso esiste un arco (u, v) per cui $f(u, v) = 1$. Per lo stesso motivo esiste un arco (v, z) per cui $f(v, z) = 1$. E cosi` via.
 - In questo modo possiamo individuare un percorso da s a t fatto di archi con flussi unitari.
 - Siccome il valore di f e` k allora da s escono k archi con flusso pari ad 1. Quindi con il procedimento descritto possiamo produrre k percorsi da s a t (non necessariamente semplici) che non hanno archi in comune (se li avessero non sarebbe soddisfatta la proprieta` sulla conservazione del flusso).



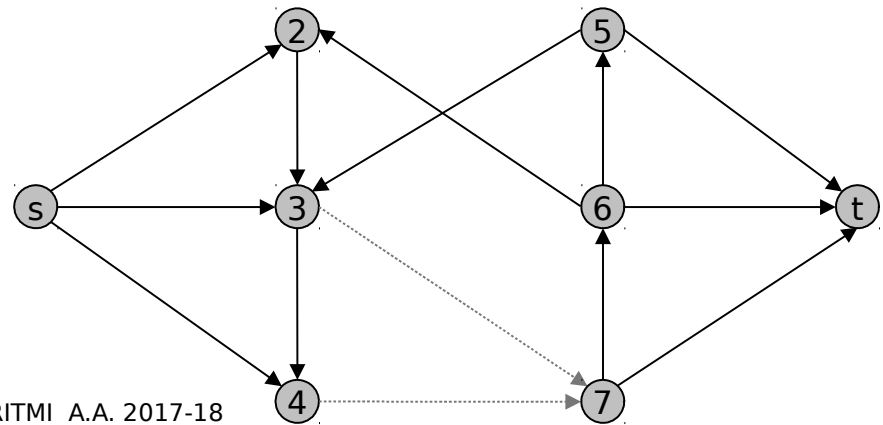
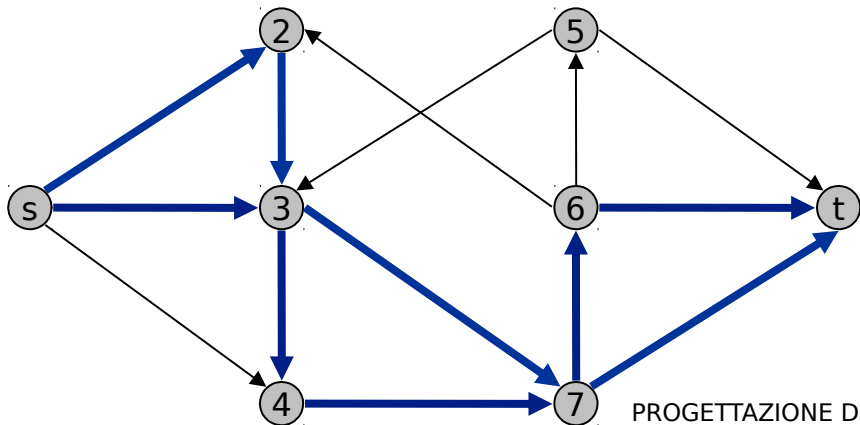
Connettività` di una rete

- **Connettività` di una rete.** Dato un grafo direzionato $G = (V, E)$ e due nodi s e t , trovare il minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s .
- **Def.** Un insieme di archi $F \subseteq E$ **disconnette t da s** se ogni percorso da s a t usa un arco di F .



Percorsi disgiunti e connettività di una rete

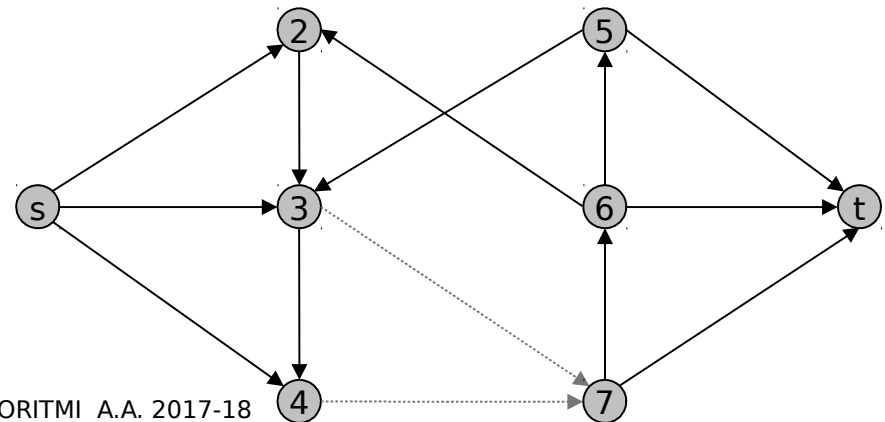
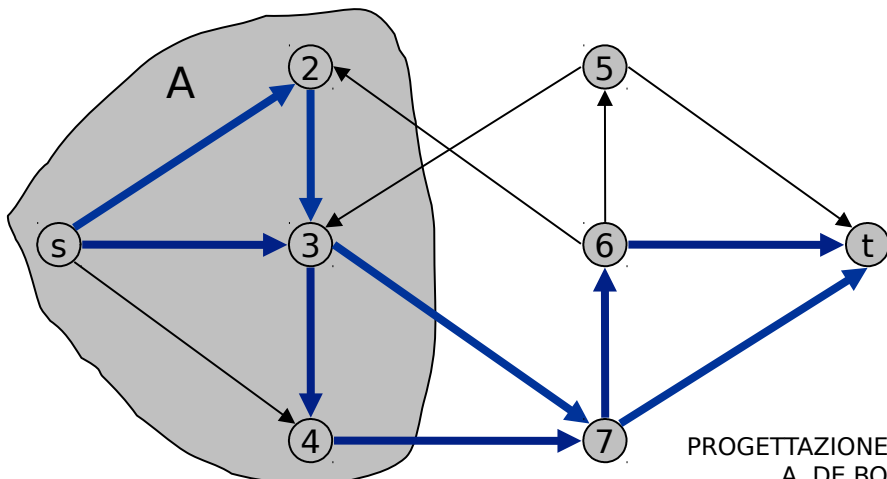
- **Teorema.** [Menger 1927] Sia G un grafo direzionato e siano s e t due nodi di G . Il max numero di percorsi disgiunti in G da s a t e` uguale al minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s .
- **Dim.**
- **Dimostriamo \leq**
 - Sia $F \subseteq E$ il piu` piccolo insieme di archi la cui rimozione disconnette t da s e che $|F| = k \rightarrow$ ciascun percorso da s a t usa almeno un arco in F .
 - Sia S il max insieme di percorsi disgiunti da s a t . Ciascun arco di F e` usato da al piu` un percorso in $S \rightarrow |S| \leq k$



Percorsi disgiunti e connettività di una rete

Dimostriamo \geq

- Supponiamo che il max numero di percorsi disgiunti sia k .
- Abbiamo dimostrato che max numero percorsi disgiunti = valore max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita` 1 agli archi di G . Quindi il valore del max flusso in questa rete e` k .
- Teorema Massimo Flusso & Minimo Taglio \Rightarrow esiste taglio (A, B) con $\text{cap}(A, B) = k$.
- **Sia F l'insieme degli archi che vanno da A verso B .**
- Ogni arco ha capacita` 1 e la somma delle capacita` degli archi diretti da A verso B e` $k \rightarrow |F| = k$
- Ovviamente se rimuoviamo gli archi di F disconnettiamo t da s per cui F e` un insieme che disconnette t da s e ha cardinalita` k .



Eliminazione dal campionato di Baseball

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}			
				Atl	Phi	NY	Mon
Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
Philly	80	79	3	1	-	0	2
New York	78	78	6	6	0	-	0
Montreal	77	82	3	1	2	0	-

Quali squadre hanno la possibilità di finire la stagione con più vittorie?

- Montreal è eliminata dal momento che può finire con al più 80 vittorie e Atlanta ne ha già 83.
- $w_i + r_i < w_j \Rightarrow$ squadra i eliminata
- Questa condizione è sufficiente ma non necessaria. In altre parole, in un certo momento una squadra potrebbe avere ancora la possibilità di vincere il torneo ma poi da quel momento in poi le cose potrebbero andare male e essere eliminata.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = $r_{i,j}$			
				Atl	Phi	NY	Mon
Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
Philly	80	79	3	1	-	0	2
New York	78	78	6	6	0	-	0
Montreal	77	82	3	1	2	0	-

- Philly puo` vincerne fino ad 83 ma essere ancora eliminata (Atlanta deve giocare 7 partite contro squadre diverse da Philly e quindi potrebbe finire il campionato con 90 punti anche se perdesse contro Philly)
- Se Atlanta perde una partita allora qualche altra squadra deve vincerla al suo posto
 - Ad esempio Philly potrebbe vincere il campionato solo se Atlanta perdesse tutte le partite ma in questo caso New York vincerebbe le 6 partite contro Atlanta arrivando ad un totale 84 vittorie!
- **N.B.** Il futuro di una squadra nel campionato dipende non solo da quante partite devono essere giocate dalla squadra ma anche da quali sono le squadre contro le quali deve giocare.

Eliminazione dal campionato di Baseball

- Insieme S di squadre
- Squadra particolare $z \in S$.
- La squadra x ha vinto w_x partite.
- Le squadre x e y giocano una contro l'altra altre $r_{x,y}$ volte.
- E` possibile che la squadra z finisca con il maggior numero di vittorie (anche ex aequo con altre)?

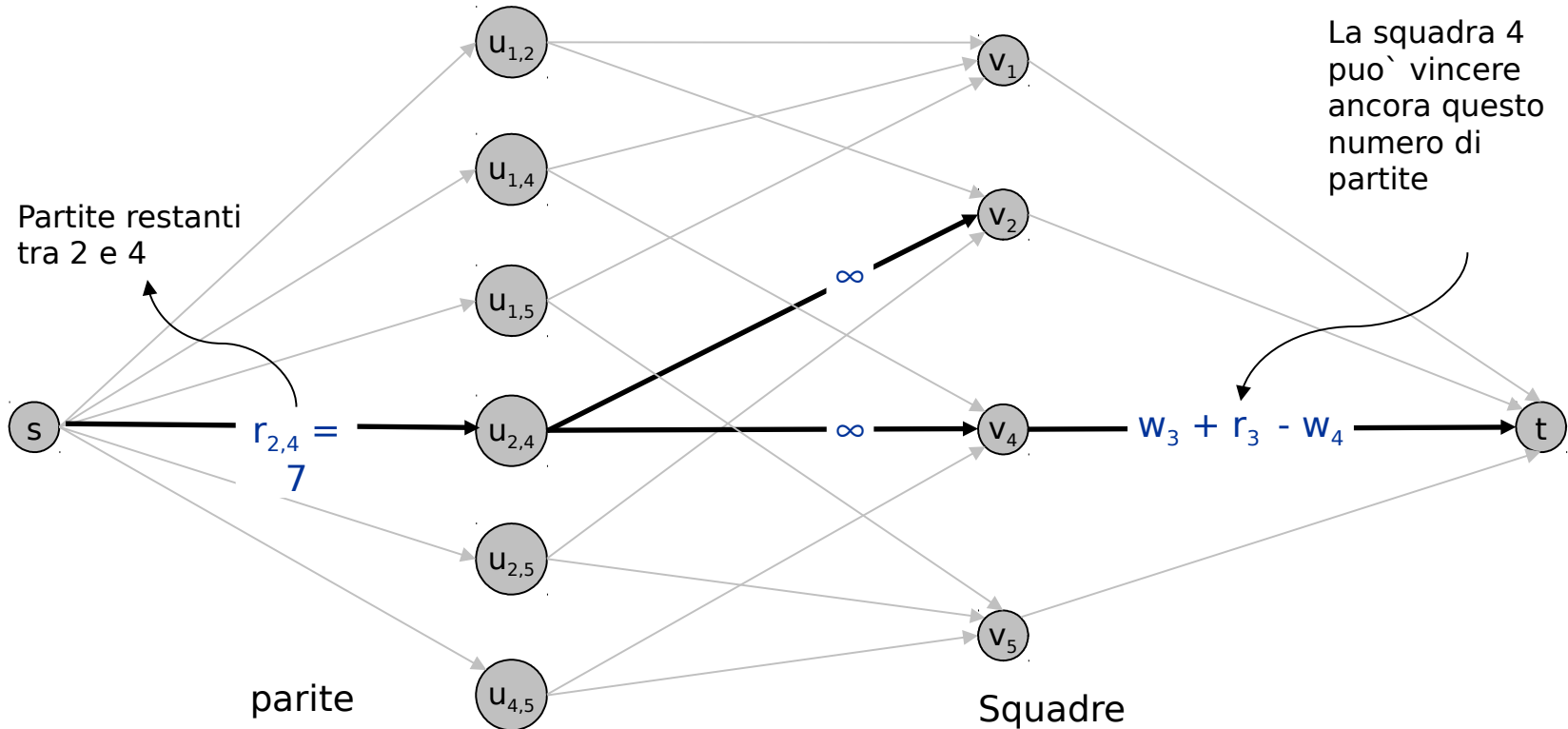
Eliminazione dal campionato di Baseball:

Formulazione basata sul max flusso

- z puo` totalizzare il maggior numero di vittorie? Sia m il max numero di vittorie conseguibili da z.
- Costruiamo una rete di flusso nel modo seguente.
- **Nodi:**
 - Sorgente s da cui si emanano le vittorie
 - Pozzo t che assorbe le vittorie
 - Per ogni squadra x diversa da z , inseriamo nodo v_x
 - Per ogni coppia di squadre x, y diverse da z , inseriamo il nodo $u_{x,y}$ se x e y devono giocare almeno un'altra partita l'una contro l'altra
- **Archi:**
 - Per ogni nodo $u_{x,y}$, inseriamo
 - Arco $(s, u_{x,y})$ con cap. $r_{x,y}$: rappresenta vittorie emanate da s in relazione alle restanti partite tra x e y
 - archi $(u_{x,y}, v_x)$ e $(u_{x,y}, v_y)$ con cap. ∞ : rappresentato rispettivamente le vittorie di x contro y e di y contro x
 - Per ogni nodo v_x inseriamo
 - arco (v_x, t) con cap. $m-w_x$: rappresenta le vittorie di x assorbite da t (max numero vittorie associabili ad x affinche' z totalizzi maggior numero vittorie)

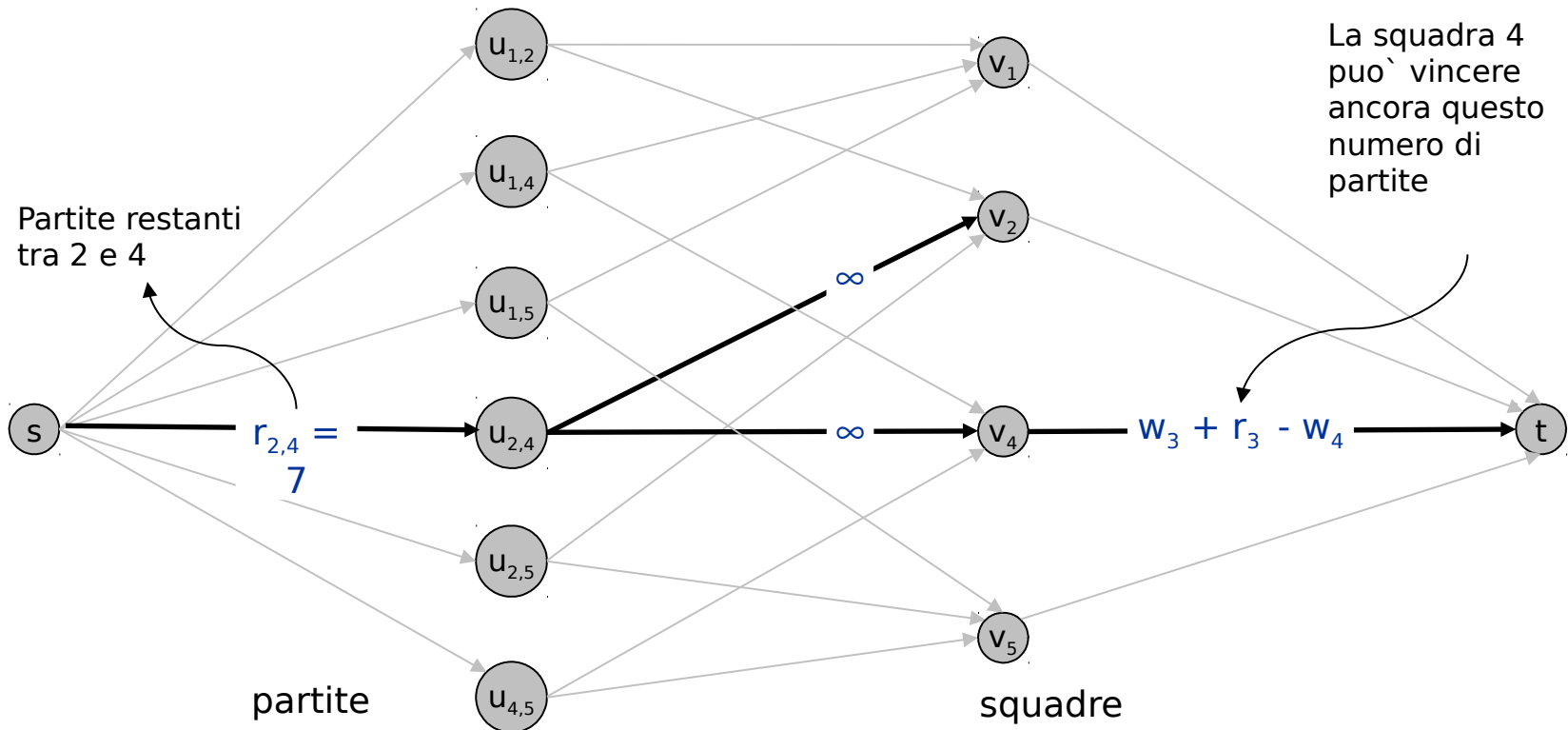
Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Può il team 3 terminare con il maggior numero di vittorie?
 - Assumiamo che il team 3 vinca tutte le restanti partite $\Rightarrow w_3 + r_3$ vittorie.
 - Le altre partite devono finire in modo che ogni altra squadra totalizzi $\leq w_3 + r_3$ vittorie.



Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Capacità intera \Rightarrow esiste funzione di flusso max che associa valori interi ad ogni arco per cui una partita giocata tra x e y si traduce in una vittoria per x o per y (un'unità di flusso lungo $(s, u_{x,y})$ si traduce in un'unità di flusso lungo $(u_{x,y}, v_x)$ o lungo $(u_{x,y}, v_y)$)



Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

Teorema. La squadra z non è eliminata se e solo se la funzione di flusso massimo satura tutti gli archi uscenti da s , cioè valore flusso max = somma capacità archi uscenti da s .

- **Dim.** m = numero totale di vittorie conseguibili da z al termine del campionato
- **Dim.** \leftarrow : Sia f la funzione di flusso con valore max.
- 1. Il numero totale di partite che restano da giocare tra squadre diverse da z è uguale alla somma delle capacità degli archi uscenti da s . Di conseguenza, **se f satura tutti gli archi uscenti da s si ha che il valore del flusso è uguale al numero totale di partite da giocare tra squadre diverse da z .**
- 2. Per la conservazione del flusso, il flusso $f(v_x, t)$ è uguale al flusso entrante in v_x e cioè uguale al numero di partite vinte da x tra quelle che restano da giocare contro le altre squadre diverse da z . Per il vincolo sulla capacità $f(v_x, t)$ non può eccedere $c(v_x, t) = m - w_x$. Ciò vuol dire che per ogni x diverso da z , il numero totale di vittorie di x è al più $w_x + m - w_x = m \rightarrow z$ non viene eliminato.
- Mettendo insieme i due punti precedenti concludiamo che è possibile giocare tutte le partite del campionato (per il punto 1) in modo che alla fine z non venga eliminata (per il punto 2)

Eliminazione dal campionato di Baseball:

Formulazione basata sul max flusso

- Dim. \rightarrow : Supponiamo che sia possibile che z non venga eliminata.
- Se e` possibile che z non venga eliminata allora vuol dire che le partite restanti tra squadre diverse da z possono concludersi in modo che ciascuna squadra x diversa da z vinca in queste partite al piu` $m-w_x$ partite.
- Per ogni x diverso da z indichiamo con n_x ($n_x \leq m-w_x$) il numero di partite vinte da x tra quelle che restano da giocare tra x e le altre squadre diverse da z
- Per ogni coppia di squadre x,y diverse da z , denotiamo con $n_{x,y}$ il numero di restanti partite vinte da x contro y e con $n_{y,x}$ il numero di restanti partite vinte da y contro x ($n_{y,x} + n_{x,y} = r_{x,y}$).
- Consideriamo la rete di flusso costruita prima e costruiamo una funzione flusso f per questa rete nel seguente modo:
- Per x diverso da z , poniamo $f(v_x, t) = n_x$
- Per ogni due nodi x e y diversi da z , poniamo, $f(u_{x,y}, v_x) = n_{x,y}$, $f(u_{x,y}, v_y) = n_{y,x}$ e $f(s, u_{x,y}) = r_{x,y}$
- Osserviamo che f soddisfa il vincolo sulla capacita` in quanto $c(s, u_{x,y}) = r_{x,y}$, $c(u_{x,y}, v_x) = c(u_{x,y}, v_y) = \infty$ e $c(v_x, t) = m-w_x$ e soddisfa il vincolo sulla conservazione del flusso in quanto $r_{x,y} = n_{x,y} + n_{y,x}$, $n_x =$ somma per ogni y diverso da x e z di $n_{x,y}$
- Osserviamo che f satura tutti gli archi uscenti da s (ed e` max).

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}				
				NY	Bal	Bos	Tor	Det
NY	75	59	28	-	10	8	7	3
Baltimore	71	63	28	10	-	2	12	4
Boston	69	66	27	8	2	-	8	9
Toronto	63	61	38	7	12	8	-	11
Detroit	49	86	27	3	4	9	11	-

- Quali squadre hanno una possibilità di finire la stagione con il massimo numero di vittorie?
- Cerchiamo di capire se Detroit potrebbe essere una di queste squadre.
- Osserviamo innanzi tutto che Detroit potrebbe terminare la stagione con al più $49 + 27 = 76$ vittorie.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}				
				NY	Bal	Bos	Tor	Det
NY	75	59	28	-	10	8	7	3
Baltimore	71	63	28	10	-	2	12	4
Boston	69	66	27	8	2	-	8	9
Toronto	63	61	38	7	12	8	-	11
Detroit	49	86	27	3	4	9	11	-

- Quali squadre hanno una possibilità di finire la stagione con il massimo numero di vittorie?
- Cerchiamo di capire se Detroit potrebbe essere una di queste squadre.
- Osserviamo innanzi tutto che Detroit potrebbe terminare la stagione con al più $49 + 27 = 76$ vittorie.
- **Certificato di eliminazione: sottoinsieme $R = \{NY, Bal, Bos, Tor\}$**
 - Le squadre in R hanno in totale già vinto $w(R) = 75 + 71 + 69 + 63 = 278$ partite.
 - A queste vittorie se ne aggiungeranno $r(R) = 47$ (numero partite tra 2 squadre di R)
 - Il numero medio di vittorie per squadra è $325/4 > 76 \rightarrow$ esiste squadra in R che totalizzerà più di 76 vittorie.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Certificato di Eliminazione

- Per ogni sottoinsieme T di S calcoliamo:

$$T \subseteq S, \quad w(T) := \overbrace{\sum_{i \in T} w_i}^{\# \text{ wins}}, \quad r(T) := \overbrace{\sum_{\{x,y\} \subseteq T} r_{xy}}^{\# \text{ remaining games}},$$

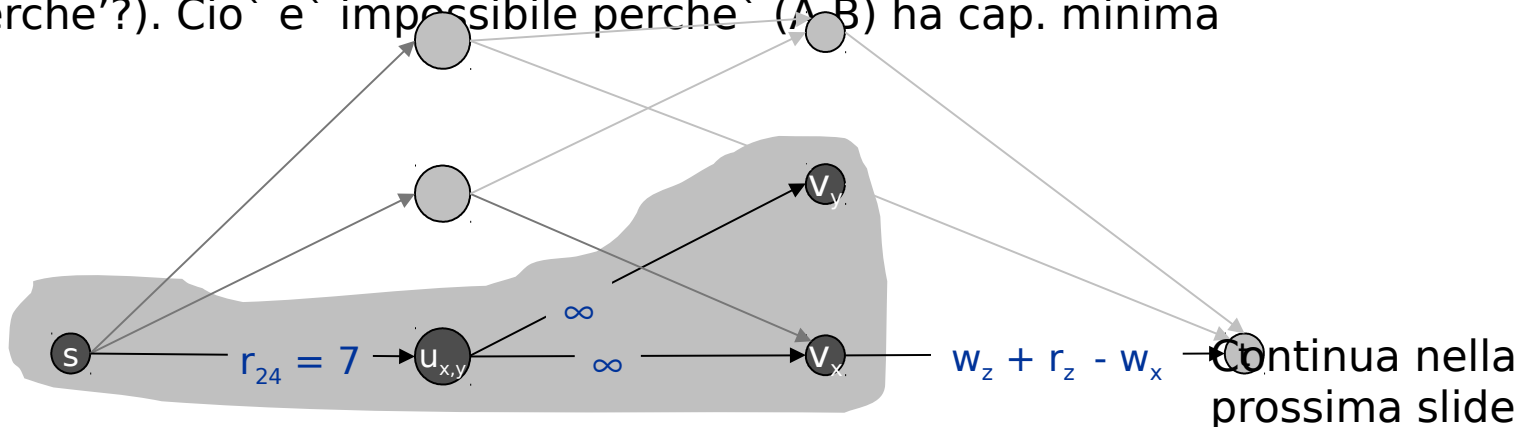
- Se per un certo sottoinsieme T di S si ha che

$$\overbrace{\frac{w(T) + r(T)}{|T|}}^{\text{LB on avg \# games won}} > w_z + r_z$$

allora z e' **eliminato**. Diremo che T elimina z in quanto l'esistenza di T prova che z e' eliminato.

Eliminazione dal campionato di Baseball

- **Teorema.** [Hoffman-Rivlin 1967] Una squadra z e' eliminata se e solo se c'e' un sottoinsieme T^* che elimina z .
- **Dim.** (solo dell'implicazione \rightarrow)
- **Dimostriamo che se z e' eliminata allora e' possibile trovare un sottoinsieme T^* che elimina z .**
- Costruiamo la rete di flusso nel modo visto. Sia f^* il max flusso in questa rete.
 - Consideriamo il taglio (A, B) del teorema max flusso min taglio.
 - Poniamo $T^* =$ insieme di vertici v_x contenuti in A .
 - **Osservazione:** $u_{x,y} \in A$ se e solo se $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$.
- **Dim \rightarrow :** se $u_{x,y} \in A$ allora la capacita` infinita degli archi $(u_{x,y}, v_x)$ e $(u_{x,y}, v_y)$ assicura che $v_x \in A$ and $v_y \in A$ e di conseguenza $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$.
- **Dim \leftarrow :** se $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$ ma $u_{x,y} \in B$, allora potremmo decrementare la capacita` di (A,B) di $r_{x,y}$ aggiungendo $u_{x,y}$ ad A ((A,B) sarebbe ancora un taglio s-t. Perche'?). Cio` e' impossibile perche` (A, B) ha cap. minima



Eliminazione dal campionato di Baseball

- Notiamo che

Arco $(s, u_{x,y})$ va da A a B se e solo se uno tra v_x e v_y si trova in $B = (V - T^*)$

Arco (v_x, t) va da A a B se e solo se v_x è in $A = T^*$

$$\begin{aligned} \text{cap}(A, B) &= \sum_{(x,y): v_x \text{ OR } v_y \notin T^*} r_{x,y} + \sum_{x: v_x \in T^*} m - w_x \\ &= r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + m|T^*| - w(T^*) \\ &= r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*) \end{aligned}$$

- z eliminata \rightarrow funzione di flusso max f^* non satura tutti gli archi uscenti da s.
- Siccome f^* non satura tutti gli archi della forma $(s, u_{x,y})$ allora si ha che

$$\text{cap}(A, B) = v(f^*) < \sum_{x,y \in S \setminus \{z\}} r_{x,y} = r(S \setminus \{z\})$$

$$r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*) < r(S \setminus \{z\})$$

- Si ha quindi $-r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*) < 0$

Eliminazione dal campionato di Baseball

- Abbiamo visto che $-r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*) < 0$
 - Ne deriva che $-(r(T^*) + w(T^*)) / |T^*| > w_z + r_z$