Applicazioni del Massimo flusso (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2017-18

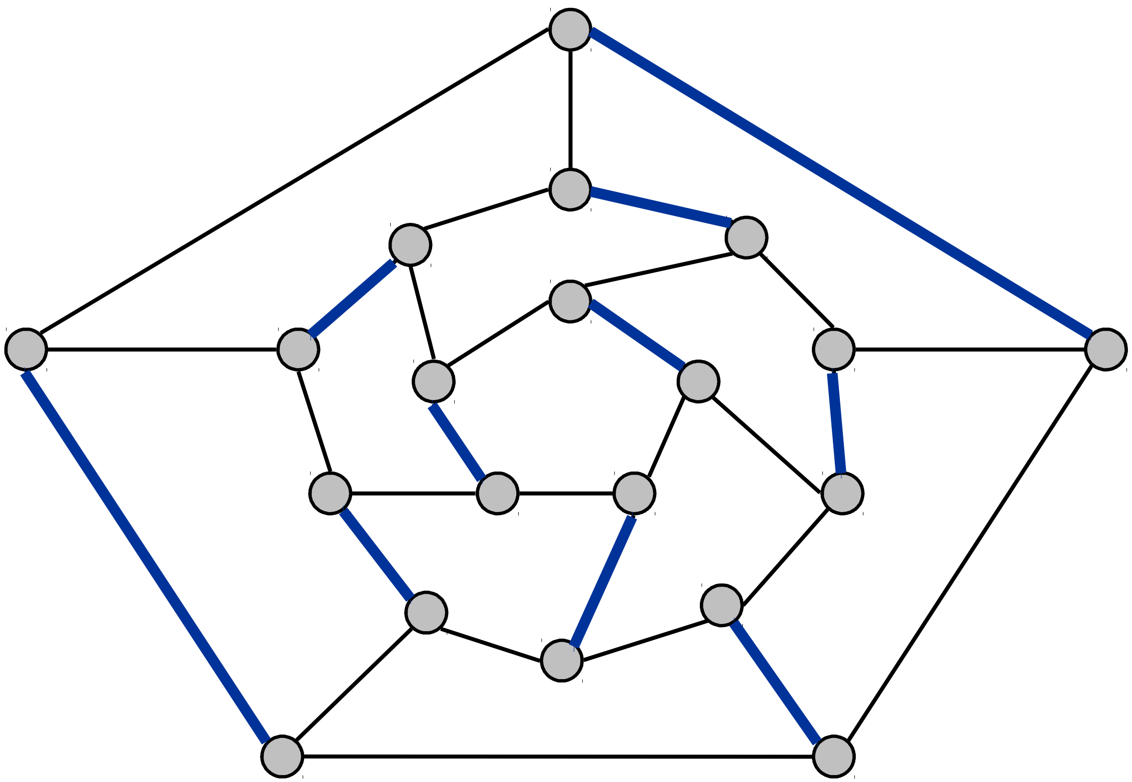
Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

Matching bipartito

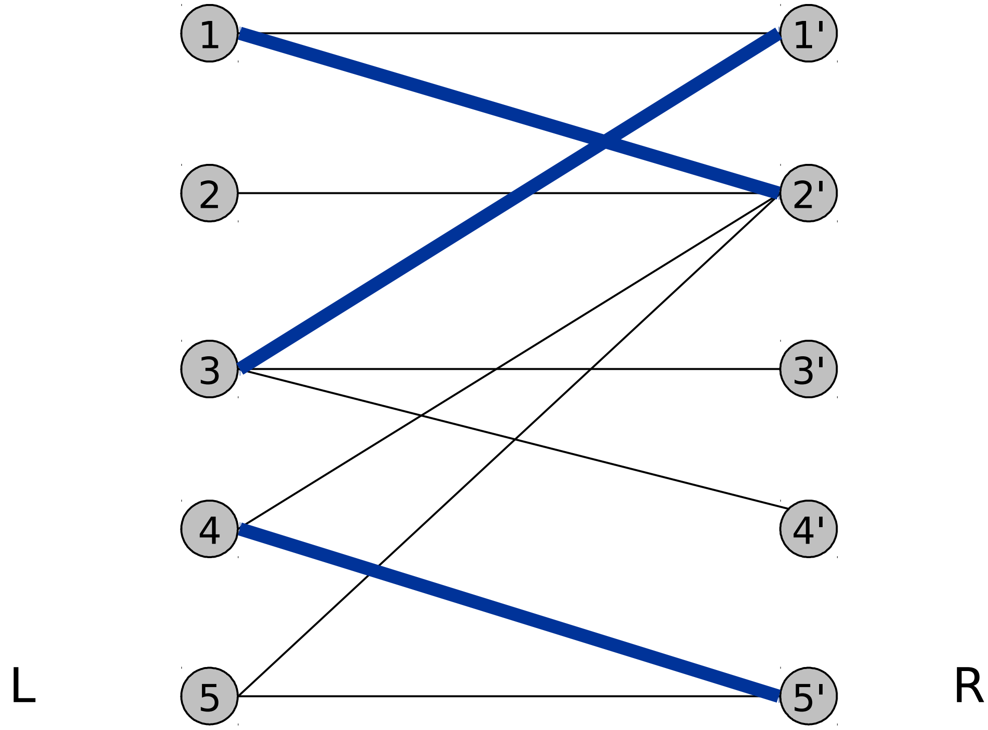
Matching

- Problema del max matching.
  - Input: grafo non direzionato $G = (V, E)$.
  - $M \subseteq E$ e` un matching se ogni nodo appare in al piu` un un arco di M.
  - Max matching: trova un matching di cardinalita` massima.



Matching bipartito

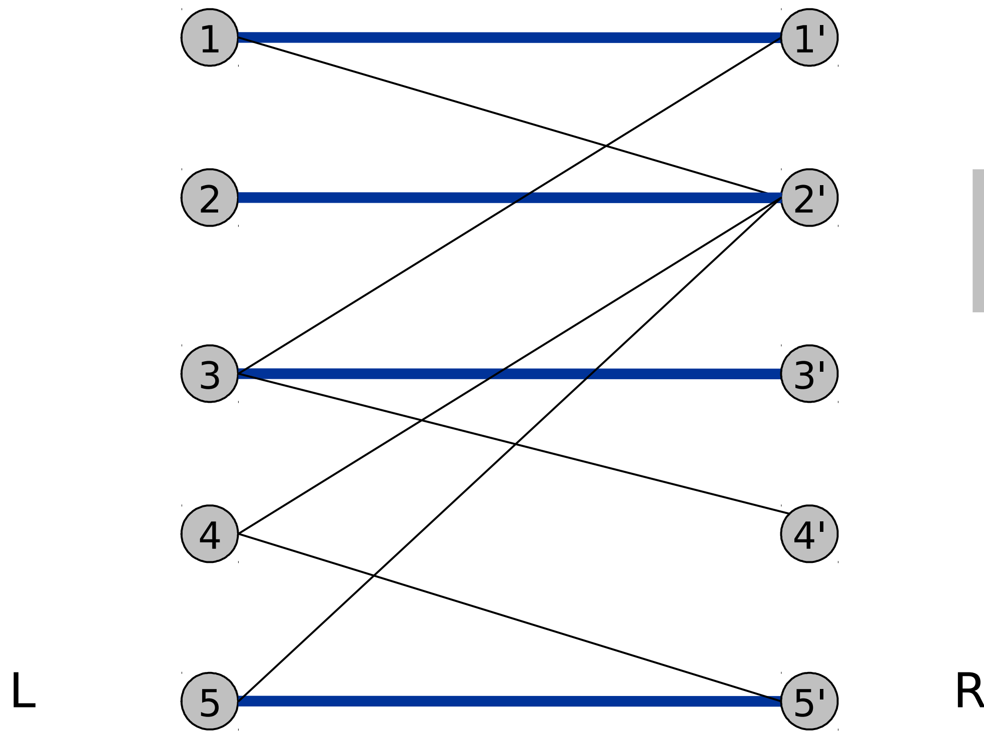
- Problema del max matching bipartito.
  - Input: grafo non direzionato bipartito $G = (L \cup R, E)$.
  - $M \subseteq E$ e` un matching se ogni nodo appare in al piu` un arco di M.
  - Max matching bipartito: trova un matching di massima cardinalita`.



<u>matching</u>

1-2', 3-1', 4-5'

Matching bipartito



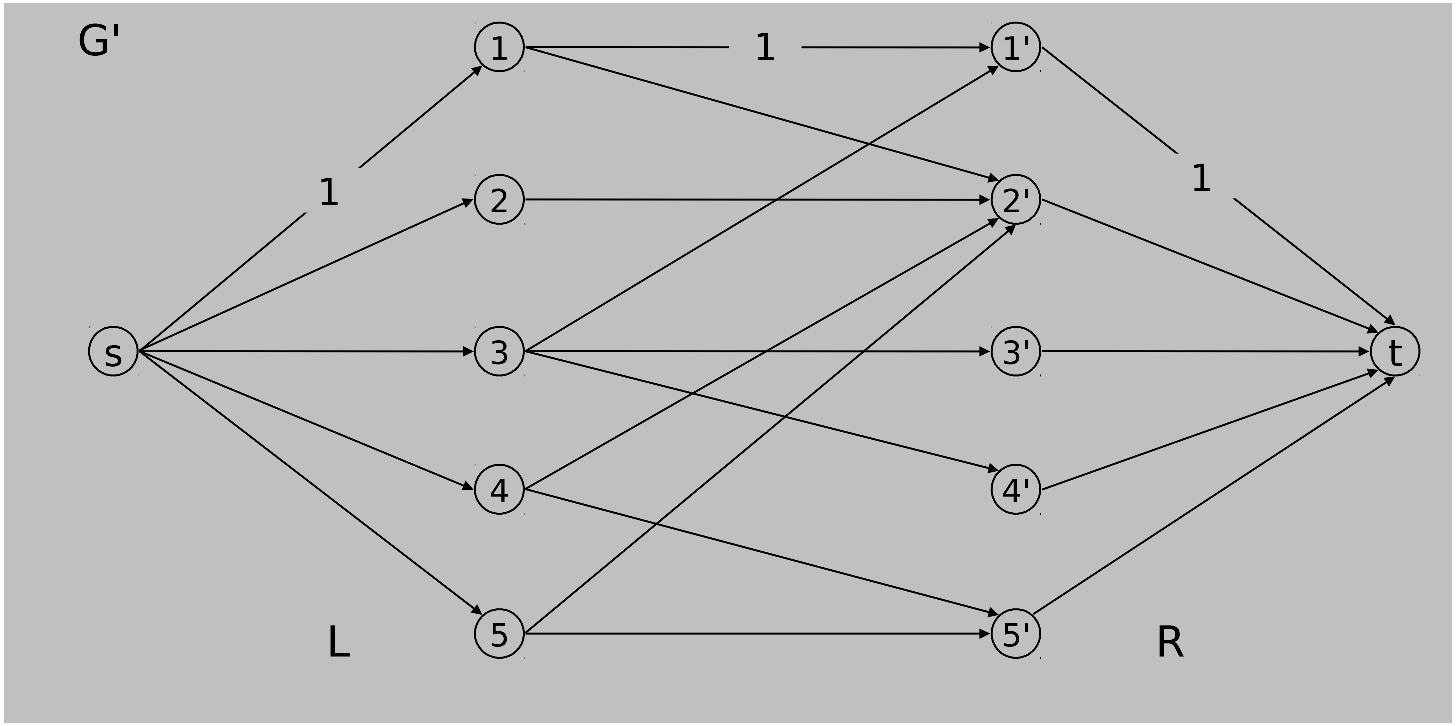
<u>max matching</u>

1-1', 2-2', 3-3’ 5-5'

Matching Bipartito

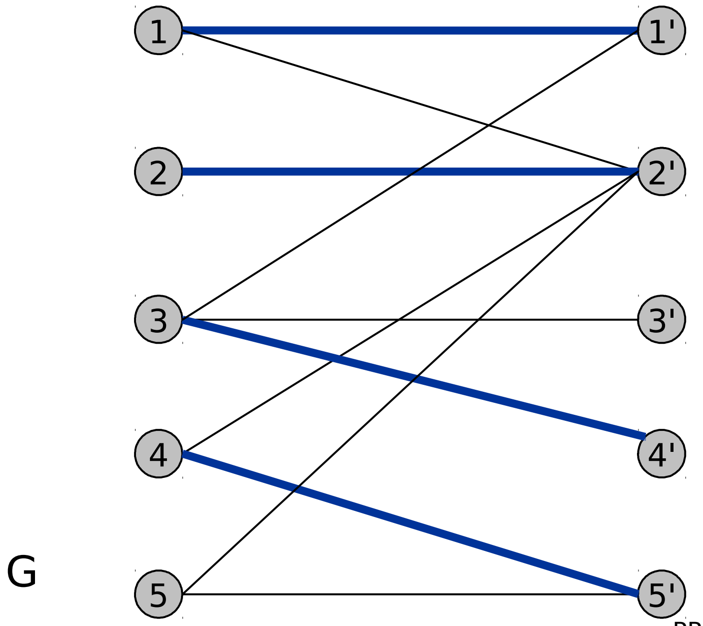
Formulazione in termini del max flusso.

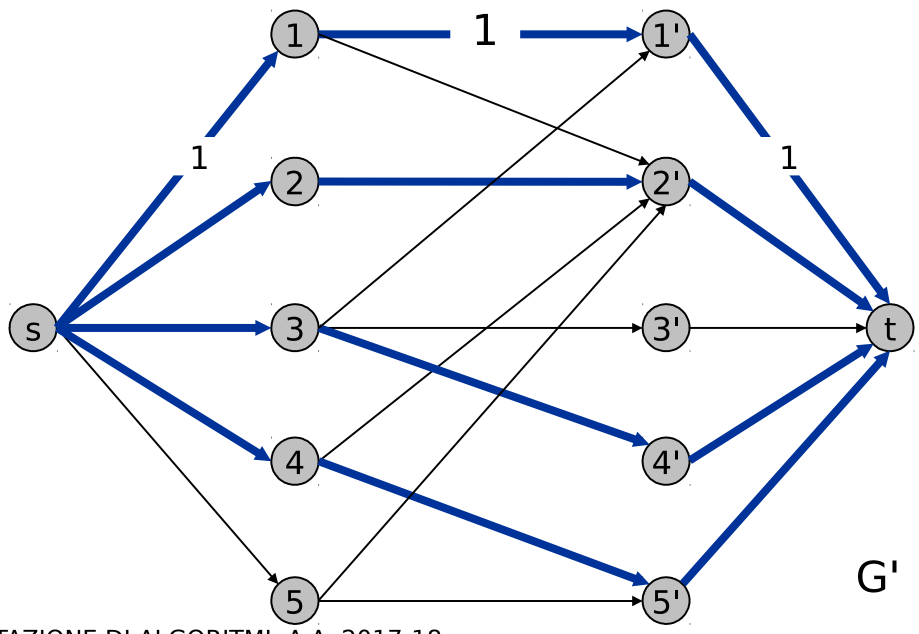
- Crea un grafo direzionato G' = (L ∪ R ∪ {s, t}, E').
- Orienta gli archi tra L ad R da L verso R, e assegna capacita` pari ad uno a questi archi.
- Aggiungi un arco con capacita` uno da s a ciascun nodo di L.
- Aggiungi un arco con capacita` uno da ciascun nodo da R a t.



Matching Bipartito

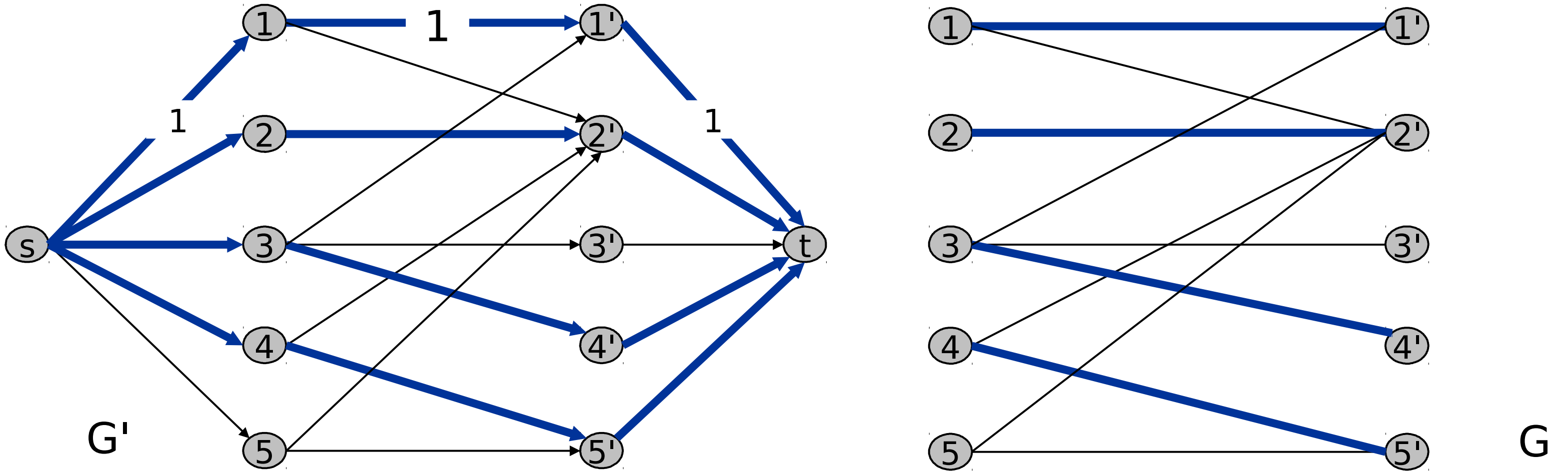
- Teorema. La cardinalita` del max matching in G = Valore del max flusso in G'.
- Dim. Dimostriamo prima che dimensione max matching ≤ valore max flusso
  - Sia M un max matching e sia k la sua cardinalita.
  - Consideriamo la funzione flusso f che invia 1 unita` lungo ciascuno dei k percorsi che passano per i k archi di G' corrispondenti agli archi di G in M.
    - Per ogni arco (i,j') in M, f assegna 1 agli archi (s,i), (i,j'), (j',t) di G'
  - f soddisfa le proprieta` del flusso e ha valore k
  - Abbiamo quindi che dimensione max matching = valore di f ≤ valore max flusso





Matching bipartito

- Dimostriamo che dimensione max matching ≥ valore max flusso
  - Sia f un massimo flusso di G' e sia k il suo valore.
  - Capacita` degli archi =1 ⇒ k e` intero ed esiste f di valore k tale che f(e) intero (0 o 1) per ogni e.
  - Consideriamo l'insieme di archi M = {e=(u,v): u in L, v in R, f(e)=1} e dimostriamo (nella prossima slide) che M e` un matching di dimensione k. Si ha quindi che max flusso = dimensione matching M ≦ dimensione max matching

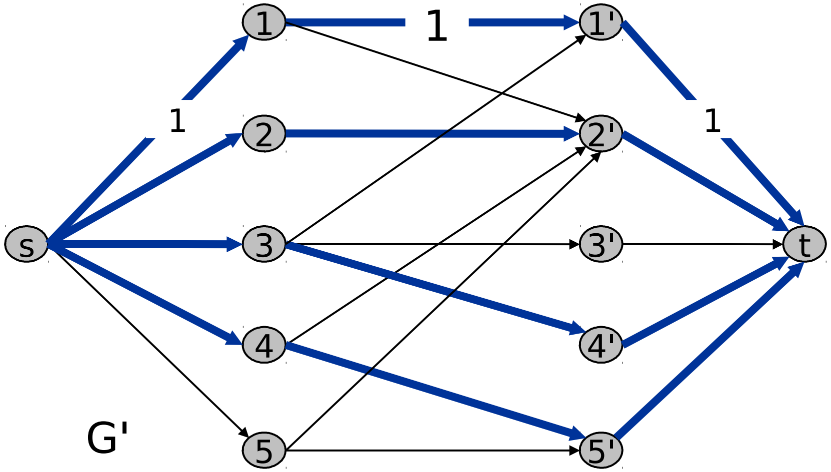


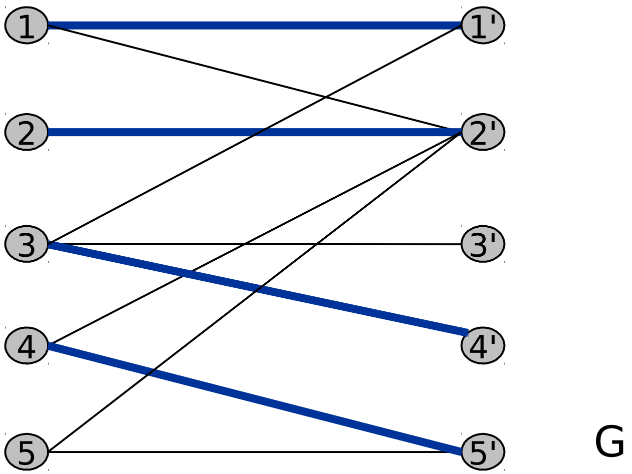
Continua nella prossima slide

Matching bipartito

1. Dim. che M e` un matching: Dimostriamo che ciascun nodo u di L ∪ R e` contenuto in al piu` un arco.
   - Se u e` in L allora in u arriva flusso 0 o 1 da s. Per la conservazione del flusso da u esce questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con origine u attraverso il quale fluisce 1 unita`di flusso.
   - Se u e` in R allora da u fuoriesce flusso 0 o 1 verso t. Per la conservazione del flusso in u entra questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con destinazione u attraverso il quale fluisce 1 unita` di flusso.
   - Quindi in entrambi i casi in M c'e` al piu` un arco che ha una delle due estremita` uguali ad u.

2. Dim. che |M|=k : Consideriamo il taglio (L ∪ s, R ∪ t). Il flusso netto attraverso questo taglio e` proprio |M|. Lemma del valore del taglio→ |M|= v(f)=k





Matching bipartito

- Possiamo trovare il max matching di un grafo bipartito G eseguendo Ford-Fulkerson sul grafo G’ ottenuto a partire da G. Il max matching e\` ottenuto come illustrato nella seconda parte della dimostrazione del teorema precedente.

- Tempo di esecuzione: O(nm) in quanto la capacita\` di ogni arco di G’ e\` al piu\` C=1 e di conseguenza O(nmC)=O(nm)

Matching perfetti

- Def. Un matching $M \subseteq E$ e` perfetto se ciascun nodo appare esattamente in un arco di M.

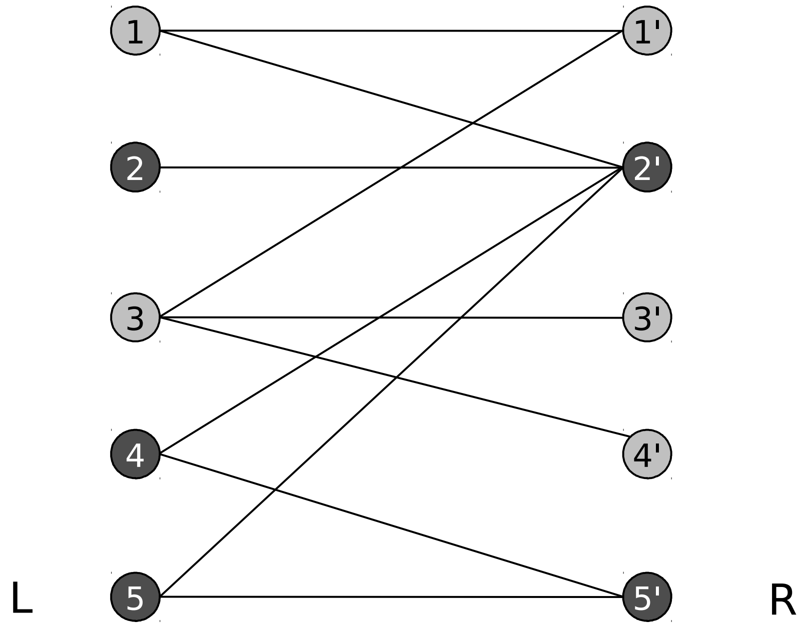
- Domanda. Quando un grafo bipartito ha un matching perfetto?

- Struttura dei grafi bipartiti con matching perfetti.
  - Ovviamente deve essere $|L| = |R|$.
  - Quali altre condizioni sono necessarie?
  - Quali condizioni sono sufficienti?

Matching Perfetto

- Notazione. Sia S un sottoinsieme di nodi di L. Indichiamo con N(S) l'insieme dei nodi di R adiacenti ai nodi di S.

- Osservazione. Se un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ ha un matching perfetto allora $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.
- Dim. Ciascun nodo in S deve essere accoppiato ad un nodo differente in N(S).



<u>Nessun matching perfetto:</u>

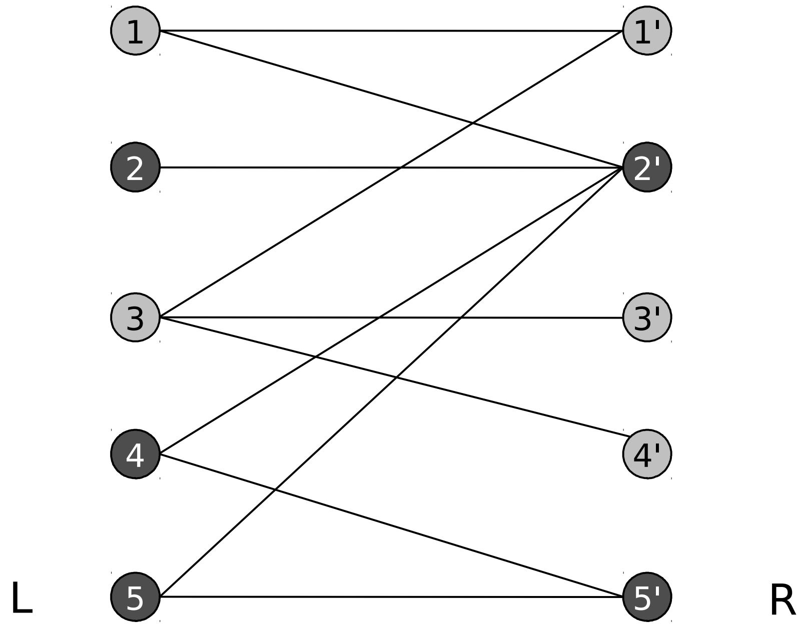
S = { 2, 4, 5 }

N(S) = { 2', 5' }.

Teorema dei matrimoni

- Il teorema dei matrimoni. [Frobenius 1917, Hall 1935]
  Sia $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito con $|L| = |R|$. G ha un matching perfetto se e solo se $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.

- Dim. L'implicazione $\Rightarrow$ l'abbiamo gia` dimostrata nella slide precedente.



Nessun matching perfetto:

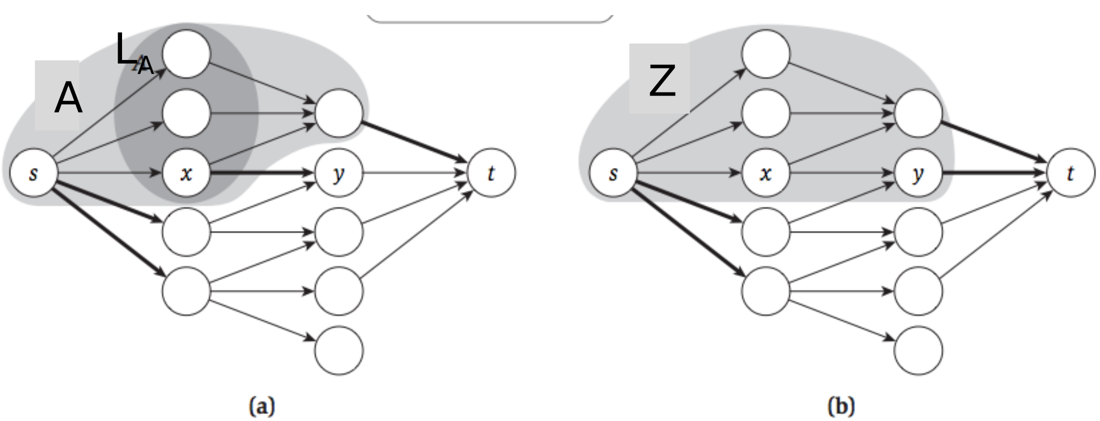
S = { 2, 4, 5 }

N(S) = { 2', 5' }.

Teorema dei matrimoni

- Dimostriamo l'implicazione $\Leftarrow$
- Dimostreremo che se G **non** ha un matching perfetto allora esiste un sottoinsieme L_Z di L per cui $N(L_Z) < L_Z$
- Supponiamo che G non abbia un matching perfetto. Questo vuol dire che il max matching ha dimensione < |L|
- Costruiamo la rete di flusso G' nello stesso modo di prima e sia (A, B) un minimo taglio di G'. Teorema del Max Flusso-Min Taglio → cap(A,B) <|L|

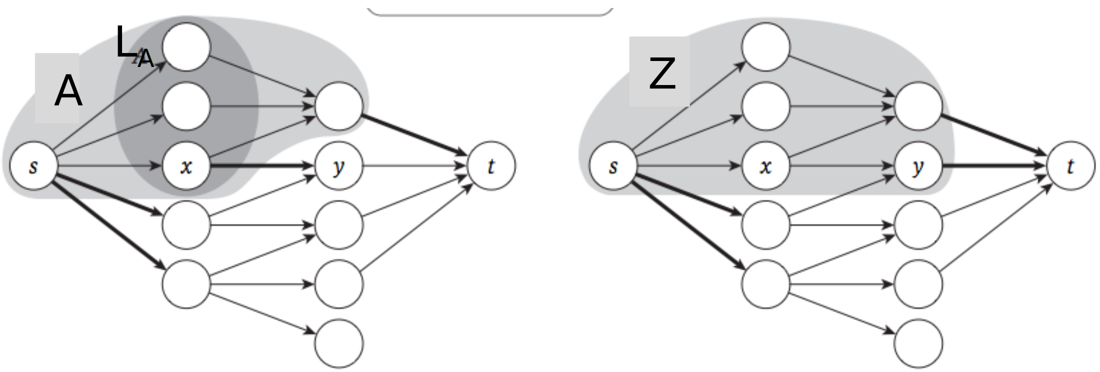
- Per ogni insieme di vertici F di G definiamo $L_f = L \cap F$ e $R_F = R \cap F$.
- Possiamo trasformare (A,B) in un altro taglio minimo (Z,W) in cui $N(L_Z) \subseteq Z$ (ogni nodo di Z che si trova in L e\` adiacente solo a nodi che sono in Z).



continua

Teorema dei matrimoni

- Possiamo trasformare (A,B) in un altro taglio minimo (Z,W) in cui $N(L_Z) \subseteq Z$ (ogni nodo di Z che si trova in L e\` adiacente solo a nodi che sono in Z).
  - Per far questo aggiungiamo ad A ciascun nodo di $N(L_A)$ che si trova in B. Sia y un tale nodo.
    - Siccome y e\` in $N(L_A)$, esiste un nodo x in L_A adiacente a y e di conseguenza, nel grafo G’, y ha un arco entrante che ha come origine x.
    - Inoltre poiche\` y e\` in R allora, nel grafo G’, y ha un arco uscente che finisce in t.

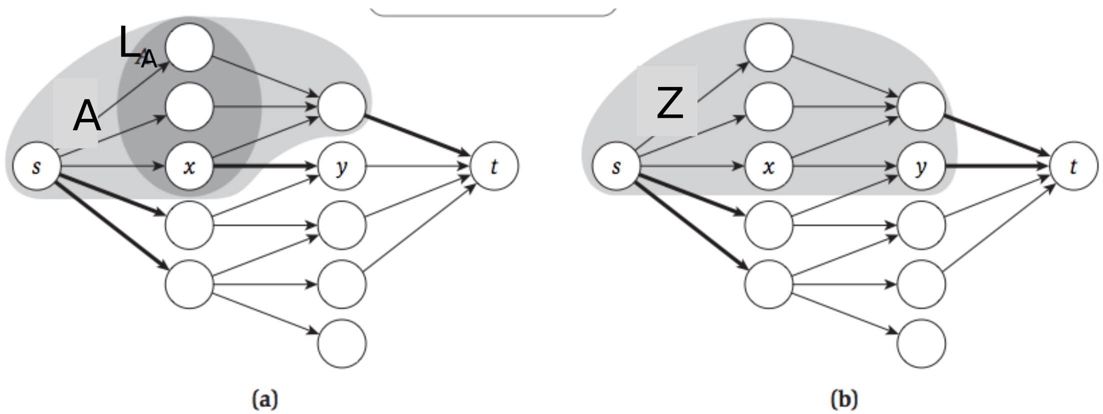


(a) (b)

continua

Teorema dei matrimoni

- Portando y in A, la nuova capacita` del taglio e`ottenuta aggungendo c(y,t)=1 e sottraendo almeno c(x,y)=1 (ci potrebbero essere anche altri archi entranti in y provenienti da nodi di L_A). Di conseguenza la capacita` del taglio non aumenta.



- Nella prossima slide useremo il fatto che (Z,W) e` un taglio s-t minimo per G' e che $N(L_z) \subseteq Z$ per dimostrare che $|N(L_z)| < L_z$

continua

Teorema dei matrimoni

- Il nuovo taglio (Z,W) e` tale che non ci sono archi uscenti da Z che hanno come origine un nodo di L_Z.
- Osserviamo che Z puo` essere partizionato nei seguenti insiemi disgiunti {s}, L_Z , R_z
- Dai due punti precedenti deriva che tutti gli archi uscenti da Z hanno come origine s oppure un nodo di R_Z .
  - Gli archi con origine s che escono da Z sono quelli che hanno come destinazione un nodo in L_W (visto che i nodi a cui e` collegato s sono i nodi di $L = L_Z \cup L_w$ e che $L_Z \subseteq Z$).
  - Gli archi che hanno come origine un nodo in R_Z hanno come destinazione t (visto che tutti i nodi di R hanno come destinazione t ed $R_Z \subseteq R$) .
  - Si ha quindi $cap(Z, W) = |L_W| + |R_Z|$ (*)
- Inoltre si ha che $N(L_Z) \subseteq R_Z$ per cui $|N(L_Z)| \leq |R_Z|$
- Mettendo insieme tutto:

In quanto cap(Z,W)=cap(A,B)<|L|)

▪ $|N(L_Z)| \leq |R_Z| = cap(Z, W) - |L_W| < |L| - |L_W| = |L_Z|$.

dalla (*)

Teorema dei matrimoni

- Abbiamo trovato un insieme L_Z che e` piu` grande di $N(L_Z)$.