Applicazioni del Massimo flusso

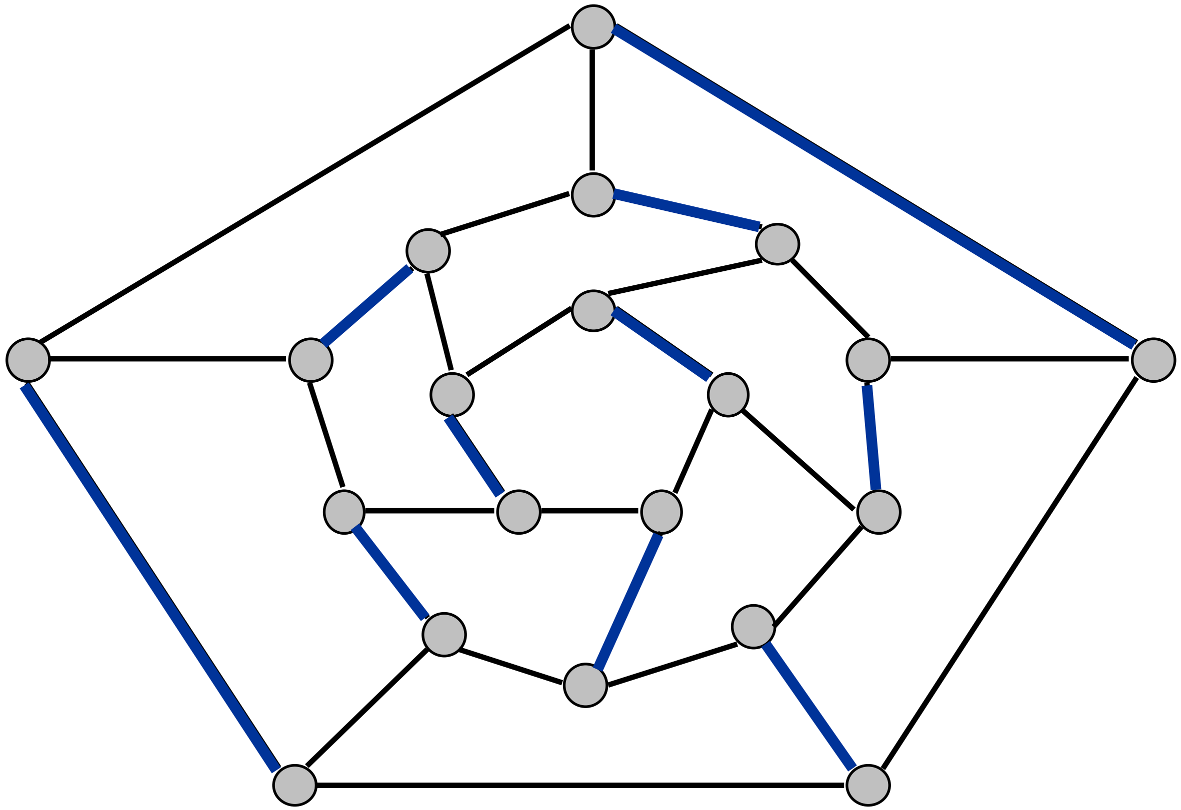
Progettazione di Algoritmi a.a. 2016-17

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

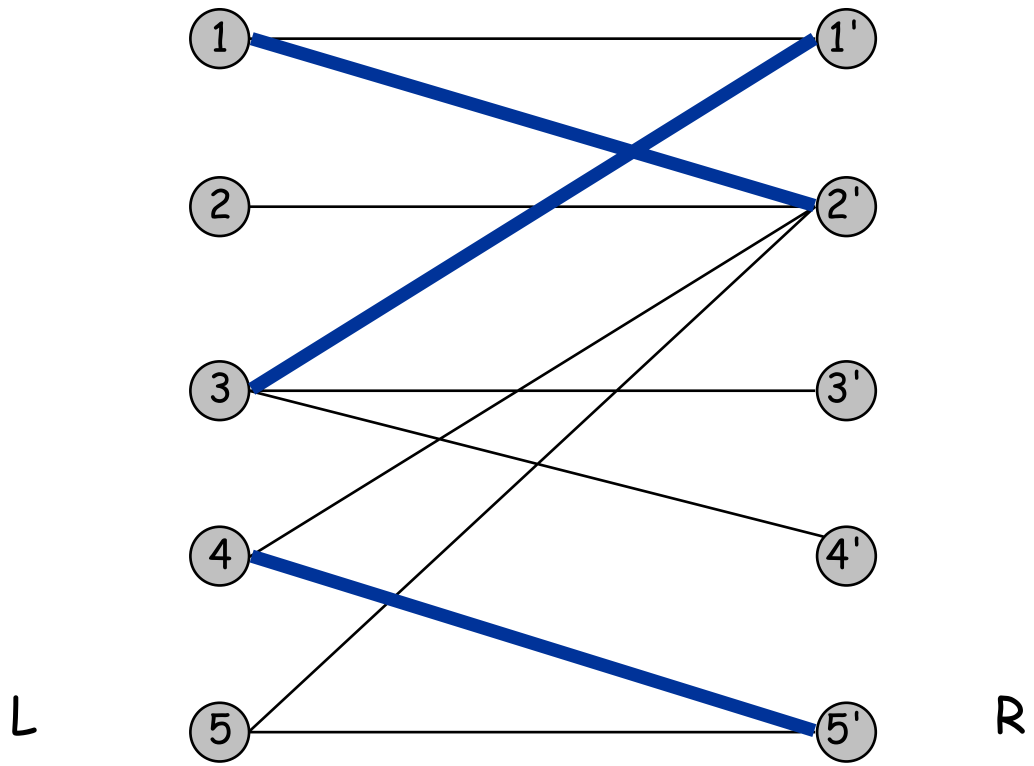
Matching bipartito

- Problema del max matching.
  - Input: grafo non direzionato $G = (V, E)$.
  - $M \subseteq E$ e` un matching se ogni nodo appare in al piu` un un arco di M.
  - Max matching: trova un matching di cardinalita` massima.



Matching bipartito

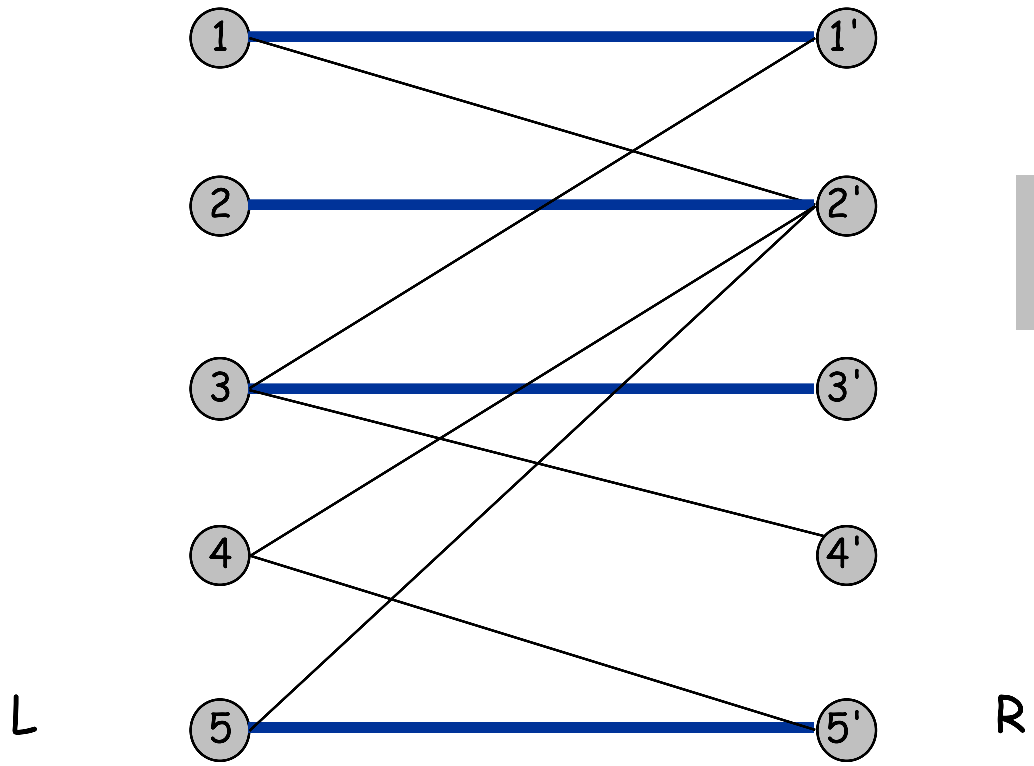
- Problema del max matching bipartito.
  - Input: grafo non direzionato bipartito $G = (L \cup R, E)$.
  - $M \subseteq E$ e` un matching se ogni nodo appare in al piu` un arco di M.
  - Max matching bipartito: trova un matching di massima cardinalita`.



matching

1-2', 3-1', 4-5'

Matching bipartito

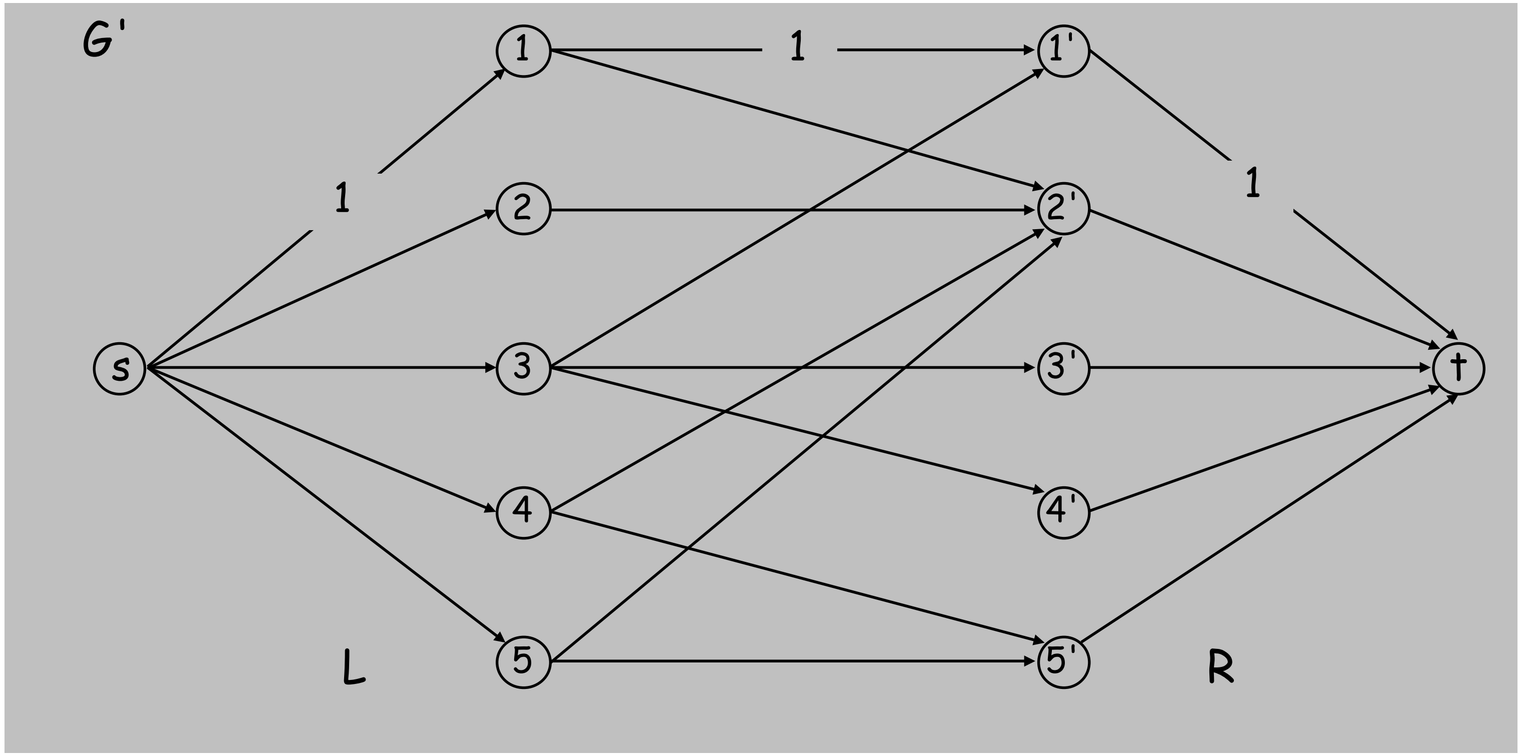


max matching

1-1', 2-2', 3-3' 5-5'

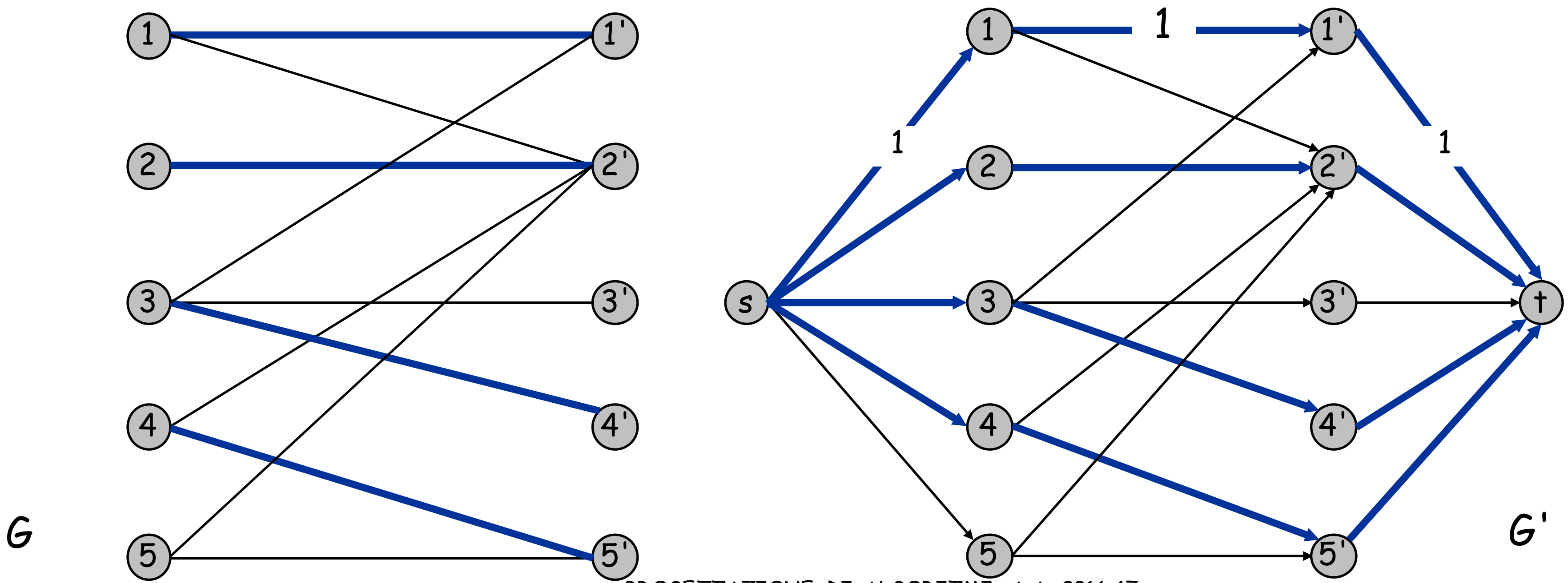
Matching Bipartito

- Formulazione in termini del max flusso.
  - Crea un grafo direzionato $G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$.
  - Orienta gli archi tra L ad R da L verso R, e assegna capacita` pari ad uno a questi archi.
  - Aggiungi un arco con capacita` uno da s a ciascun nodo di L.
  - Aggiungi un arco con capacita` uno da ciascun nodo da R a t.



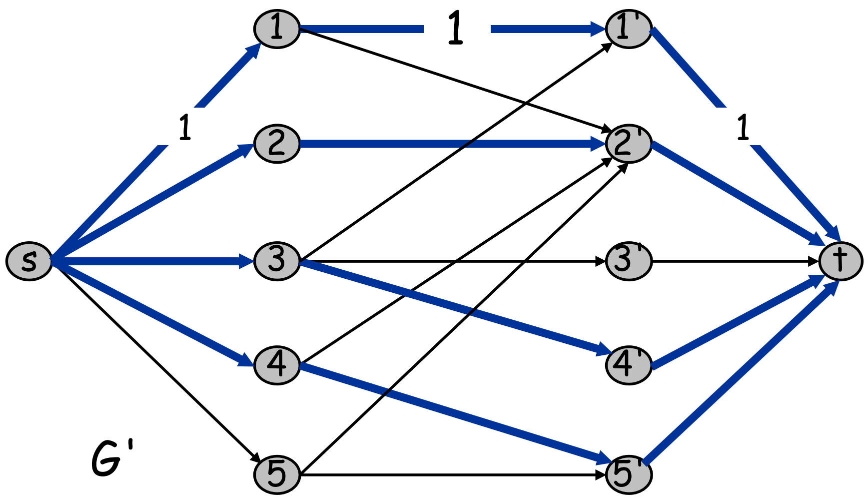
Matching Bipartito

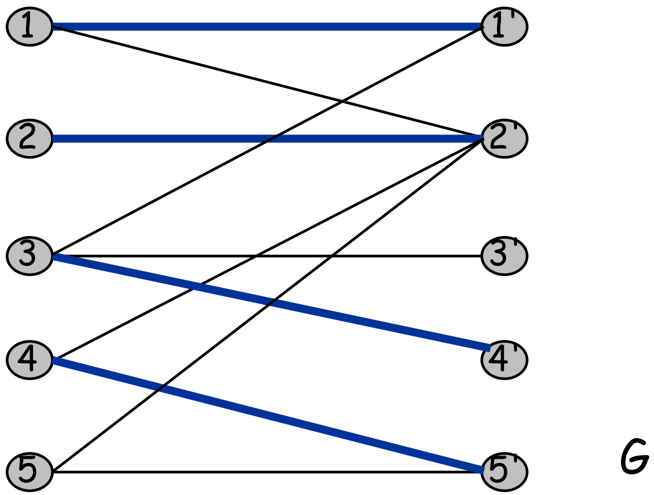
- Teorema. La cardinalita` del max matching in G = Valore del max flusso in G'.
- Dim. Dimostriamo prima che dimensione max matching ≤ valore max flusso
  - Sia M un max matching e sia k la sua cardinalita.
  - Consideriamo la funzione flusso f che invia 1 unita` lungo ciascuno dei k percorsi che passano per i k archi di G' corrispondenti agli archi di G in M.
    - Per ogni arco (i,j') in M, f assegna 1 agli archi (s,i), (i,j'), (j',t) di G'
  - f soddisfa le proprieta` del flusso e ha valore k
  - Abbiamo quindi che dimensione max matching = valore di f ≤ valore max flusso



Matching bipartito

- Dimostriamo che   dimensione max matching ≥ valore max flusso
  - Sia f un massimo flusso di G' e sia k il suo valore.
  - Capacita` degli archi =1 ⇒ k e` intero ed esiste f di valore k tale che f(e) intero (0 o 1) per ogni e.
  - Consideriamo l'insieme di archi M = {e=(u,v): u in L, v in R, f(e)=1} e dimostriamo (nella prossima slide) che M e` un matching di dimensione k. Si ha quindi che max flusso = dimensione matching M ≤ dimensione max matching



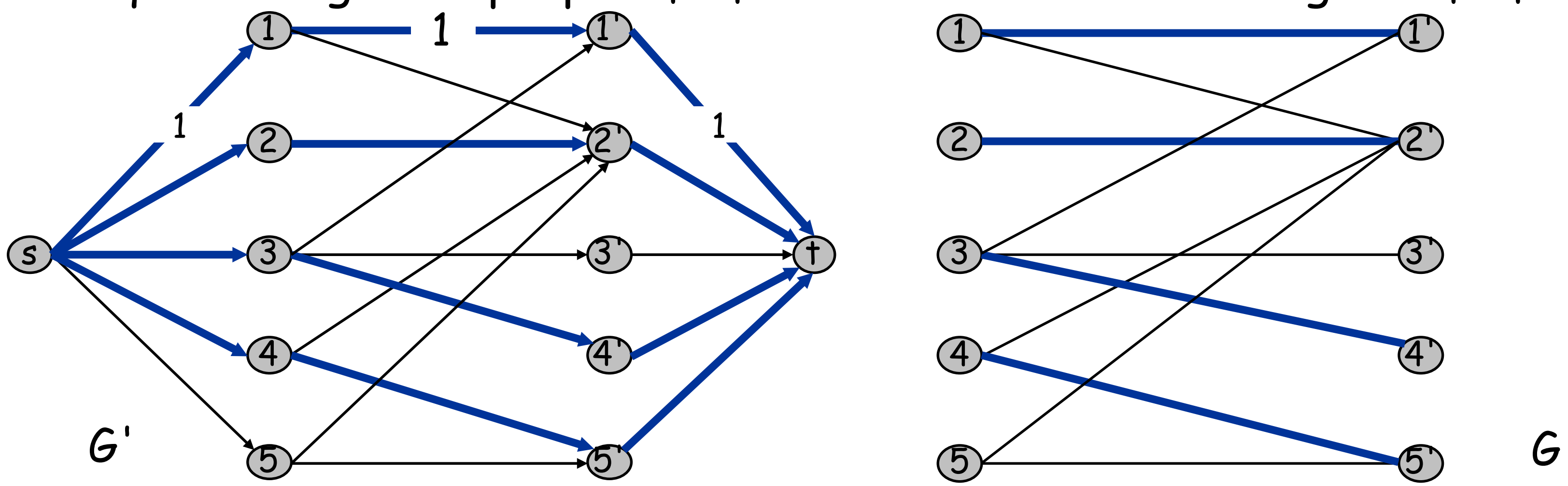


Continua nella prossima slide

Matching bipartito

1. Dim. che M e` un matching: Dimostriamo che ciascun nodo u di $L \cup R$ e` contenuto in al piu` un arco.
   - Se u e` in L allora in u arriva flusso 0 o 1 da s. Per la conservazione del flusso da u esce questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con origine u attraverso il quale fluisce 1 unita` di flusso.
   - Se u e` in R allora da u fuoriesce flusso 0 o 1 verso t. Per la conservazione del flusso in u entra questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con destinazione u attraverso il quale fluisce 1 unita` di flusso.
   - Quindi in entrambi i casi in M c'e` al piu` un arco che ha una delle due estremita` uguali ad u.

2. Dim. che $|M|=k$: Consideriamo il taglio ($L \cup s$, $R \cup t$). Il flusso netto attraverso questo taglio e` proprio $|M|$. Lemma del valore del taglio→ $|M|=k$



Matching bipartito

- Possiamo trovare il max matching di un grafo bipartito G eseguendo Ford-Fulkerson sul grafo G' ottenuto a partire da G. Il max matching e` ottenuto come illustrato nella seconda parte della dimostrazione del teorema precedente.

- Tempo di esecuzione: $O(nm)$ in quanto la capacita` di ogni arco di $G'$ e` al piu` $C=1$ e di conseguenza $O(nmC)=O(nm)$

Matching perfetti

- Def. Un matching $M \subseteq E$ e` **perfetto** se ciascun nodo appare esattamente in un arco di M.

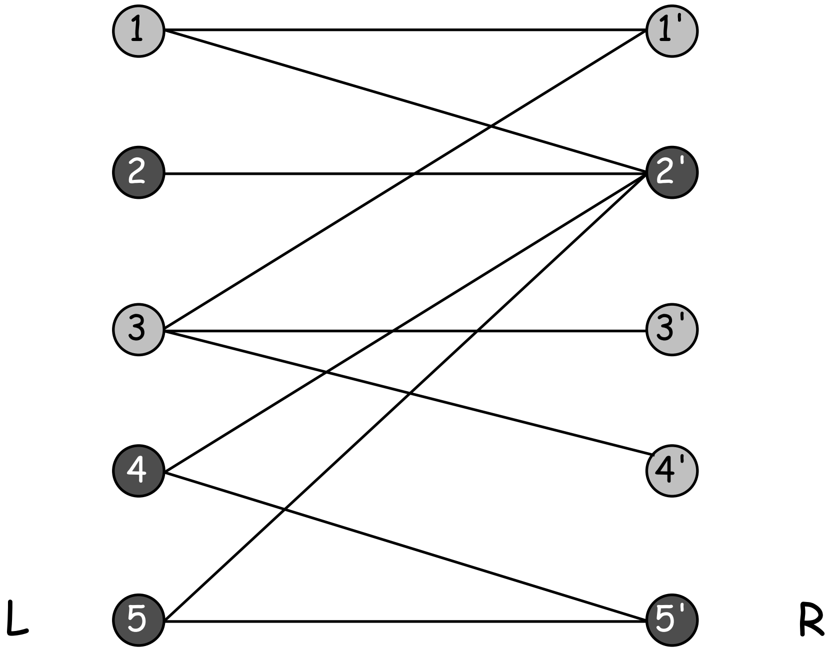
- Domanda. Quando un grafo bipartito ha un matching perfetto?

- Struttura dei grafi bipartiti con matching perfetti.
  - Ovviamente deve essere $|L| = |R|$.
  - Quali altre condizioni sono necessarie?
  - Quali condizioni sono sufficienti?

Matching Perfetto

- Notazione. Sia S un sottoinsieme di nodi di L. Indichiamo con N(S) l'insieme dei nodi di R adiacenti ai nodi di S.

- Osservazione. Se un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ ha un matching perfetto allora $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.
- Dim. Ciascun nodo in S deve essere accoppiato ad un nodo differente in N(S).



<u>Nessun matching perfetto:</u>

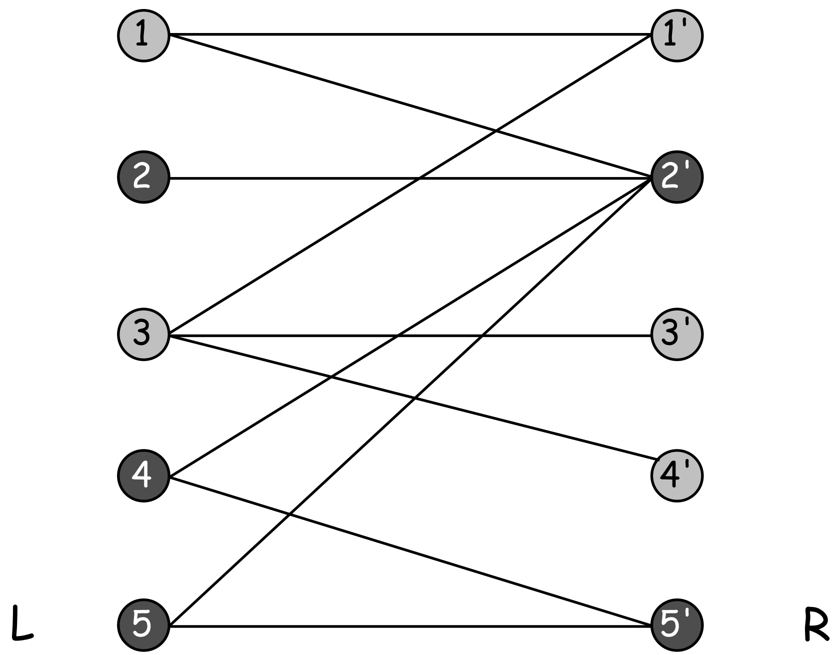
$S = \{ 2, 4, 5 \}$

$N(S) = \{ 2', 5' \}$.

Teorema dei matrimoni

- **Il teorema dei matrimoni.** [Frobenius 1917, Hall 1935] Sia $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito con $|L| = |R|$. G ha un matching perfetto se e solo se $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.

- **Dim.** L'implicazione $\Rightarrow$ l'abbiamo gia` dimostrata nella slide precedente.



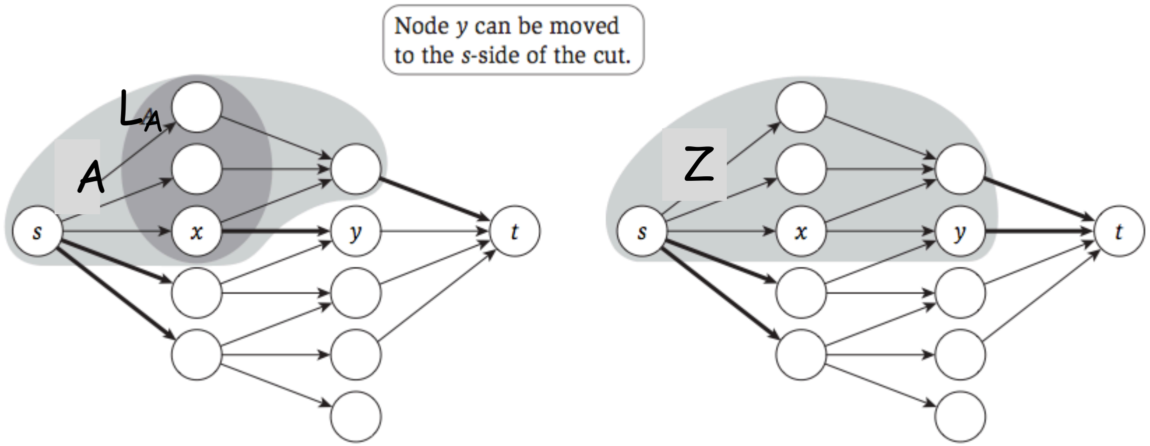
<u>No perfect matching:</u>

$S = \{ 2, 4, 5 \}$

$N(S) = \{ 2', 5' \}$.

Teorema dei matrimoni

- Dimostriamo l'implicazione $\Leftarrow$
- Dimostreremo che se G non ha un matching perfetto allora esiste un sottoinsieme L_Z di L per cui $N(L_Z) < L_Z$
- Supponiamo che G non abbia un matching perfetto. Questo vuol dire che il max matching ha dimensione < |L|
  - Costruiamo la rete di flusso G' nello stesso modo di prima e sia (A, B) un minimo taglio di G'. Teorema del Max Flusso-Min Taglio → cap(A,B) <|L|
  - Definiamo $L_A = L \cap A$, $L_B = L \cap B$, $R_A = R \cap A$.
  - Possiamo trasformare (A,B) in un altro taglio minimo (Z,W) in cui $N(L_Z) \subseteq Z$. Per far questo aggiungiamo ad A ciascun nodo di $N(L_A)$ che si trova in B. Sia y un tale nodo. Ovviamente in G' y ha un arco uscente che finisce in t e almeno un arco entrante che parte da un nodo x di L_A.



(a) (b)

Teorema dei matrimoni

- Portando y in A, la nuova capacita` del taglio e` ottenuta aggungendo c(y,t)=1 e sottraendo almeno c(x,y)=1 (ci potrebbero essere anche altri archi entranti in y provenienti da nodi di L_A). Di conseguenza la capacita` del taglio non aumenta.
- Il nuovo taglio (Z,W) e` tale che non ci sono archi uscenti da Z che hanno come origine un nodo di L_Z. Ne consegue che tutti gli archi uscenti da Z hanno come origine s e destinazione un nodo in L_W oppure hanno come origine un nodo in R_Z e come destinazione t. Si ha quindi $cap(Z, W) = |L_W| + |R_Z|$.
- Inoltre si ha che $N(L_Z) \subseteq R_Z$ per cui
- $|N(L_Z)| \leq |R_Z| = cap(Z, W) - |L_W| < |L| - |L_W| = |L_Z|$.
- Abbiamo trovato un insieme L_Z che e` piu` grande di $N(L_Z)$. Cio` contraddice l'ipotesi che ogni per sottoinsieme S di L si ha $|N(S)| \geq |S|$

Percorsi disgiunti

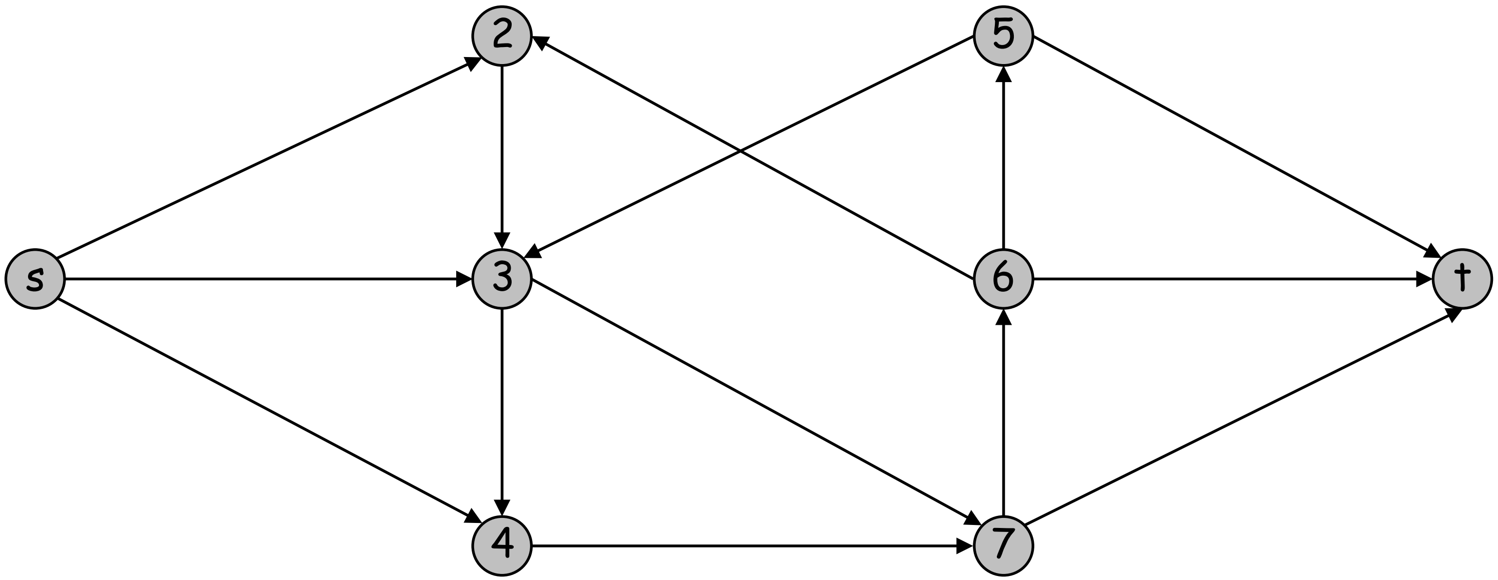
Percorsi senza archi in comune

- Def. Due percorsi vengono detti disgiunti se non hanno archi in comune

- Il problema dei percorsi disgiunti. Dato un grafo direzionato e due nodi s e t, trovare il massimo numero di percorsi da s a t senza archi in comune.

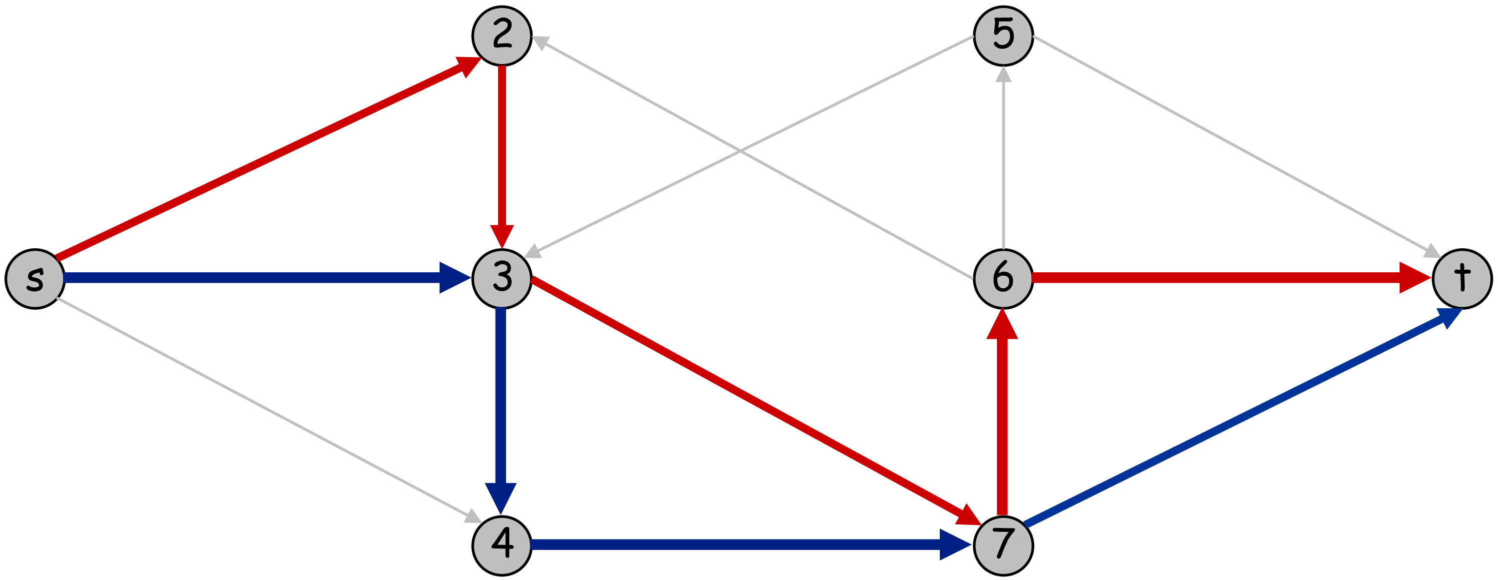
-

Esempio: reti di comunicazione



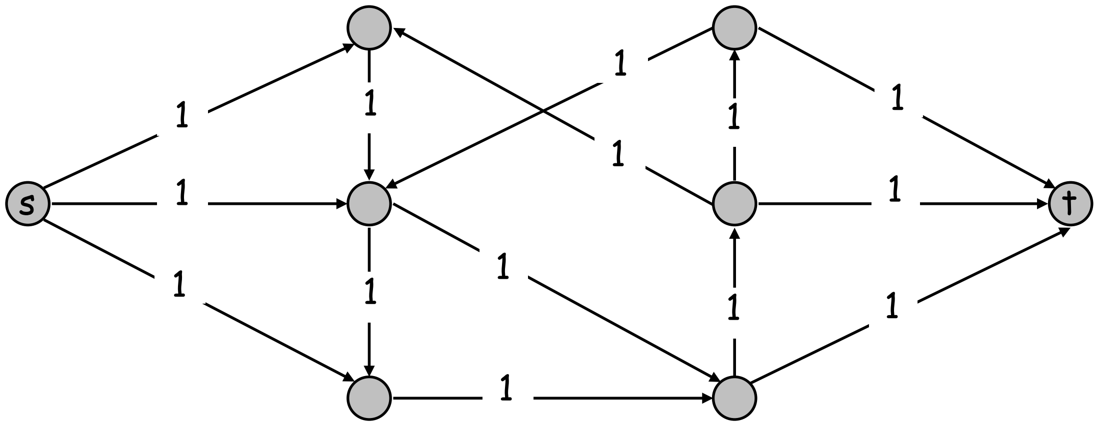
Percorsi senza archi in comune

- Esempio: questi sono percorsi disgiunti nell'esempio precedente



Percorsi senza archi in comune

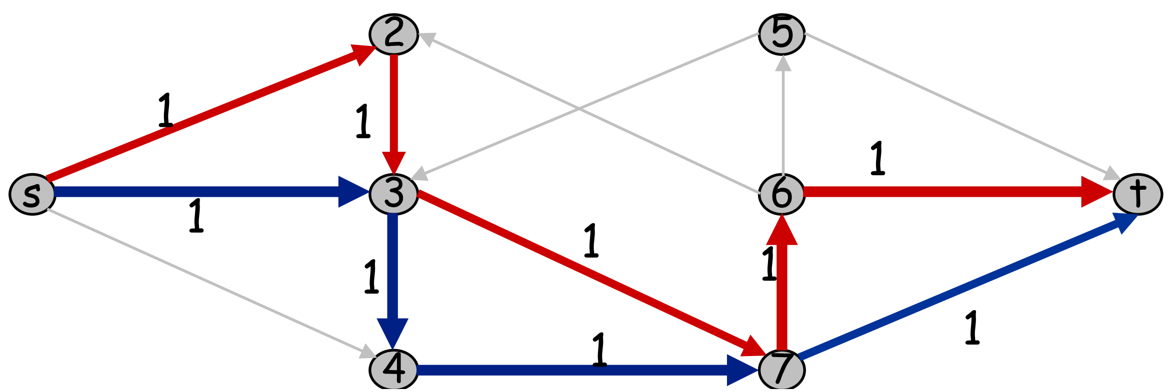
- Formulazione in termini di max flusso: assegnamo flusso pari ad 1 ad ogni arco.



- Teorema. Sia dato un grafo direzionato G e siano s e t due nodi di G. Il massimo numero di percorsi disgiunti da s a t in G e\` uguale al valore del max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita\` 1 agli archi di G.
- Dim. Dimostriamo ≤
  - Supponiamo che ci siano k percorsi disgiunti $P_1, \ldots, P_k$.
  - Poniamo f(e) = 1 se e compare su qualche percorso P_i; altrimenti poniamo f(e) = 0.
  - Siccome i percorsi sono disgiunti allora f e\` un flusso (conservazione del flusso soddisfatta) e ha valore k (k distinti archi e uscenti da s con f(e)=1)

Percorsi disgiunti

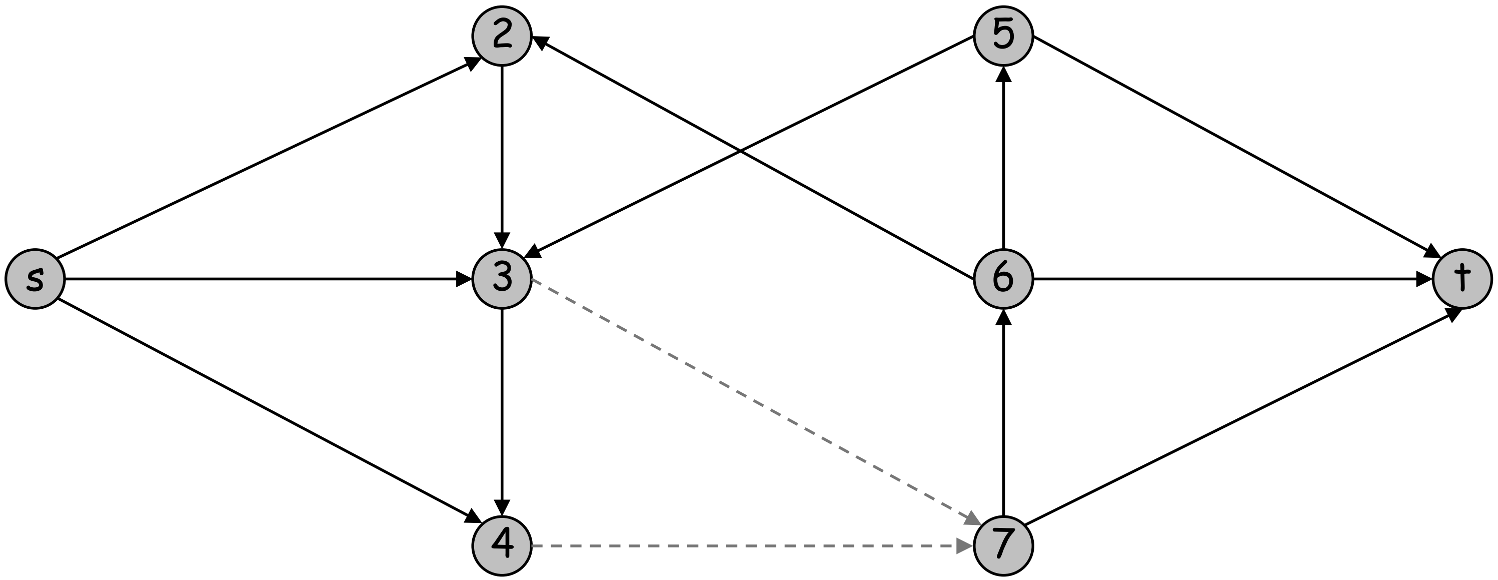
- Dimostriamo ≥
  - Supponiamo che il max flusso abbia valore k.
  - Siccome capacita` sono interi uguali ad 1 ⇒ esiste una funzione flusso f che assegna valori interi (0 o 1) ad ogni arco e ha valore k.
  - Consideriamo un arco (s, u) con f(s, u) = 1.
    - Per la conservazione del flusso esiste un arco (u,v) per cui f(u,v)=1. Per lo stesso motivo esiste un arco (v,z) per cui f(v,z)=1. E cosi` via.
    - In questo modo possiamo individuare un percorso da s a t fatto di archi con flussi unitari.
  - Siccome il valore di f e` k allora da s escono k archi con flusso pari ad 1. Quindi con il procedimento descritto possiamo produrre k percorsi da s a t (non necessariamente semplici) che non hanno archi in comune (se li avessero non sarebbe soddisfatta la proprieta` sulla conservazione del flusso).



Connettivita` di una rete

- Connettivita` di una rete. Dato un grafo direzionato G = (V, E) e due nodi s e t, trovare il minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s.

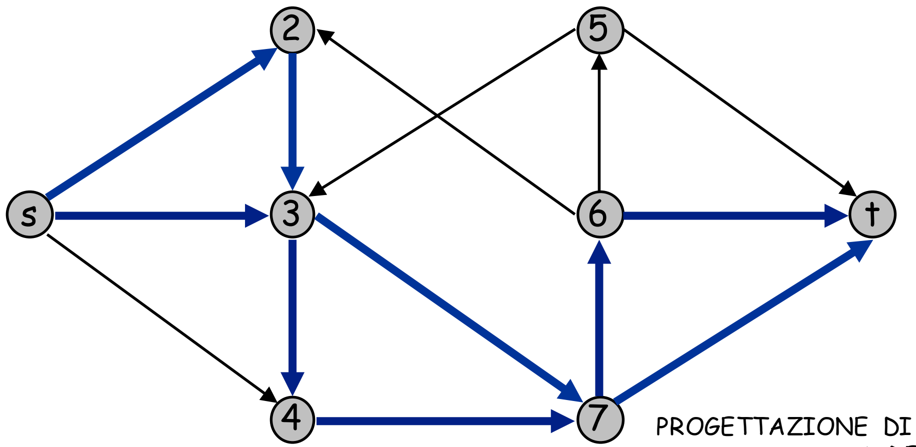
- Def. Un insieme di archi $F \subseteq E$ disconnette t da s se ogni percorso da s a t usa un arco di F.

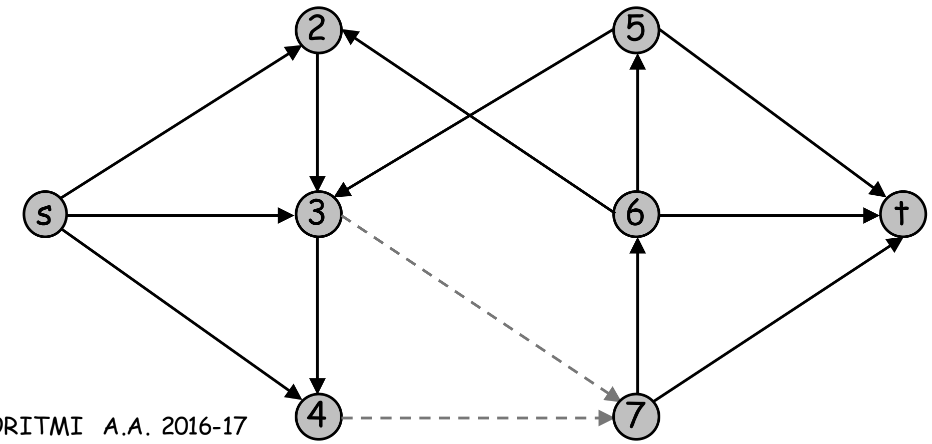


Percorsi disgiunti e connetivita` di una rete

- **Teorema.** [Menger 1927] Sia G un grafo direzionato e siano s e t due nodi di G. Il max numero di percorsi disgiunti in G da s a t e` uguale al minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s.

- Dim.
- Dimostriamo $\leq$
  - Sia $F \subseteq E$ un insieme di archi la cui rimozione disconnette t da s e che $|F| = k$ → ciascun percorso da s a t usa almeno un arco in F.
  - Sia S il max insieme di percorsi disgiunti da s a t. Ciascun arco di F e` usato da al piu` un percorso in S → $|S| \leq k$

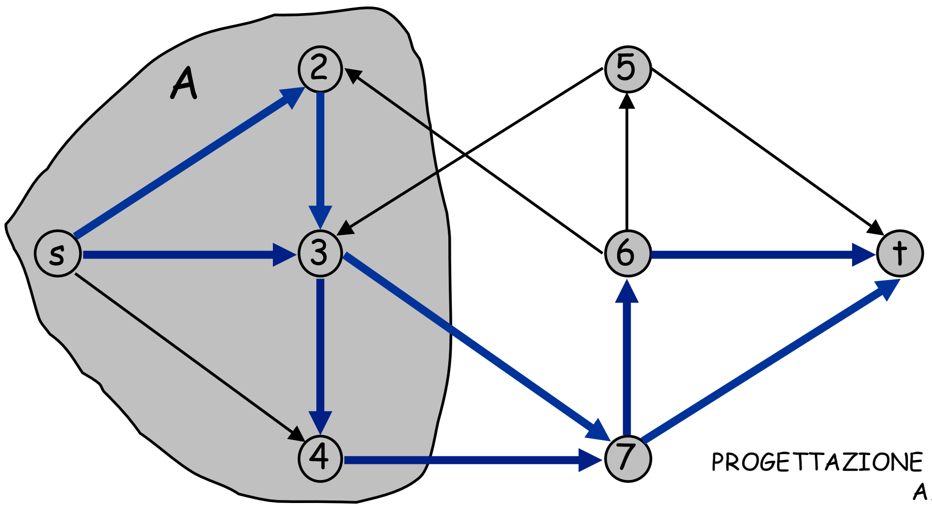


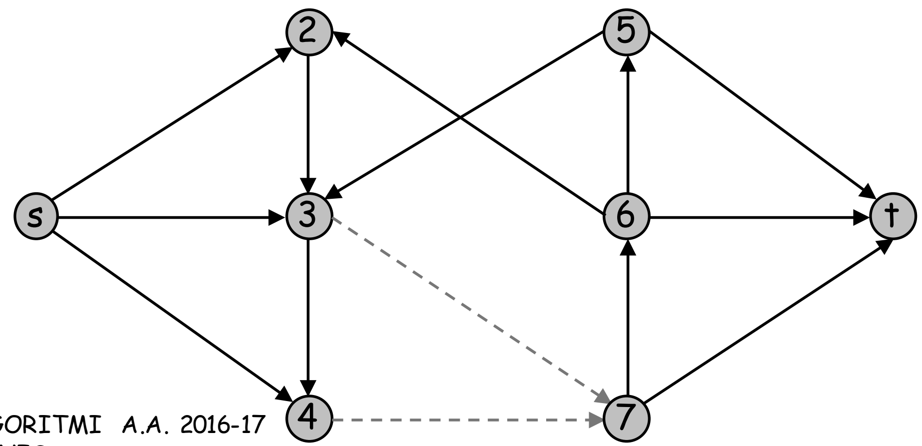


Percorsi disgiunti e connetivita` di una rete

Dimostriamo ≥

- Supponiamo che il max numero di percorsi disgiunti sia k.
- Abbiamo dimostrato che max numero percorsi disgiunti = valore max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita` 1 agli archi di G. Quindi il valore del max flusso in questa rete e` k.
- Teorema Massimo Flusso & Minimo Taglio ⇒ esiste taglio (A, B) con cap(A,B)= k.
- Sia F l'insieme degli archi che vanno da A verso B.
- Ogni arco ha capacita` 1 e la somma delle capacita` degli archi diretti da A verso B e` k → |F| = k
- Ovviamente se rimuoviamo gli archi di F disconnettiamo t da s per cui F e` un insieme che disconnette t da s e ha cardinalita` k.





Eliminazione dal campionato di Baseball

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}			
				Atl	Phi	NY	Mon
Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
Philly	80	79	3	1	-	0	2
New York	78	78	6	6	0	-	0
Montreal	77	82	3	1	2	0	-

Quali squadre hanno la possibilita` di finire la stagione con piu` vittorie?

- Montreal e` eliminata dal momento che puo` finire con al piu` 80 vittorie e Atlanta ne ha gia` 83.
- $w_i + r_i < w_j \Rightarrow$ squadra i eliminata
- Questa condizione e` sufficiente ma non necessaria. In altre parole, in un certo momento una squadra potrebbe avere ancora la possibilita` di vincere il torneo ma poi da quel momento in poi le cose potrebbero andare male e essere eliminata.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = $r_{i,j}$			
				Atl	Phi	NY	Mon
Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
Philly	80	79	3	1	-	0	2
New York	78	78	6	6	0	-	0
Montreal	77	82	3	1	2	0	-

- Philly puo` vincerne fino ad 83 ma essere ancora eliminata
- Se Atlanta perde una partita allora qualche altra squadra deve vincerla al suo posto

- N.B. Il futuro di una squadra nel campionato dipende non solo da quante partite devono essere giocate dalla squadra ma anche da quali sono le squadre contro le quali deve giocare.

Eliminazione dal campionato di Baseball

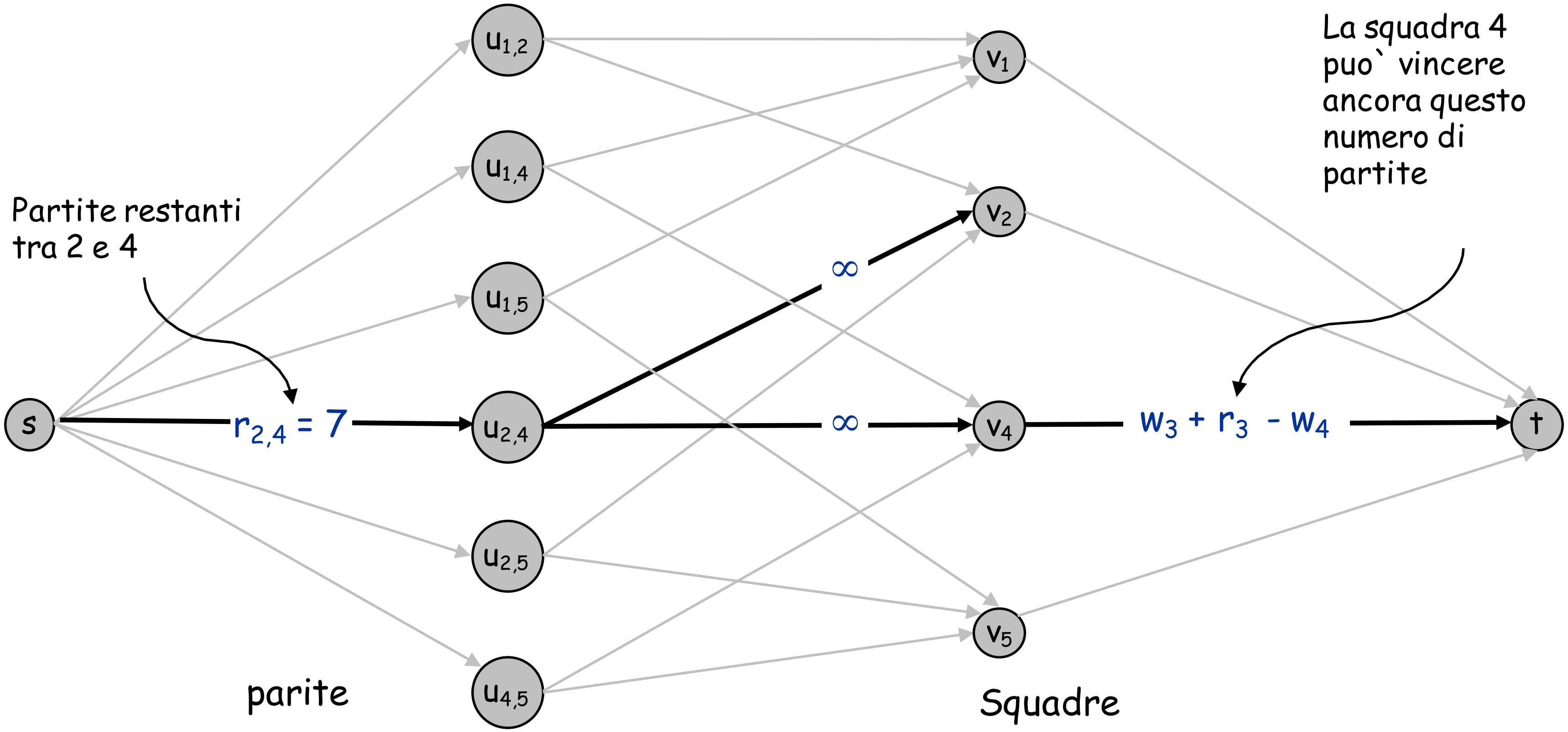
- Insieme S di squadre
- Squadra particolare $z \in S$.
- La squadra x ha vinto w_x partite.
- Le squadre x e y giocano una contro l'altra altre $r_{x,y}$ volte.
- E` possibile che la squadra z finisca con il maggior numero di vittorie (anche ex aequo con altre)?

Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Vogliamo scoprire se la squadra z puo` totalizzare il maggior numero di vittorie. Sia m il numero di vittorie conseguite fino a questo punto da z.
- Costruiamo una rete di flusso nel modo seguente.
- **Nodi:**
  - Sorgente s da cui si emanano le vittorie
  - Pozzo t che assorbe le vittorie
  - Per ogni squadra x diversa da z, inseriamo nodo v_x
  - Per ogni coppia di squadre x, y diverse da z, inseriamo il nodo $u_{x,y}$ se x e y devono giocare almeno un'altra partita l'una contro l'altra
- **Archi:**
- Per ogni nodo $u_{x,y}$, inseriamo
- arco $(s,u_{x,y})$ con cap. $r_{x.y}$: rappresenta vittorie emanate da s in relazione alle restanti partite tra x e y
- archi $(u_{x,y},v_x)$ e $(u_{x,y},v_y)$ con cap. ∞: rappresentato rispettivamente le vittorie di x contro y e di y contro x
- Per ogni nodo v_x inseriamo
- arco (v_x,t) con cap. $m-w_x$: rappresenta le vittorie di x assorbite da t (max numero vittorie associabili ad x affinche' z totalizzi maggior numero vittorie)

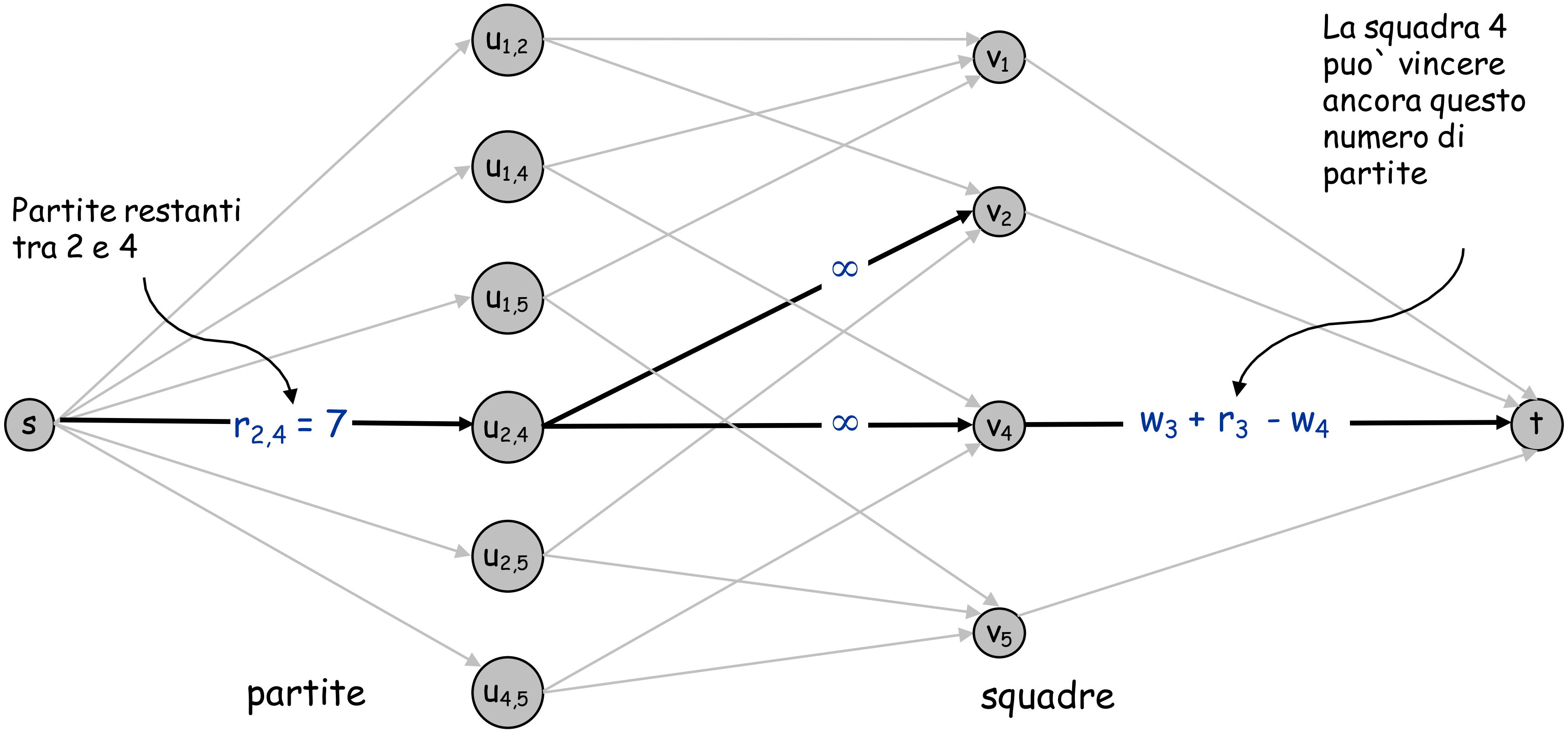
Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Puo` il team 3 terminare con il maggior numero di vittorie?
  - Assumiamo che il team 3 vinca tutte le restanti partite $\Rightarrow$ $w_3 + r_3$ vittorie.
  - Le altre partite devono finire in modo che ogni altra squadra totalizzi $\leq$ $w_3 + r_3$ vittorie.



Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Capacita` intere $\Rightarrow$ esiste funzione di flusso max che associa valori interi ad ogni arco per cui una partita giocata tra x e y si traduce in una vittoria per x o per y ( un'unita` di flusso lungo $(s,v_{x,y})$ si traduce in un'unita` di flusso lungo $(u_{x,y}, v_x)$ o lungo $(u_{x,y}, v_y)$)



Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- Teorema. La squadra z non e` eliminata se e solo se la funzione di flusso massimo satura tutti gli archi uscenti da s, cioe` valore flusso max = somma capacita` archi uscenti da s.
- Dim. m = numero totale di vittorie conseguibili da z al termine del campionato
- dim. $\leftarrow$: Sia f la funzione di flusso con valore max.
- Il numero totale di partite che restano da giocare tra squadre diverse da z e` uguale alla somma delle capacita` degli archi uscenti da s. Di conseguenza, se f satura tutti gli archi uscenti da s si ha che il valore del flusso e` uguale al numero totale di partite da giocare tra squadre diverse da z.
- Per la conservazione del flusso, il flusso $f(v_x, t)$ e` uguale al flusso entrante in $v_x$ e cioe` uguale al numero di partite vinte da x tra quelle che restano da giocare contro le altre squadre diverse da z. Per il vincolo sulla capacita` $f(v_x, t)$ non puo` eccedere $c(v_x, t)=m-w_x$. Cio` vuol dire che per ogni x diverso da z, il numero totale di vittorie di x e` al piu` $w_x +m-w_x =m$. Ne consegue che z non viene eliminato.
- Mettendo insieme i due punti precedenti concludiamo che e` possibile giocare tutte le partite del campionato (per il punto 1) in modo che alla fine z non venga eliminata (per il punto 2)

Eliminazione dal campionato di Baseball: Formulazione basata sul max flusso

- dim. → : Supponiamo che sia possibile che z non venga eliminata.
- Se e` possibile che z non venga eliminata allora vuol dire che le partite restanti tra squadre diverse da z possono concludersi in modo che ciascuna squadra x diversa da z vinca in queste partite al piu` $m-w_x$ partite.
- Per ogni x diverso da z indichiamo con n_x ($n_x \leqq m-w_x$) il numero di partite vinte da x tra tutte le partite che restano da giocare tra x e tutte le altre squadre diverse da z
- Per ogni coppia di squadre x,y diverse da z, denotiamo con $n_{x,y}$ il numero di restanti partite vinte da x contro y e con $n_{y,x}$ il numero di restanti partite vinte da y contro x ($n_{y,x} + n_{x,y} = r_{x,y}$).
- Consideriamo la rete di flusso costruita prima e costruiamo una funzione flusso f per questa rete nel seguente modo:
- Per x diverso da z, poniamo $f(v_x,t)=n_x$
- Per ogni due nodi x e y diversi da z, poniamo, $f(u_{x,y}, v_x)= n_{x,y}$, $f(u_{x,y}, v_y)= n_{y,x}$ e $f(s,u_{x,y})=r_{x,y}$
- Osserviamo che f soddisfa il vincolo sulla capacita` in quanto $c(s,u_{x,y})= r_{x,y}$, $c(u_{x,y}, v_x)= c(u_{x,y}, v_y)= \infty$ e $c(v_x,t) = m-w_x$ e soddisfa il vincolo sulla conservazione del flusso in quanto $r_{x,y} = n_{x,y} + n_{y,x}$, n_x= somma per ogni y diverso da x e z di $n_{x,y}$
- Osserviamo che f satura tutti gli archi uscenti da s.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}				
				NY	Bal	Bos	Tor	Det
NY	75	59	28	-	10	8	7	3
Baltimore	71	63	28	10	-	2	12	4
Boston	69	66	27	8	2	-	8	9
Toronto	63	61	38	7	12	8	-	11
Detroit	49	86	27	3	4	9	11	-

- Quali squadre hanno una possibilita` di finire la stagione con il massimo numero di vittorie?
- Cerchiamo di capire se Detroit potrebbe una di queste squadre.
- Osserviamo innanzi tutto che Detroit potrebbe terminare la stagione con al piu` 49 + 27 = 76 vittorie.

Eliminazione dal campionato di Baseball

Team i	Wins w_i	Losses l_i	To play r_i	Against = r_{ij}				
				NY	Bal	Bos	Tor	Det
NY	75	59	28	-	10	8	7	3
Baltimore	71	63	28	10	-	2	12	4
Boston	69	66	27	8	2	-	8	9
Toronto	63	61	38	7	12	8	-	11
Detroit	49	86	27	3	4	9	11	-

- Quali squadre hanno una possibilita` di finire la stagione con il massimo numero di vittorie?
- Cerchiamo di capire se Detroit potrebbe una di queste squadre.
- Osserviamo innanzi tutto che Detroit potrebbe terminare la stagione con al piu` 49 + 27 = 76 vittorie.
- Certificato di eliminazione: sottoinsieme R = {NY, Bal, Bos, Tor}
  - Le squadre in R hanno in totale gia` vinto w(R) = 75+71+69+63=278 partite .
  - A queste vittorie se ne aggiungeranno r(R) = 47 (numero partite tra 2 squadre di R)
  - Il numero medio di vittorie per squadra e` 325/4 > 76 → esiste squadra in R che totalizzera` piu` di 76 vittorie.

Eliminazione dal campionato di Baseball
Certificato di Eliminazione

- Per ogni sottoinsieme T di S calcoliamo:

$$T \subseteq S, \quad w(T) := \overbrace{\sum_{i \in T} w_i}^{\#\text{ wins}}, \quad r(T) := \overbrace{\sum_{\{x,y\} \subseteq T} r_{xy}}^{\#\text{ remaining games}},$$

- Se per un certo sottoinsieme T di S si ha che

$$\overbrace{\frac{w(T) + r(T)}{|T|}}^{\text{LB on avg \# games won}} > w_z + r_z$$

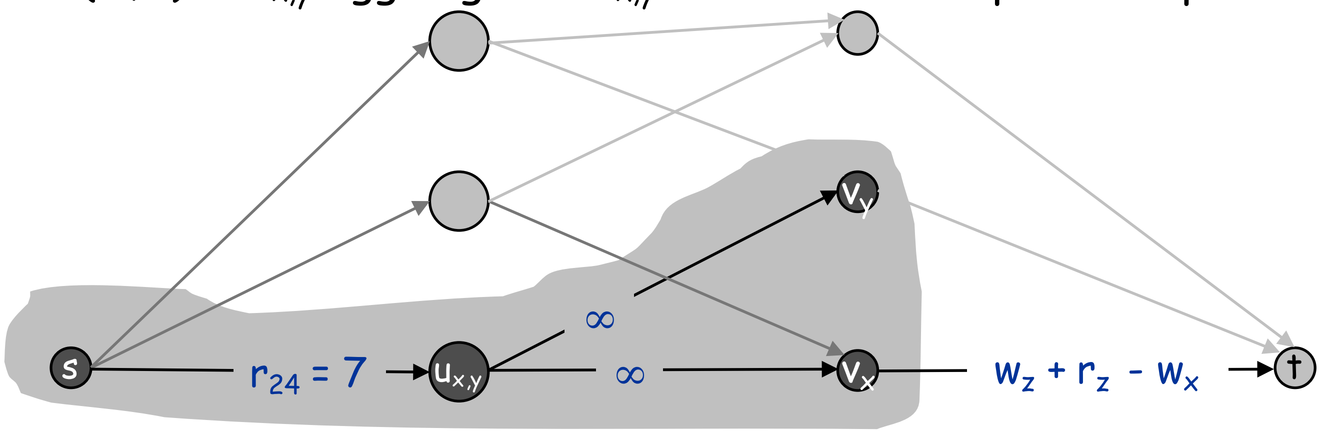
allora z e` eliminato. Diremo che T elimina z in quanto l'esistenza di T prova che z e` eliminato.

Eliminazione dal campionato di Baseball

- Teorema. [Hoffman-Rivlin 1967] Una squadra z e` eliminata se e solo se c'e` un sottoinsieme T* che elimina z.
- Dim. (solo dell'implicazione $\rightarrow$)
- Dimostriamo che se z e` eliminata allora e` possibile trovare un sottoinsieme T* che elimina z.
- Costruiamo la rete di flusso nel modo visto. Sia f* il max flusso in questa rete.
  - Consideriamo il taglio (A, B) del teorema max flusso min taglio.
  - Poniamo T* = insieme di vertici v_x contenuti in A.
  - Osservazione: $u_{x,y} \in A$ se e solo se $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$.

    Dim $\rightarrow$: se $u_{x,y} \in A$ allora la capacita` infinita degli archi $(u_{x,y}, v_x)$ e $(u_{x,y}, v_y)$ assicura che $v_x \in A$ and $v_y \in A$ e di conseguenza $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$.

    Dim $\leftarrow$: se $v_x \in T^*$ e $v_y \in T^*$ ma $u_{x,y} \in B$, allora potremmo decrementare la capacita` di (A,B) di $r_{x,y}$ aggiungendo $u_{x,y}$ ad A. Cio` e` impossibile perche` (A,B) ha cap. minima



Continua nella prossima slide

Eliminazione dal campionato di Baseball

- Notiamo che

$$1 \qquad cap(A,B) = \sum_{(x,y):\, v_x \text{ or } v_y \notin T^*} r_{x,y} + \sum_{x:\, v_x \in T^*} m - w_x$$

$$= r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + m|T^*| - w(T^*)$$

$$= r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*)$$

- z eliminata → funzione di flusso max f* non satura tutti gli archi uscenti da s.
- Siccome f* non satura tutti gli archi della forma (s, $u_{x,y}$) allora si ha che

$$2 \qquad cap(A,B) = v(f^*) < \sum_{x,y \in S \setminus \{z\}} r_{x,y} = r(S \setminus \{z\})$$

- Dalla 1 e la 2 si ha $r(S \setminus \{z\}) - r(T^*) + (w_z + r_z)|T^*| - w(T^*) < r(S \setminus \{z\})$
- Da cui $w_z + r_z < \dfrac{w(T^*) + r(T^*)}{|T^*|}$