

Cognome e Nome:  
Numero di Matricola:

**Spazio riservato alla correzione**

1	2	3	4	Bonus	Totale
/25	/30	/20	/25		/100

**1.Grafi**

a) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo BFS con coda FIFO, e si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore e` possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo **giustificando la risposta.**

- b) Illustrare il significato di tutte le variabili e parametri dell'algoritmo di cui al punto a.  
**I punti a e b saranno valutati insieme.**

c) Fornire un algoritmo che, dato un grafo non direzionato  $G$ , scopre se  $G$  contiene cicli e in caso affermativo produce in output uno dei cicli. L'algoritmo deve avere tempo di esecuzione  $O(n+m)$ .

## **2. Algoritmi greedy**

a) Si descriva in modo chiaro e schematico in che cosa consiste un'istanza del problema della minimizzazione dei ritardi (input) e qual è l'obiettivo del problema (output). Definire in modo preciso le quantità che intervengono nella descrizione dell'output del problema. Se dalla risposta a questo punto si evincerà che lo studente non sa in cosa consiste il problema della minimizzazione dei ritardi, i punti successivi dell'esercizio non saranno valutati.

b) Si fornisca un controesempio che dimostra che la strategia shortest processing time first non sempre fornisce la soluzione ottima.

c) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo greedy che trova la soluzione ottima per il problema della minimizzazione dei ritardi descrivendo il significato di tutte le variabili che compaiono nel codice. **Nel caso in cui non venga fornita questa descrizione, l'esercizio sarà valutato 0 punti.**

d) Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo fornito al punto c) . Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore e` possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo **giustificando la risposta**.

e) Quali osservazioni vengono utilizzate per dimostrare che la soluzione greedy per il problema della minimizzazione dei ritardi è ottima? Spiegare in modo chiaro e conciso perché queste osservazioni implicano che la soluzione greedy è ottima.



### 3. Programmazione dinamica.

a) Fornire una formula per il calcolo del valore della soluzione ottima per il problema dei cammini minimi basata sul principio della programmazione dinamica. Spiegare in modo chiaro e schematico come si arriva alla formula da voi fornita. **Occorre anche dire quale risultato riguardante i grafi privi di cicli negativi occorre usare e dove questo risultato si usa.**

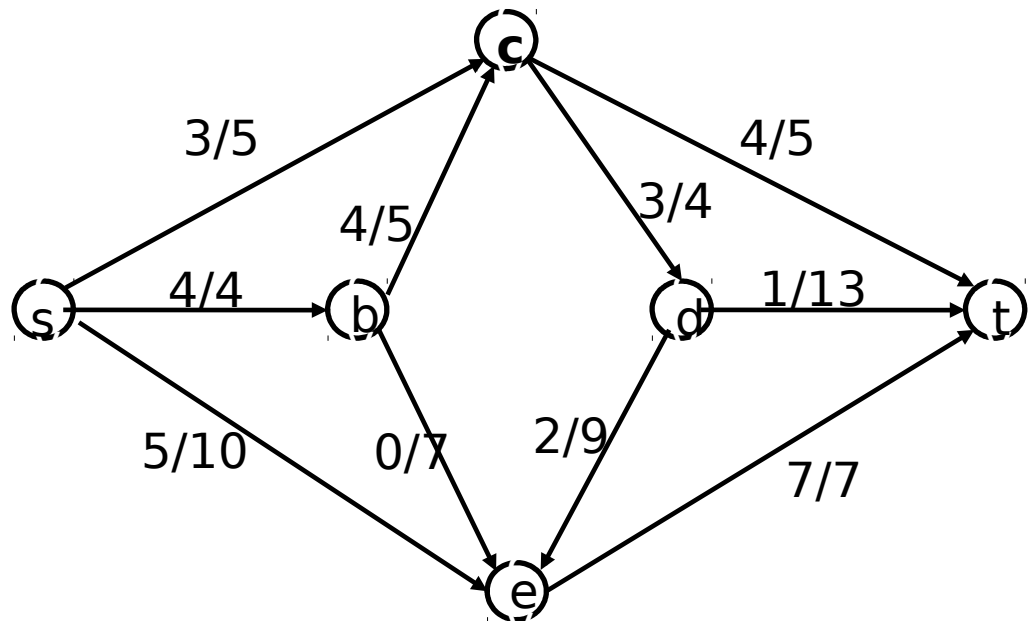
b) Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo di Bellman-Ford e analizzare il tempo di esecuzione dell'algoritmo. **Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore è possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.**

#### 4. Massimo flusso

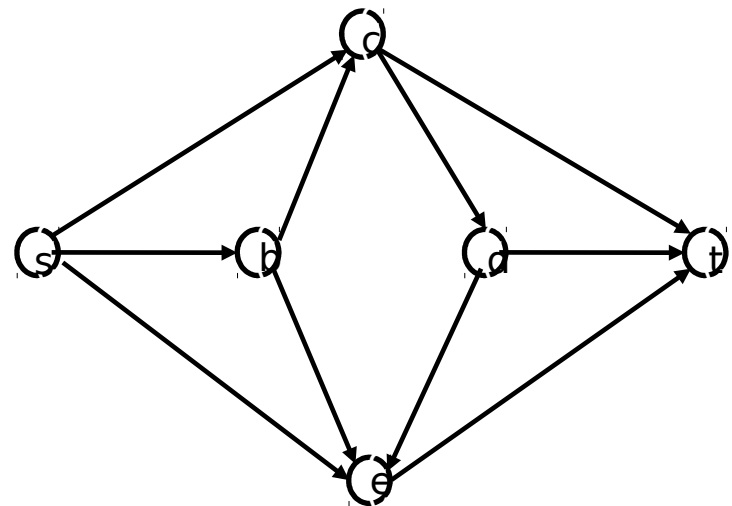
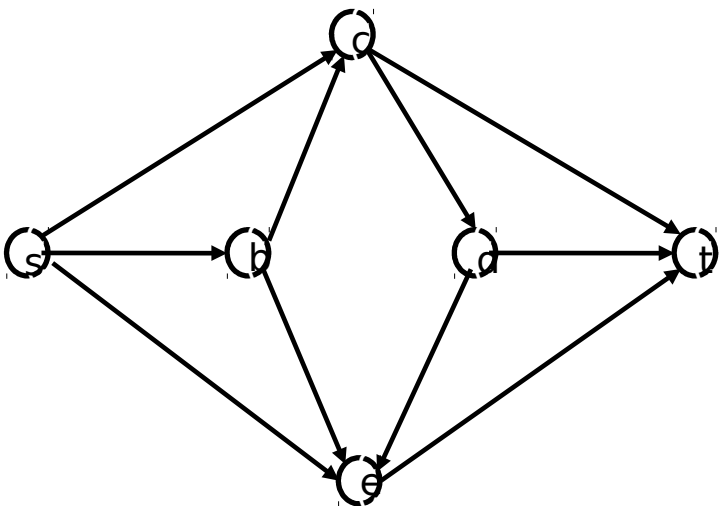
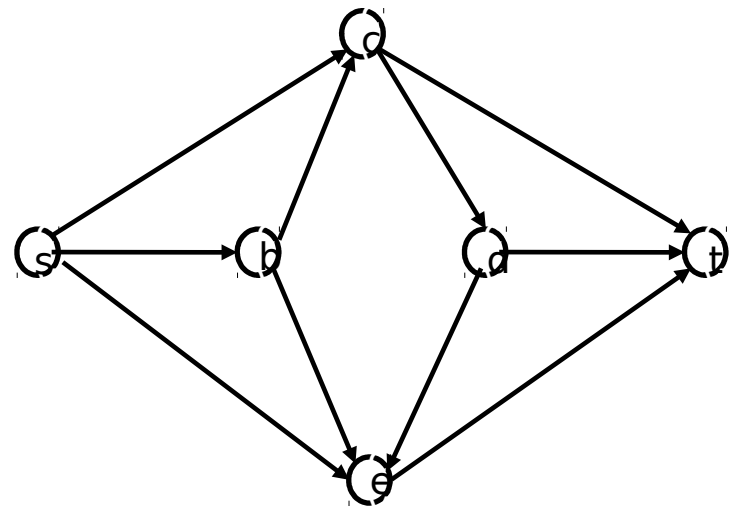
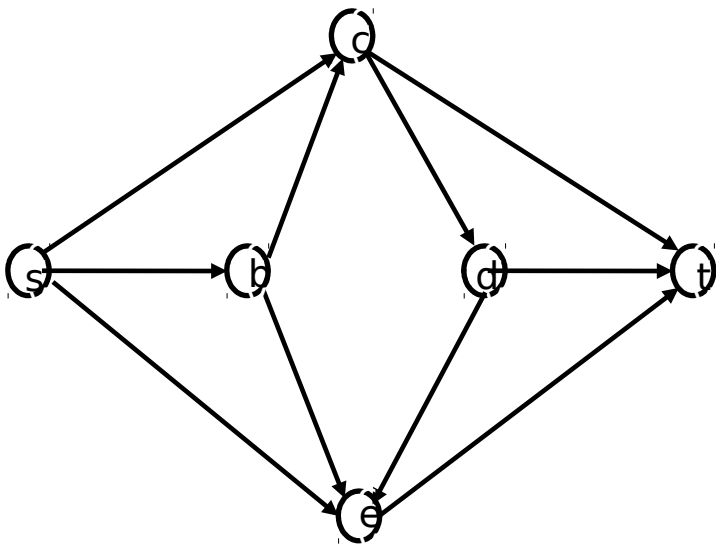
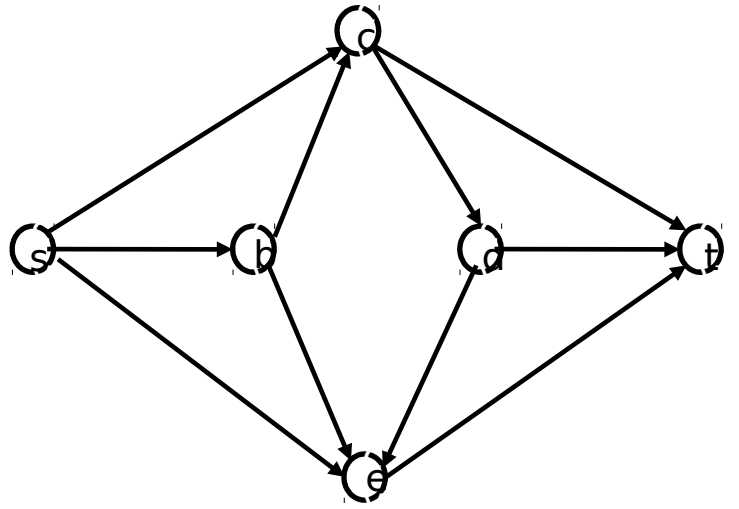
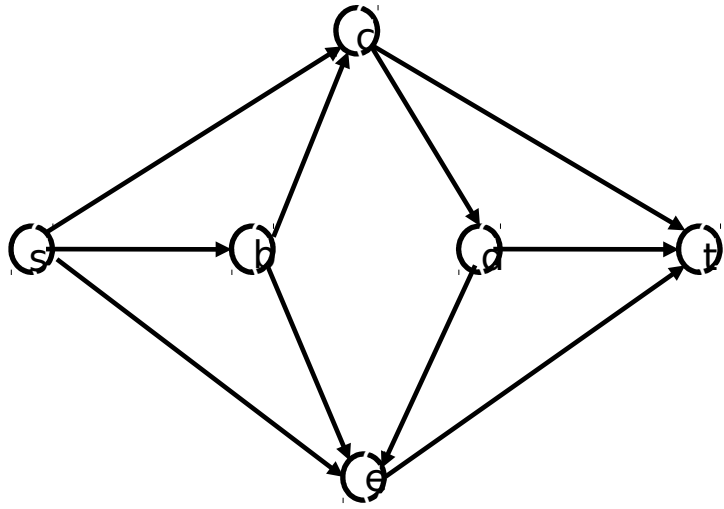
a) Si consideri la seguente rete di flusso e la funzione di flusso i cui valori sono indicati a sinistra delle capacità degli archi.

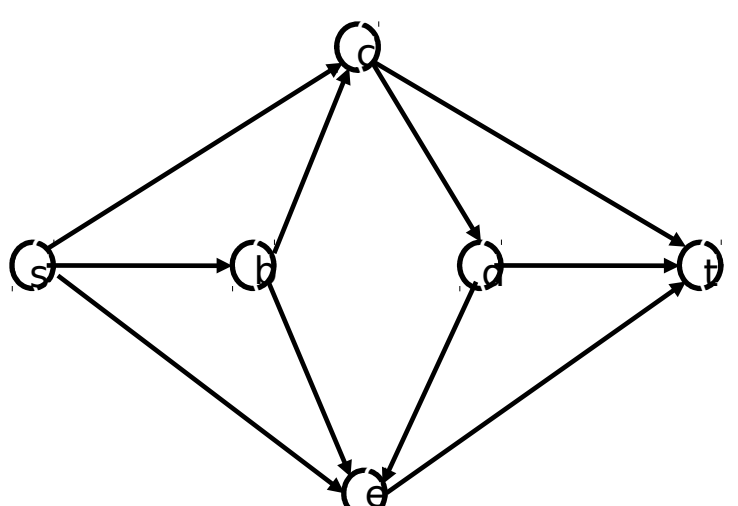
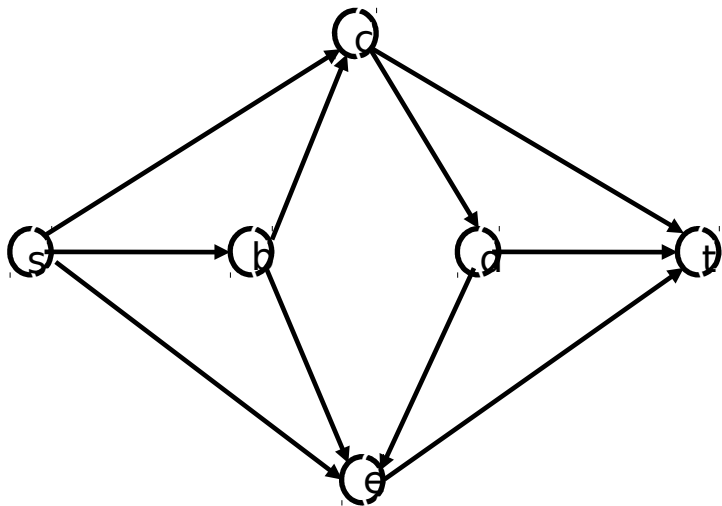
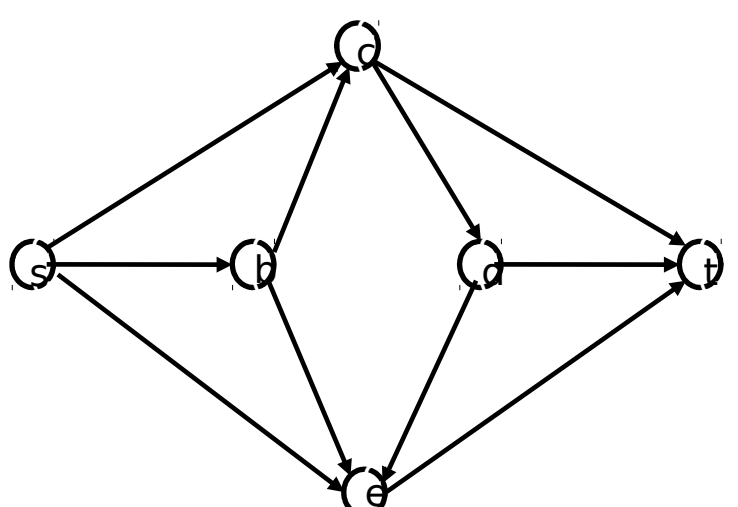
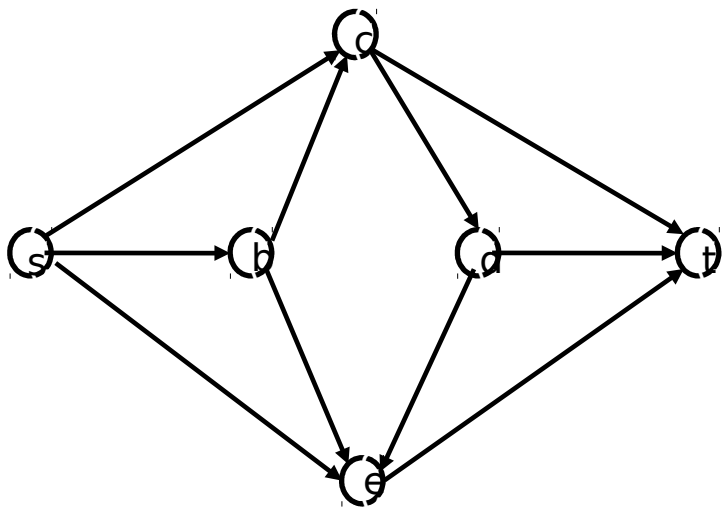
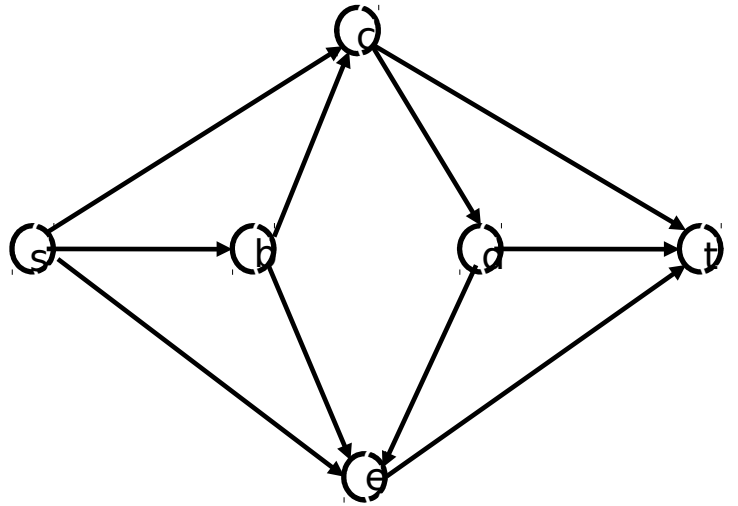
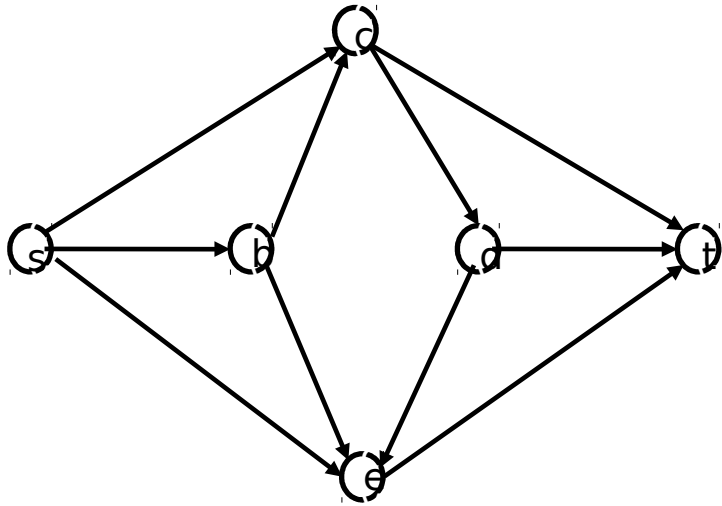
- Si disegni la rete residua rispetto alla funzione flusso indicata e si dica se questa funzione ha valore massimo.
- Nel caso in cui la funzione non abbia valore massimo, si fornisca la funzione flusso con valore massimo applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson **a partire dalla funzione di flusso data. Per ogni iterazione dell'algoritmo, occorre disegnare la rete residua all'inizio di quell'iterazione, indicare il cammino aumentante scelto e mostrare il flusso associato ad ogni arco della rete di flusso originaria al termine di quella iterazione**
- Si dica qual è il valore del massimo flusso e si fornisca un taglio di capacità minima.

**N.B.:** le risposte che non sono ottenute a partire dalla funzione di flusso data non saranno valutate.



Per vostra comodità, di seguito sono riportate diverse copie della rete di flusso, suddivise a coppie. **A partire dalla funzione di flusso data, usate l'immagine di sinistra di ciascuna coppia per disegnare la rete residua e l'immagine di destra per riportare i valori della funzione flusso assegnati a ciascun arco.** Ovviamente potrebbe essere necessario aggiungere e/o cancellare (con una x) archi nelle immagini di sinistra. Il numero di coppie non è indicativo del numero di iterazioni effettuate dall'algoritmo di Ford-Fulkerson. Procedete dall'alto verso il basso utilizzando solo le coppie di grafi che vi servono per illustrare l'intera esecuzione dell'algoritmo.





b) Si descriva il comportamento dell'algoritmo di Ford-Fulkerson e degli algoritmi da esso invocati specificando l'input e l'output sia dell'algoritmo di Ford-Fulkerson che degli altri algoritmi. Non è ne' necessario ne' sufficiente fornire lo pseudocodice.

c) Si analizzi il tempo di esecuzione asintotico dell'algoritmo di Ford-Fulkerson nel caso in cui le capacità siano degli interi. **Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore è possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.**

**[Bonus]** Maria ama leggere e ogni pomeriggio legge un numero  $L$  di libri presi in prestito dalla biblioteca comunale. Maria vuole essere certa che durante l'anno avrà sempre a casa libri da leggere (che non ha ancora letto) ma vuole recarsi in biblioteca il minor numero di volte possibile. La biblioteca è aperta solo di mattina (prima che Maria cominci a leggere gli  $L$  libri) e solo in alcuni giorni dell'anno. I giorni di apertura sono numerati con interi da 1 ad  $n-1$ . Si tenga però presente che i giorni di apertura non sono necessariamente consecutivi e che il periodo che intercorre tra un'apertura e l'altra non è sempre lo stesso. Si assuma per semplicità che 1 sia associato al primo gennaio ed  $n-1$  all'ultimo giorno di apertura della biblioteca nell'anno. Il regolamento della biblioteca prevede che il numero di libri detenuti in prestito da una persona non possa superare un certo numero  $m$ . Questo numero è abbastanza grande da consentire a Maria di non rimanere mai senza nuovi libri da leggere tra l'uno e l'altro dei giorni di apertura della biblioteca e tra l'ultimo giorno di apertura della biblioteca e il 31 gennaio. Ogni volta che si reca in biblioteca, Maria restituisce solo i libri che ha già letto e ne prende in prestito di nuovi.

a) Descrivere un algoritmo greedy che consenta a Maria di recarsi in biblioteca il minor numero di volte. Si assuma che Maria prima del giorno 1 non abbia preso in prestito libri.



b) Si dimostri che la strategia greedy del vostro algoritmo è ottima.