Progettazione di Algoritmi
Anno Accademico 2016/2017
Appello del 10/7/2017

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

Spazio riservato alla correzione

1	2	3	4	Totale
/20	/35	/20	/25	/100

1.Grafi

a) Fornire lo pseudocodice un algoritmo ricorsivo che in O(n+m) trova l’ordinamento topologico di un DAG. **Occorre aggiungere allo pseudocodice anche le istruzioni che consentono di ottenere il tempo di esecuzione O(n+m) illustrando il significato delle strutture dati utilizzate dall’algoritmo. Se non si e` in grado di aggiungere queste istruzioni (pseudocodice NON descrizione), le si ometta tenendo conto che in questo caso si perderanno dei punti.**

b) Dimostrare che in un DAG c'e` almeno un nodo senza archi entranti.

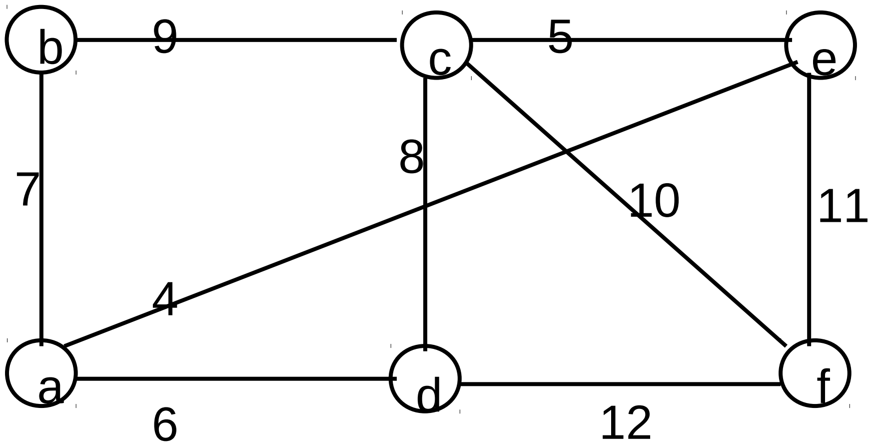
2. Algoritmi greedy

a) Si scriva lo **pseudocodice** dell'algoritmo di Prim che fa uso della coda a priorita` **con l'aggiunta delle istruzioni che consentono di costruire il minimo albero ricoprente**. **Si illustri il significato delle eventuali strutture dati utilizzate da queste istruzioni aggiuntive. Se non si e` in grado di aggiungere queste istruzioni (pseudocodice NON descrizione), le si ometta tenendo conto che in questo caso si perderanno dei punti.**

b) Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto nel caso in cui la coda e` implementata con un heap. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore e` possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.

c) Dire in quale passo dell'algoritmo viene effettuata la scelta greedy e perche' ogni volta questa scelta preserva la proprieta` che l'albero costruito fino a quel punto e` un sottoinsieme dello MST?

c) Si mostri l'esecuzione dell'algoritmo di Prim sul grafo riportato di seguito. Si assuma che il nodo **a** diventi la radice dell'albero. Per ciascuna iterazione, occorre disegnare l'albero e il contenuto della coda a priorita` corrispondenti a quell'iterazione (per un totale di 6 alberi).



3. Programmazione dinamica

Si consideri la seguente formula

$OPT(0)= 0$
$OPT(j)= \min_{1\leq i\leq j} \{e_{i,j} + C+OPT(i-1)\}$ altrimenti

Ciascuno dei seguenti punti sara` valutato solo se si e` risposto in modo corretto ai punti che lo precededono.

a) Per quale problema la suddetta formula fornisce il valore della soluzione ottima? In cosa consiste una soluzione ottima per il suddetto problema?

b) Si completino le definizioni riportate di seguito.

$OPT(j)$= valore della soluzione ottima per l'insieme costituito da …

$e_{i,j}$ = errore minimo per l'insieme di punti ….

c) Si spieghi in modo chiaro come si arriva alla formula di cui al punto a) (riportata all'inizio della pagina precedente).

4. Massimo flusso

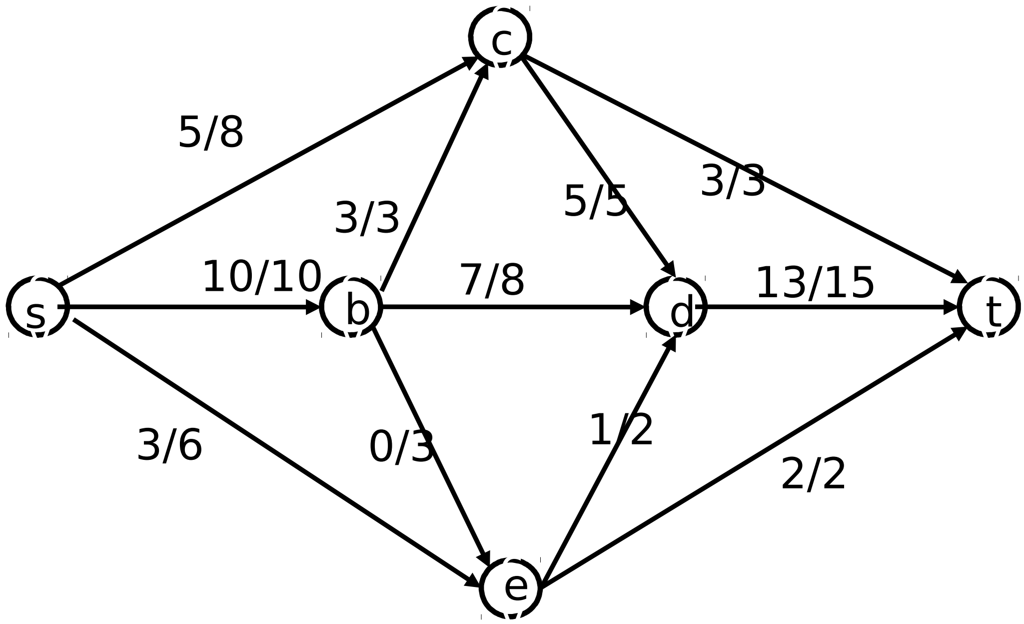
a) Si consideri la seguente rete di flusso e la funzione di flusso i cui valori sono indicati a sinistra delle capacita` degli archi.

i. Si disegni la rete residua rispetto alla funzione flusso indicata e **si dica se questa funzione ha valore massimo.**

ii. Nel caso in cui la funzione non abbia valore massimo, si fornisca la funzione flusso con valore massimo applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson **a partire dalla funzione di flusso data**. **Per ogni iterazione dell'algoritmo, occorre disegnare la rete residua all'inizio di quell'iterazione, indicare il cammino aumentante scelto e mostrare il flusso associato ad ogni arco della rete di flusso originaria al termine di quella iterazione**

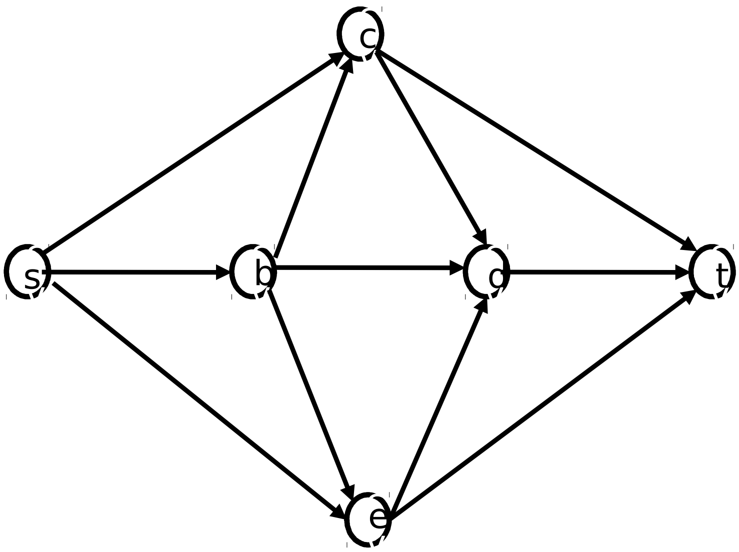
iii. Si dica qual e` il **valore del massimo flusso** e si **fornisca un taglio di capacita` minima.**

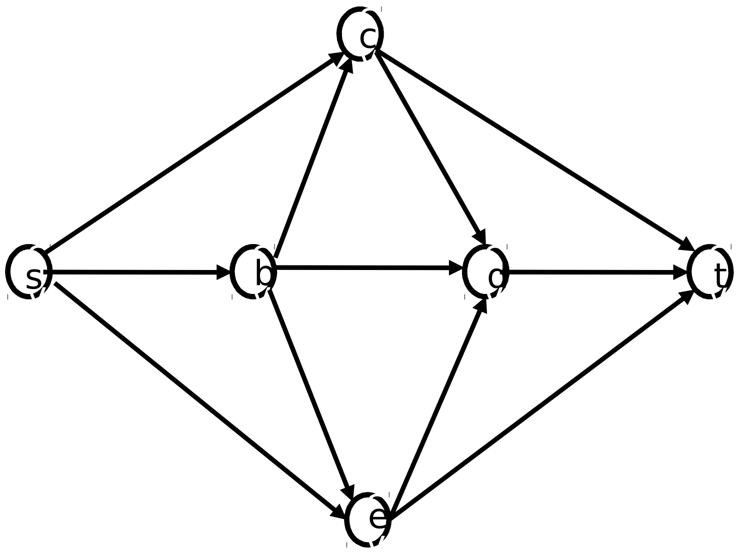
N.B.: le risposte che non sono ottenute a partire dalla funzione di flusso data non saranno valutate.

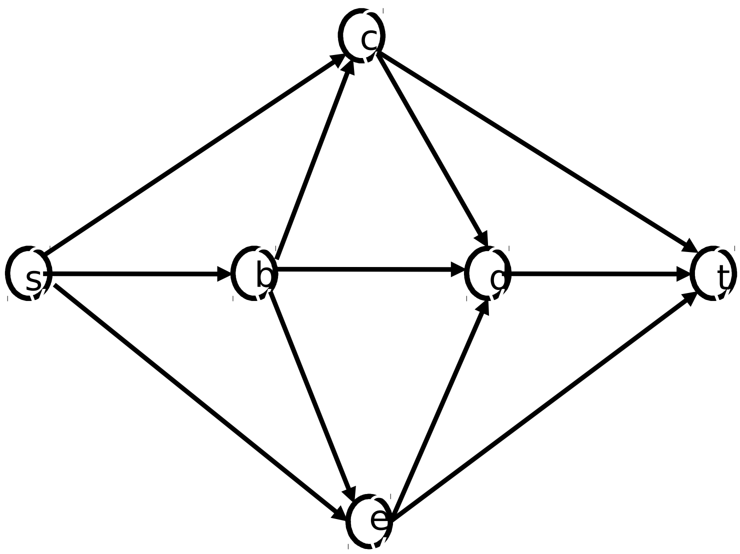


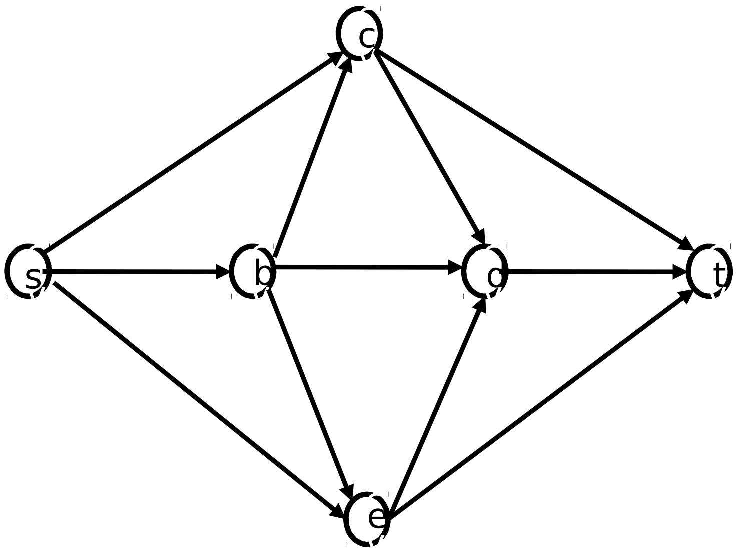
Per vostra comodita`, di seguito sono riportate diverse copie della rete di flusso, suddivise a coppie. **A partire dalla funzione di flusso data, usate l'immagine di sinistra di ciascuna coppia per disegnare la rete residua e l'immagine di destra per riportare i valori della funzione flusso assegnati a ciascun arco.** Ovviamente potrebbe essere necessario aggiungere e/o cancellare (con una x) archi nelle immagini di sinistra. Il numero di coppie non e` indicativo del numero di iterazioni effettuate dall'algoritmo di Ford-Fulkerson. Procedete dall'alto verso il basso utilizzando solo le coppie di grafi che vi servono per illustrare l'intera esecuzione dell'algoritmo.

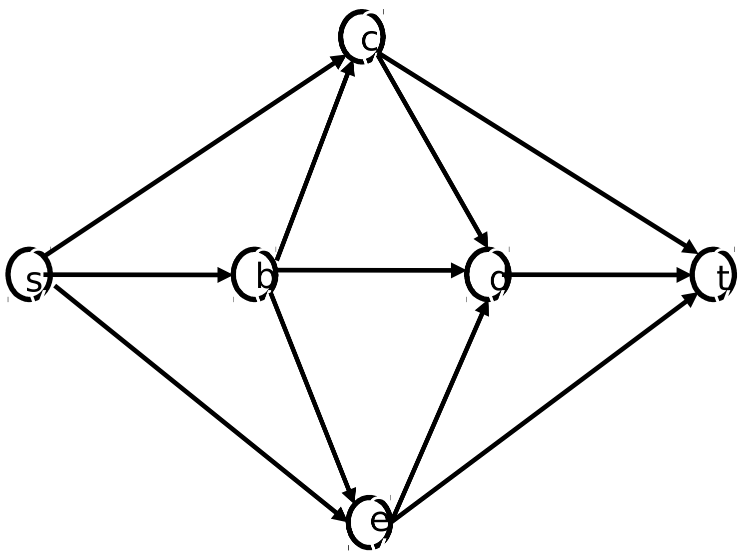
Progettazione di Algoritmi
Anno Accademico 2016/2017
Appello del 10/7/2017

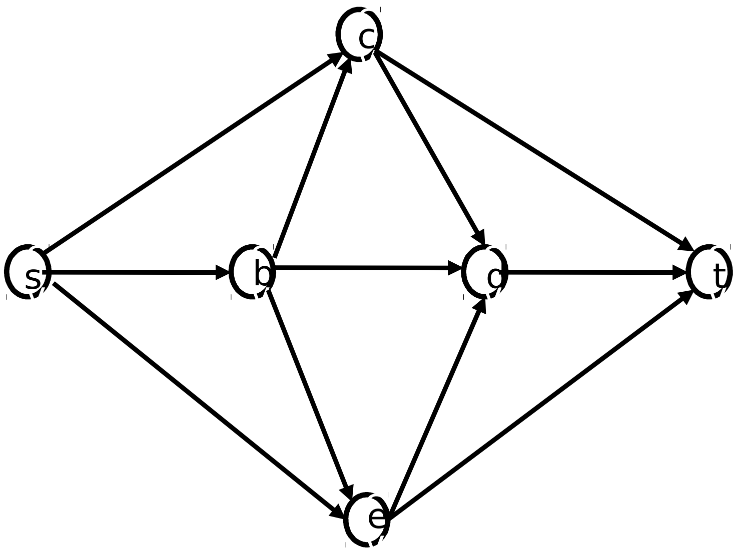


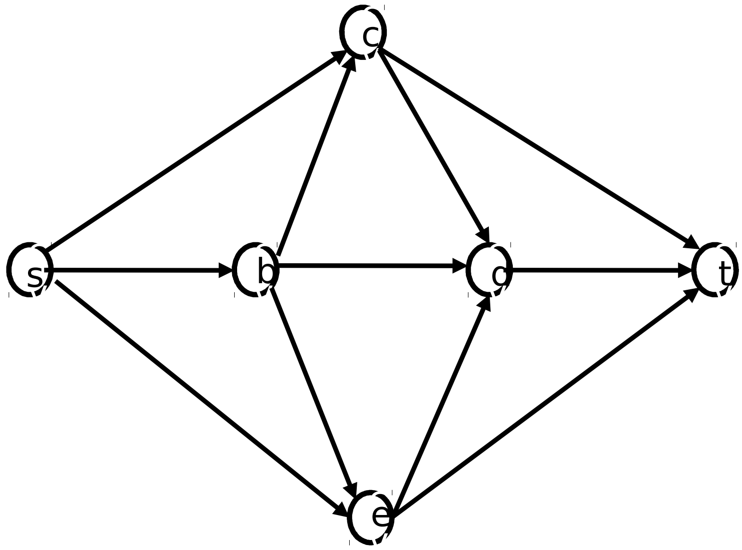


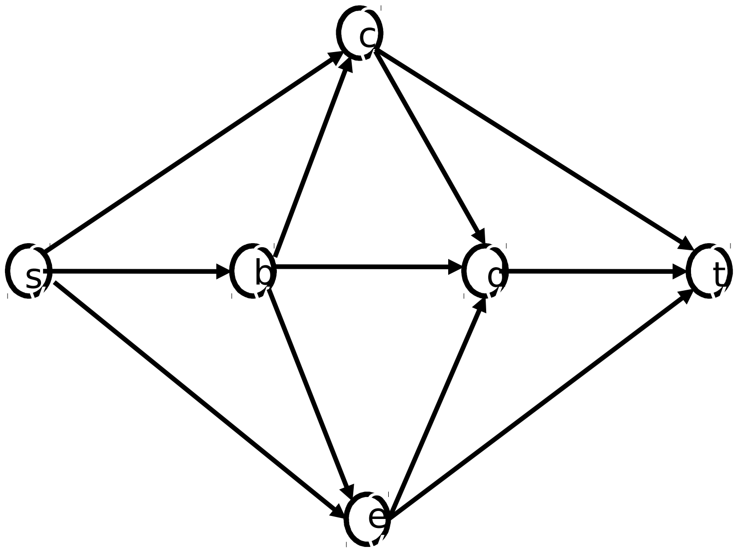


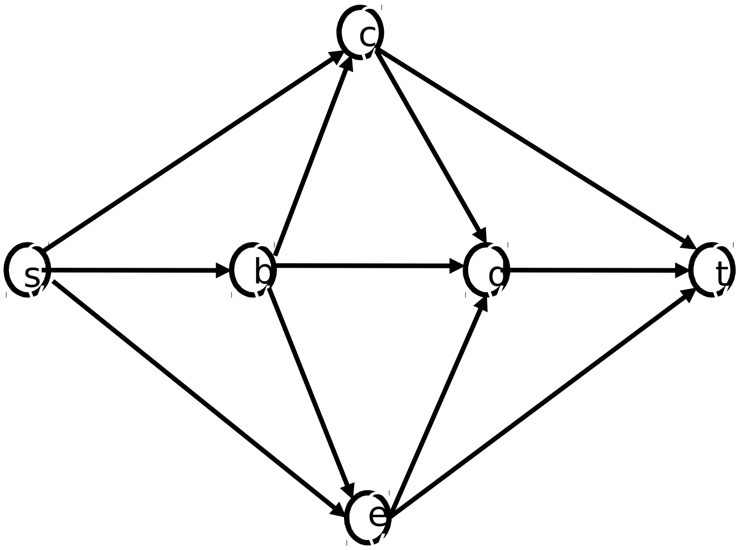


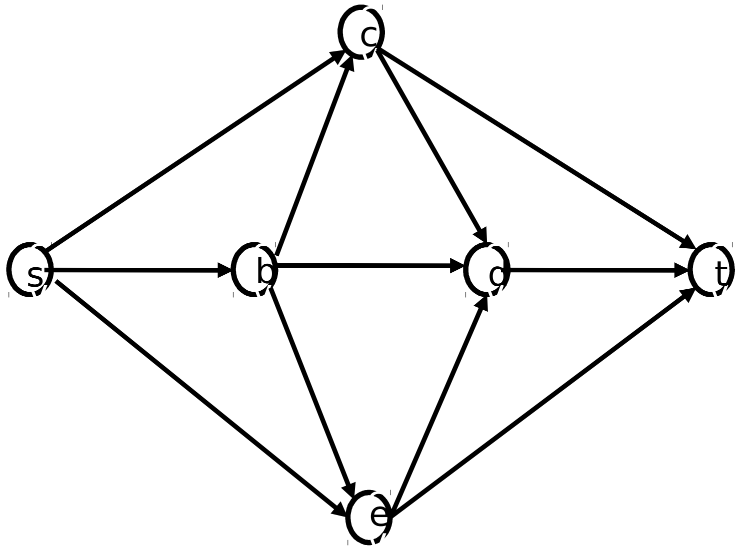


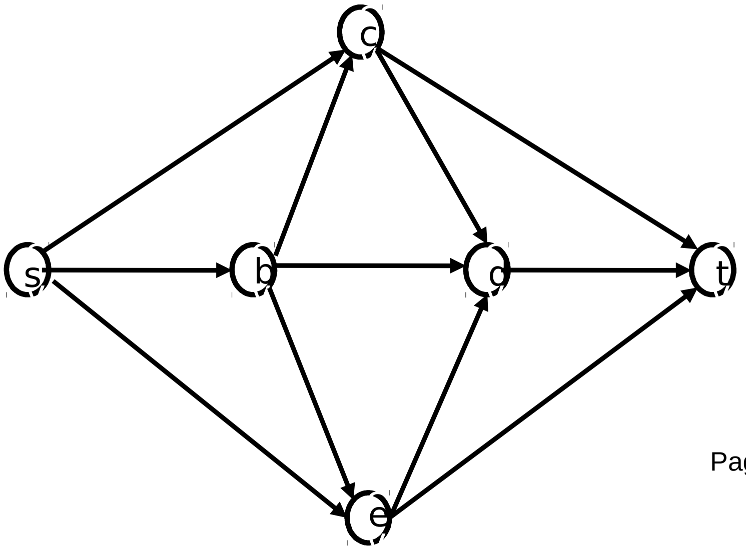


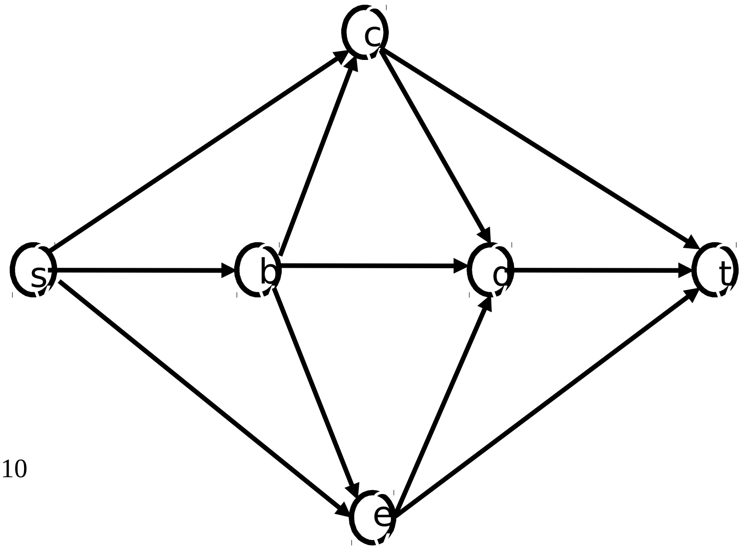

c
s
b
d
t
e


c
s
b
d
t
e


c
s
b
d
t
e


c
s
b
d
t
e


c
s
b
d
t
e


c
s
b
d
t
e

b) Si dimostri che se non esistono cammini aumentanti nella rete residua di G rispetto al flusso f allora f e` massimo.

c) Si dimostri che se non esistono cammini aumentanti nella rete residua di G rispetto al flusso f allora esiste un taglio s-t (A,B) tale che cap(A,B)=v(f)