Applicazioni del Massimo flusso

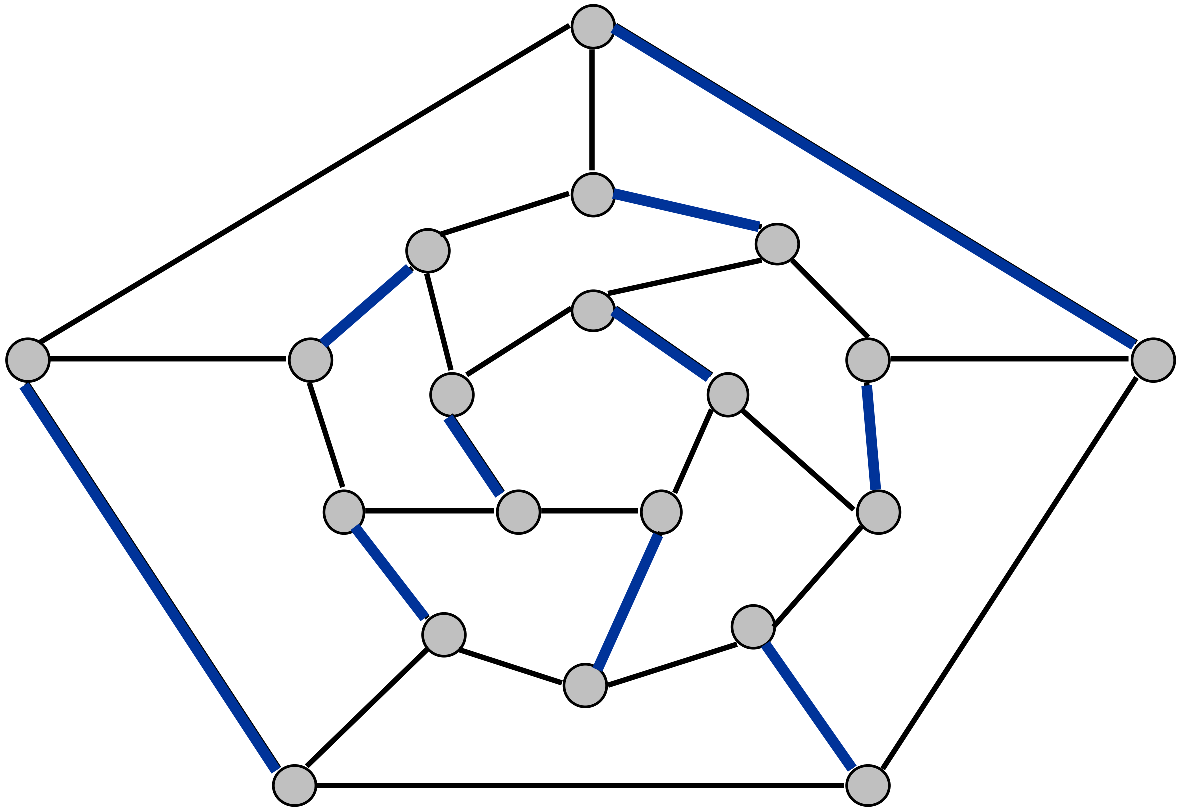
Progettazione di Algoritmi a.a. 2015-16

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

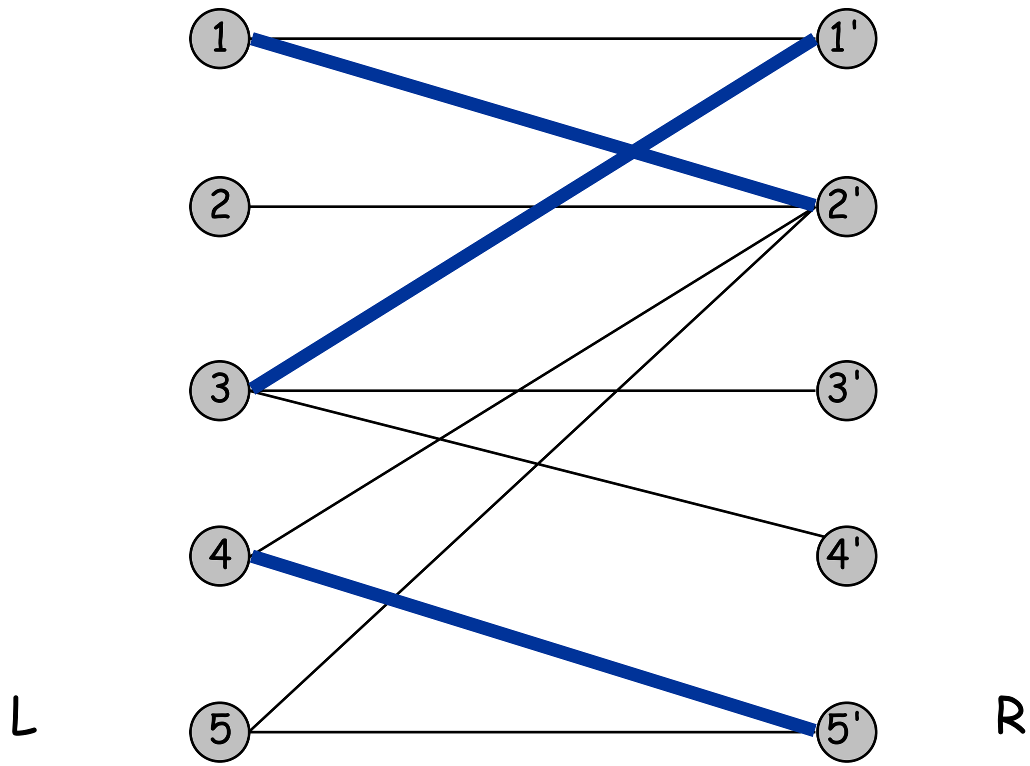
Matching bipartito

- Problema del max matching.
  - Input: grafo non direzionato $G = (V, E)$.
  - $M \subseteq E$ e\` un matching se ogni nodo appare in al piu\` un un arco di M.
  - Max matching: trova un matching di cardinalita\` massima.



Matching bipartito

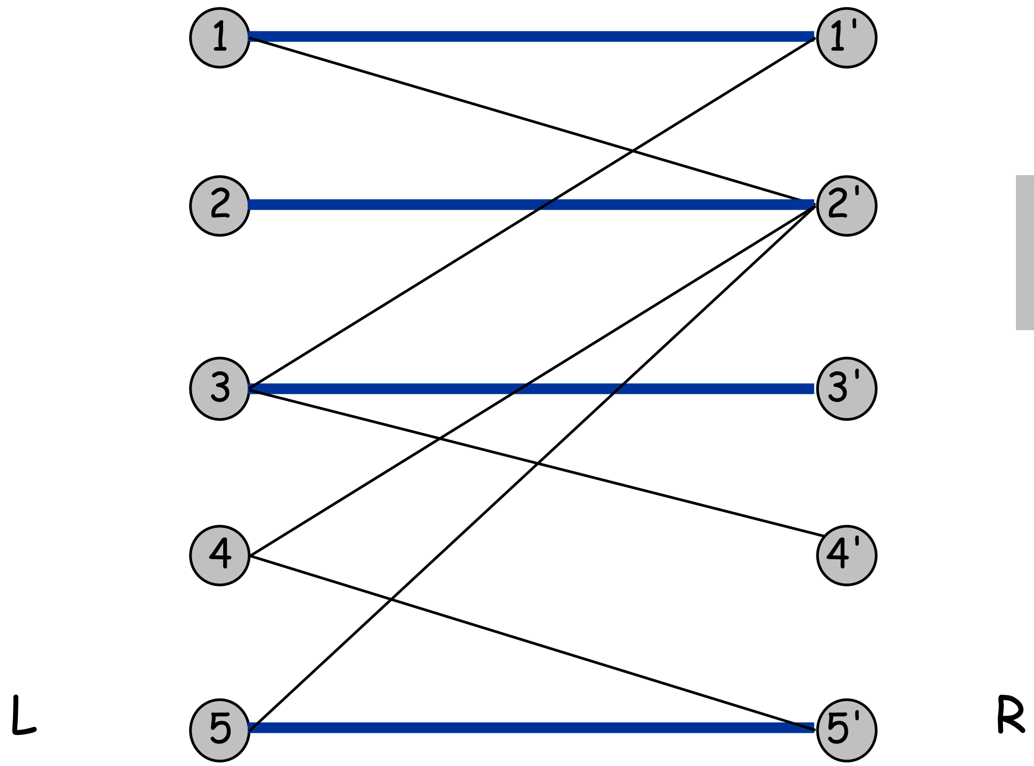
- Problema del max matching bipartito.
  - Input: grafo non direzionato bipartito $G = (L \cup R, E)$.
  - $M \subseteq E$ e` un matching se ogni nodo appare in al piu` un arco di M.
  - Max matching bipartito: trova un matching di massima cardinalita`.



matching

1-2', 3-1', 4-5'

Matching bipartito

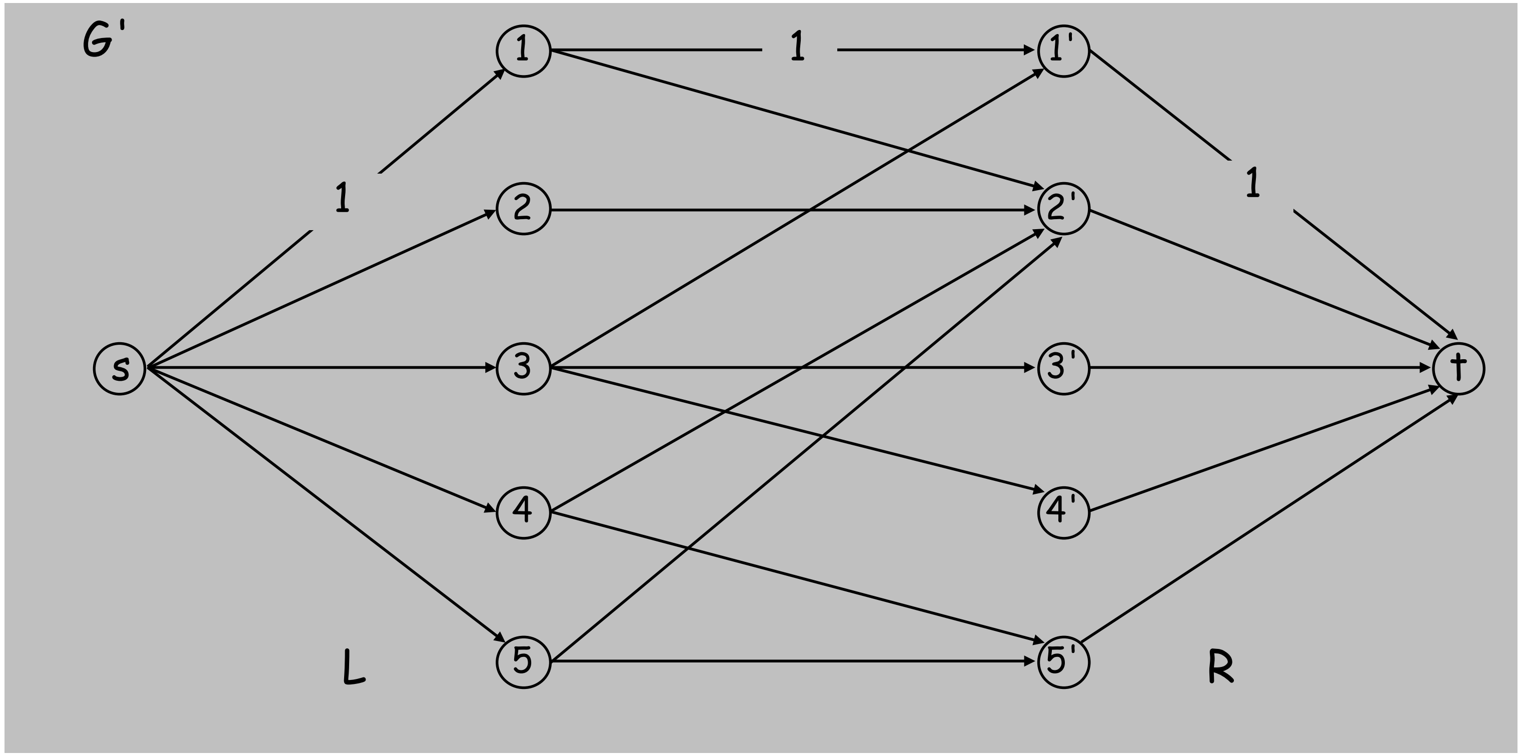


max matching

1-1', 2-2', 3-3' 5-5'

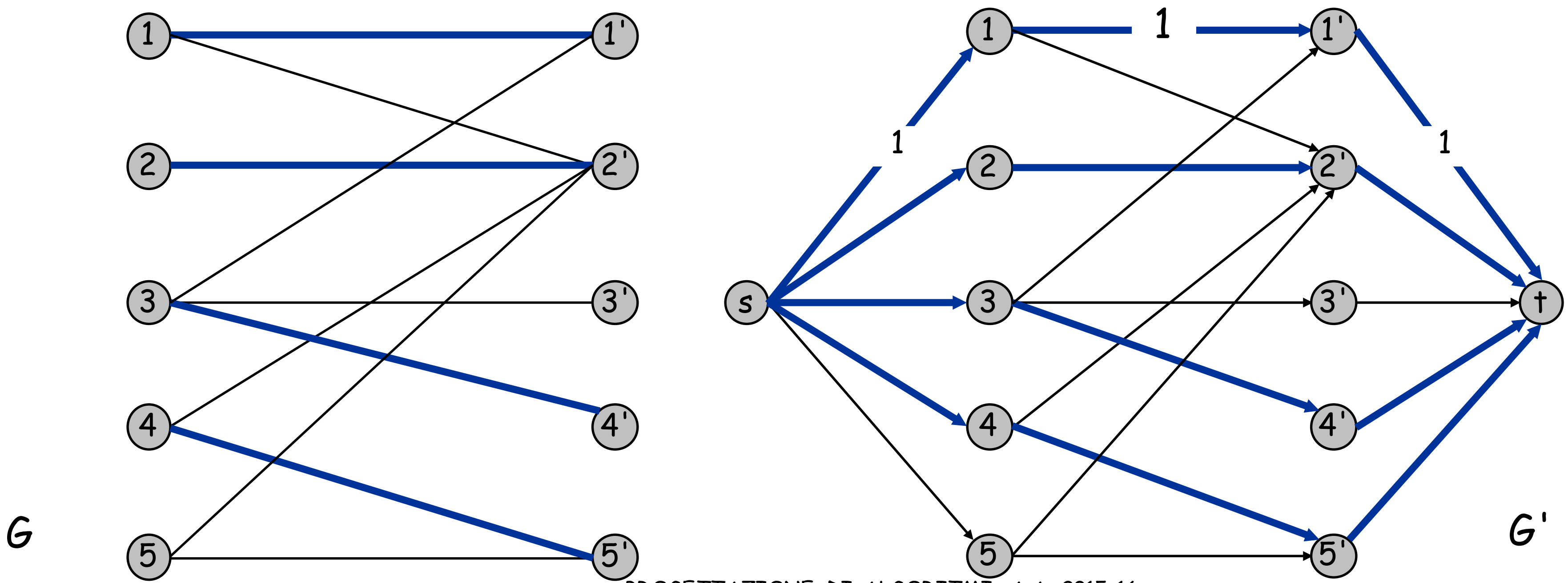
Matching Bipartito

- Formulazione in termini del max flusso.
  - Crea un grafo direzionato $G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$.
  - Orienta gli archi tra L ad R da L verso R, e assegna capacita` pari ad uno a questi archi.
  - Aggiungi un arco con capacita` uno da s a ciascun nodo di L.
  - Aggiungi un arco con capacita` uno da ciascun nodo di R a t.



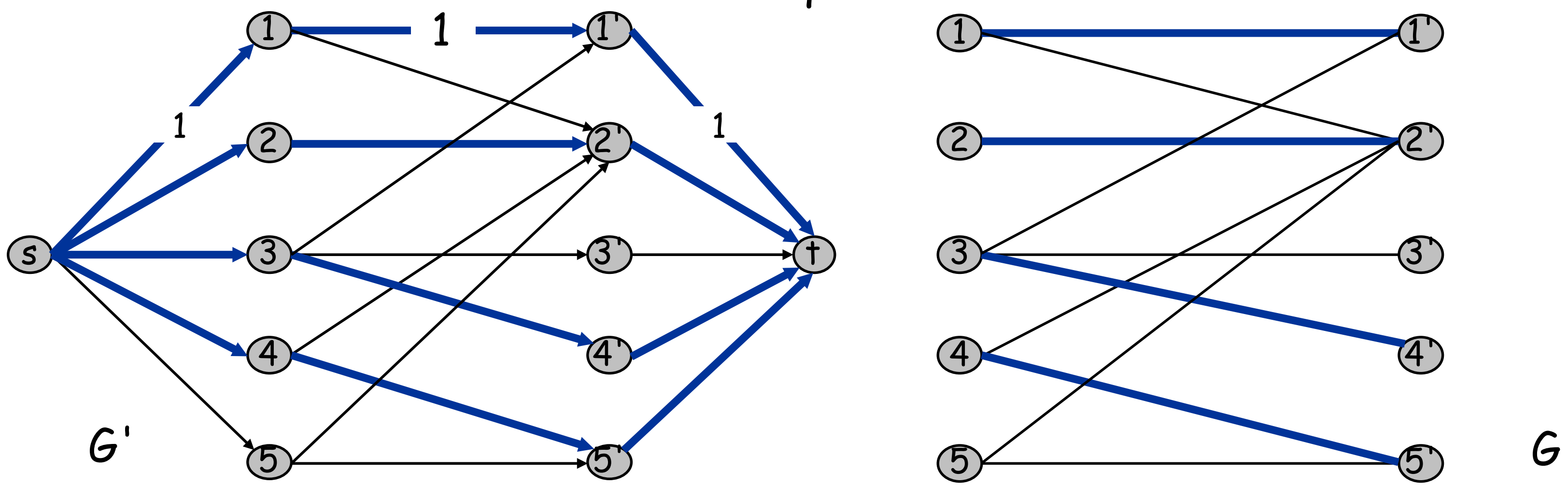
Matching Bipartito

- Teorema. La cardinalita` del max matching in G = Valore del max flusso in G'.
- Dim. Dimostriamo prima che max matching ≤ max flusso
  - Sia M un max matching e sia k la sua cardinalita.
  - Consideriamo la funzione flusso f che invia 1 unita` lungo ciascuno dei k percorsi che passano per i k archi di G' corrispondenti agli archi di G in M.
    - Per ogni arco (i,j') in M, f assegna 1 agli archi (s,i), (i,j'), (j',t) di G'
  - f soddisfa le proprieta` del flusso e ha valore k



Matching bipartito

- Dimostriamo che valore dimensione max matching ≥ max flusso
  - Sia f un massimo flusso di G' e sia k il suo valore.
  - Capacita` degli archi =1 ⇒ k e` intero ed esiste f di valore k tale che f(e) intero (0 o 1) per ogni e.
  - Consideriamo l'insieme di archi M = {e=(u,v): u in L, v in R, f(e)=1}
  - Consideriamo il taglio (L ∪ s, R ∪ t). Lemma del valore del taglio → |M|=k
  - Ciascun nodo di L ed R e` contenuto in al piu` un arco.
    - Se u e` in L allora in u arriva flusso 0 o 1 da s. Per la conservazione del flusso da u esce questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con origine u attraverso il quale fluisce 1 unita` di flusso.
    - Se u e` in R allora da u fuoriesce flusso 0 o 1 verso t. Per la conservazione del flusso in v entra questa stessa quantita` di flusso e quindi c'e` al piu` un arco con destinazione v attraverso il quale fluisce 1 unita` di flusso.



Matching bipartito

- Possiamo trovare il max matching di un grafo bipartito G eseguendo Ford-Fulkerson sul grafo G' ottenuto a partire da G. Il max matching e` ottenuto come illustrato nella seconda parte della dimostrazione del teorema precedente.

- Tempo di esecuzione: $O(nm)$ in quanto la capacita` di ogni arco di $G'$ e` al piu` $C=1$ e di conseguenza $O(nmC)=O(nm)$

Matching perfetti

- Def. Un matching $M \subseteq E$ e` **perfetto** se ciascun nodo appare esattamente in un arco di M.

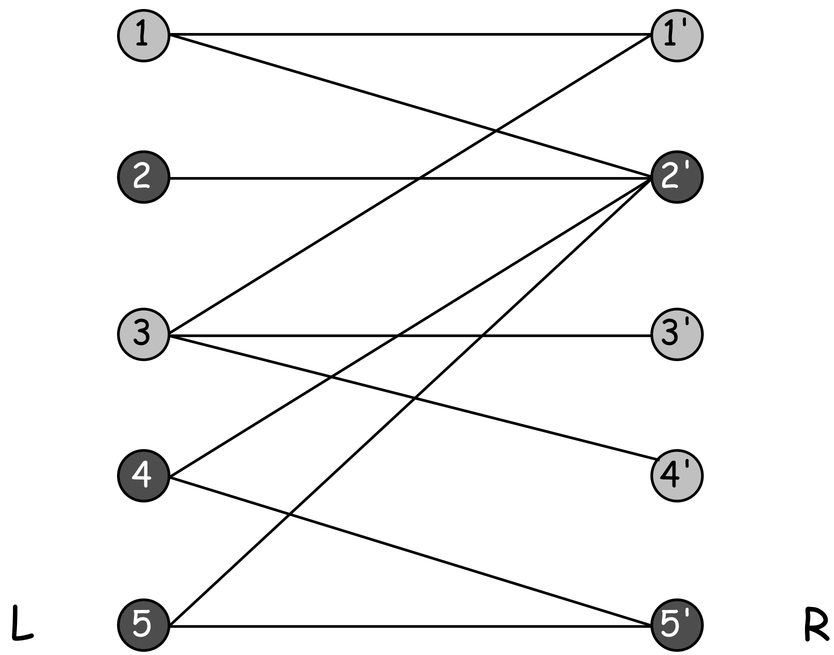
- Domanda. Quando un grafo bipartito ha un matching perfetto?

- Struttura dei grafi bipartiti con matching perfetti.
  - Ovviamente deve essere $|L| = |R|$.
  - Quali altre condizioni sono necessarie?
  - Quali condizioni sono sufficienti?

Matching Perfetto

- Notazione. Sia S un sottoinsieme di nodi di L. Indichiamo con N(S) l'insieme dei nodi di R adiacenti ai nodi di S.

- Osservazione. Se un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ ha un matching perfetto allora $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.
- Dim. Ciascun nodo in S deve essere accoppiato ad un nodo differente in N(S).



<u>Nessun matching perfetto:</u>

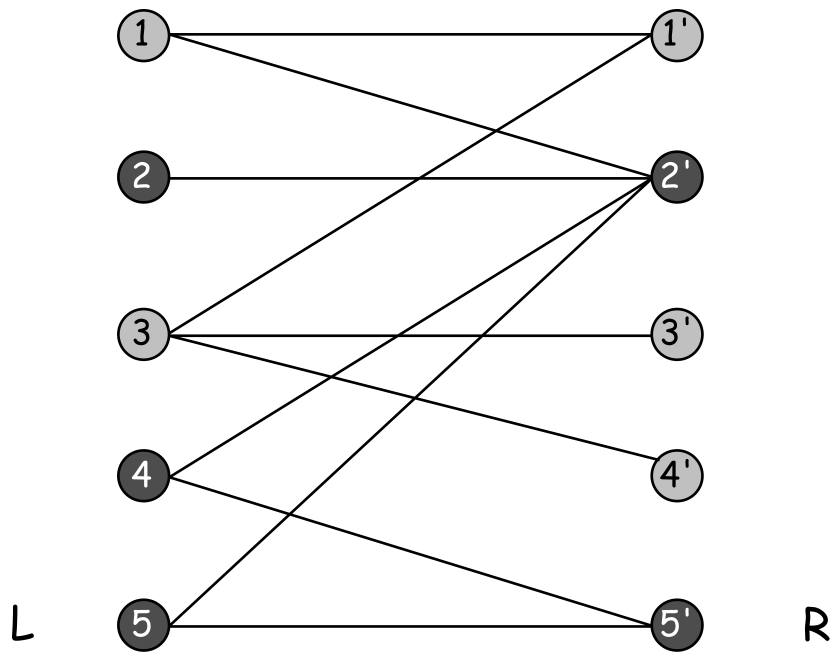
S = { 2, 4, 5 }

N(S) = { 2' , 5' }.

Teorema dei matrimoni

- Il teorema dei matrimoni. [Frobenius 1917, Hall 1935] Sia $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito con $|L| = |R|$. G ha un matching perfetto se e solo se $|N(S)| \geq |S|$ per tutti i sottoinsiemi $S \subseteq L$.

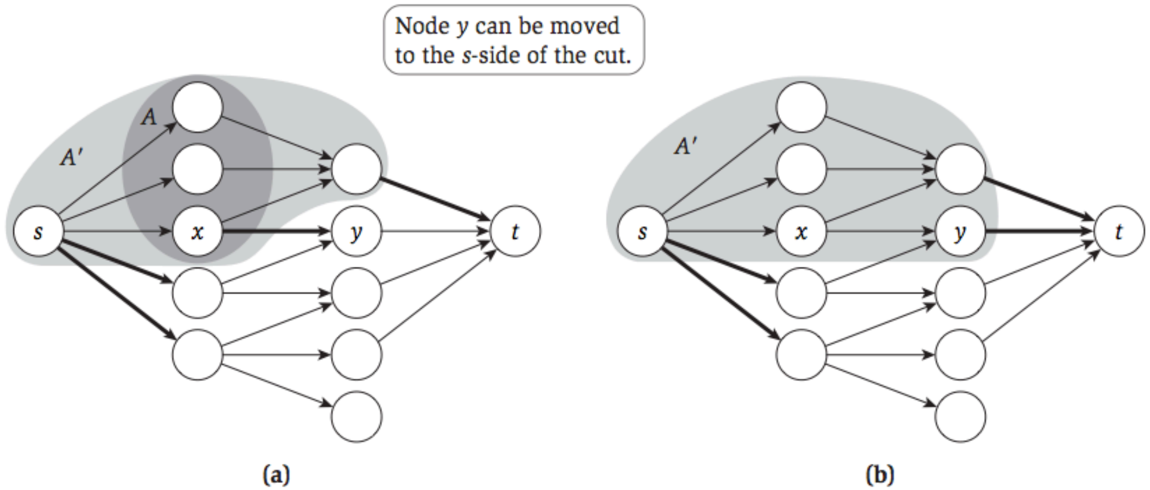
- Dim. L'implicazione $\Rightarrow$ l'abbiamo gia` dimostrata nella slide precedente.



No perfect matching:
S = { 2, 4, 5 }
N(S) = { 2', 5' }.

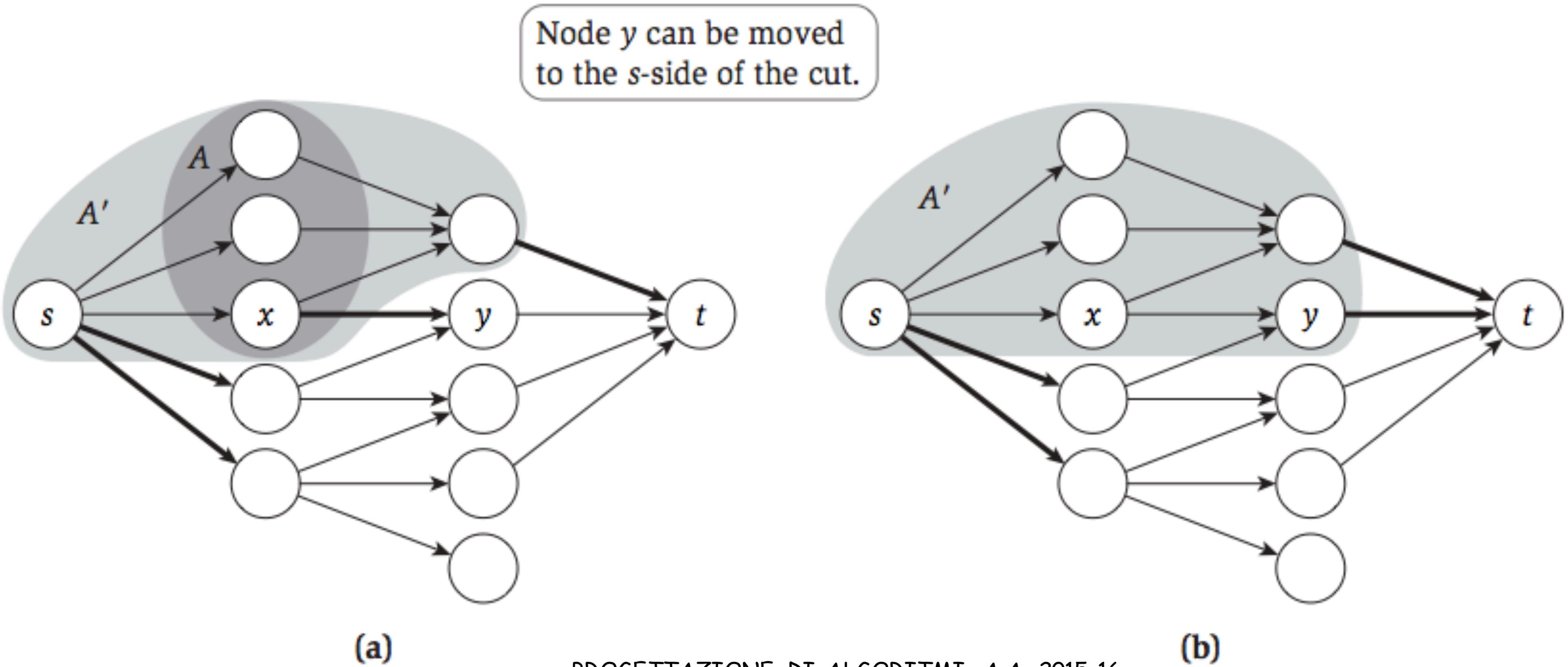
Teorema dei matrimoni

- Dimostriamo l'implicazione $\Leftarrow$
- Supponiamo G non abbia un matching perfetto. Questo vuol dire che il max matching ha dimensione < |L|
  - Costruiamo la rete di flusso G' nello stesso modo di prima. Sia (A, B) un minimo taglio di G'. Teorema del Max Flusso-Min Taglio → cap(A,B)<|L|
  - Definiamo $L_A = L \cap A$, $L_B = L \cap B$, $R_A = R \cap A$.
  - Possiamo trasformare (A,B) in un altro taglio minimo (Z,W) in cui $N(L_Z) \subseteq Z$. Per far questo aggiungiamo ad A ciascun nodo di $N(L_A)$ che si trova in B. Sia y un tale nodo. Ovviamente in G' y ha un arco uscente che finisce in t e almeno un arco entrante che parte da un nodo x di L_A. Portando y in A, la nuova capacita` del taglio e` ottenuta aggungendo c(y,t)=1 e sottraendo almeno c(x,y)=1. Di conseguenza la capacita` del taglio non aumenta.



Teorema dei matrimoni

- Il nuovo taglio (Z,W) e` tale che non ci sono archi uscenti da Z che hanno come origine un nodo di L_Z. Ne consegue che tutti gli archi uscenti hanno come origine s e destinazione un nodo in L_W oppure hanno come origine un nodo in R_Z e come destinazione t. Si ha quindi $cap(Z, W) = |L_W| + |R_Z|$.
- Inoltre si ha che $N(L_Z) \subseteq R_Z$ per cui
- $|N(L_Z)| \leq |R_Z| = cap(Z, W) - |L_W| < |L| - |L_W| = |L_Z|$.
- Abbiamo trovato un insieme L_Z che e` piu` grande di $N(L_Z)$. Cio` contraddice l'ipotesi che ogni per sottoinsieme S di L si ha $|N(S)| \geq |S|$



Percorsi disgiunti

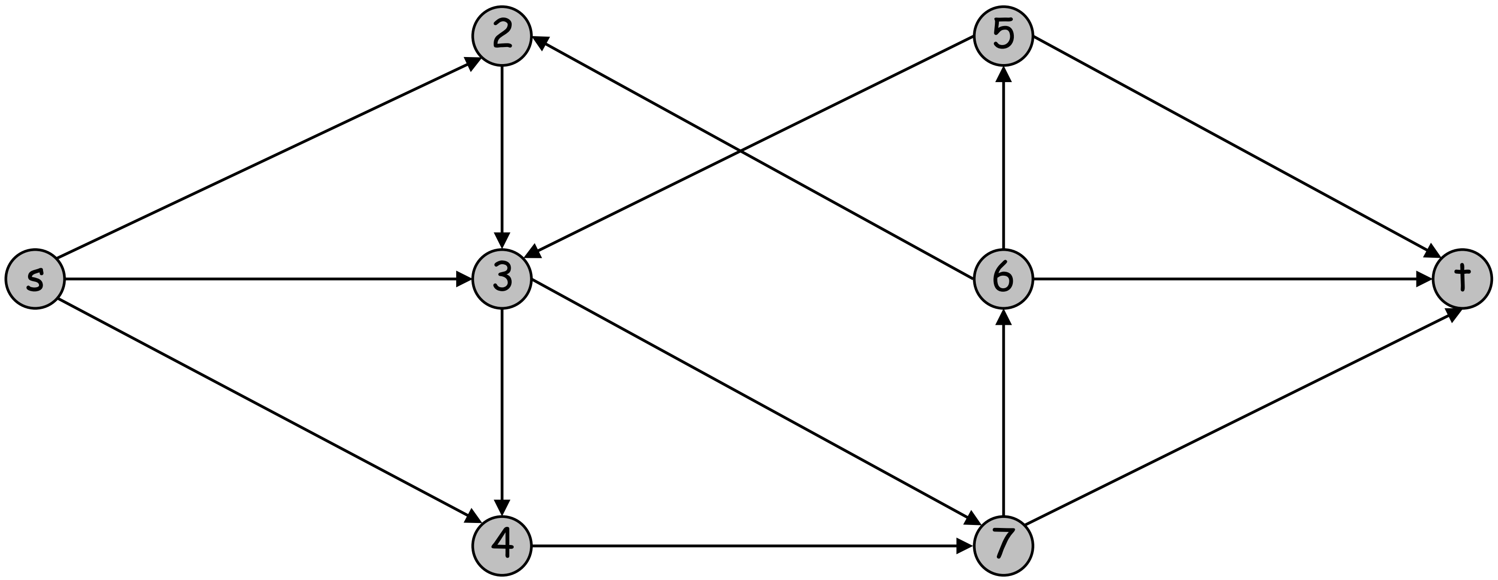
Percorsi senza archi in comune

- Def. Due percorsi vengono detti disgiunti se non hanno archi in comune

- Il problema dei percorsi disgiunti. Dato un grafo direzionato e due nodi s e t, trovare il massimo numero di percorsi da s a t senza archi in comune.

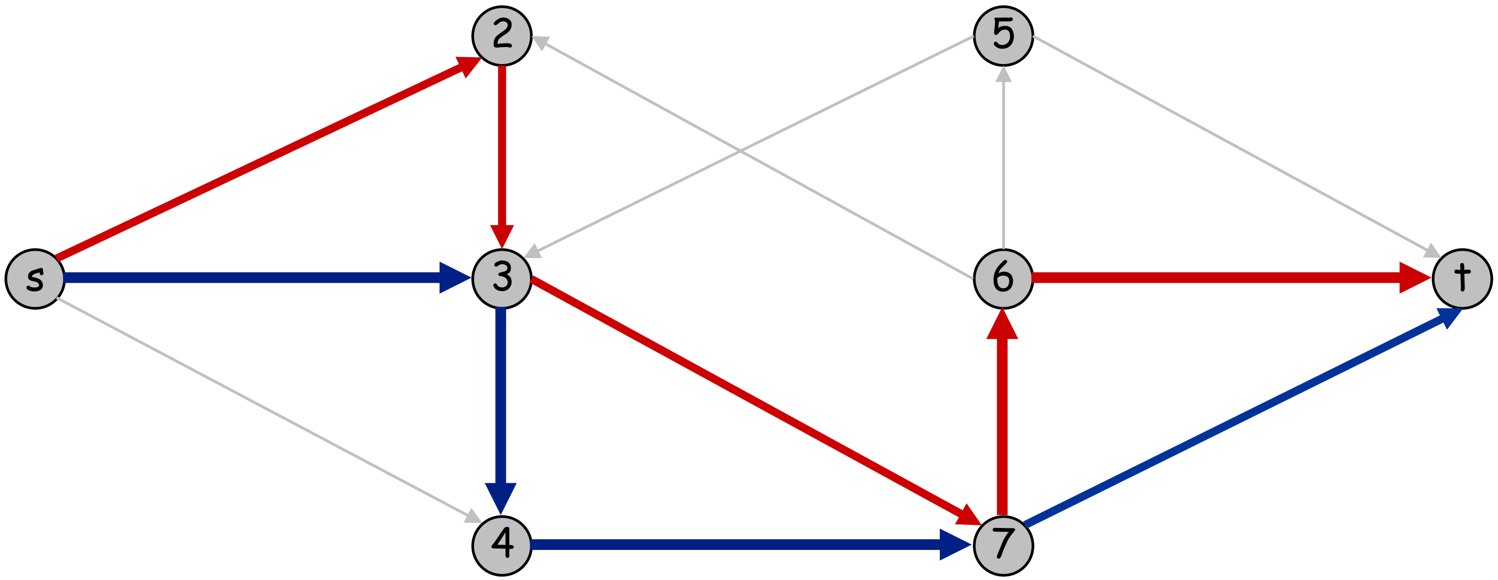
-

Esempio: reti di comunicazione



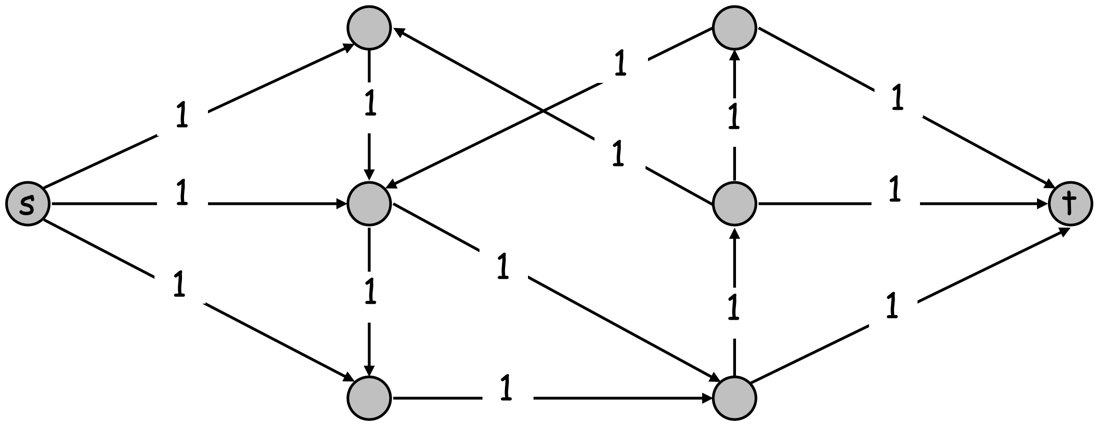
Percorsi senza archi in comune

- Esempio: questi sono percorsi disgiunti nell'esempio precedente



Percorsi senza archi in comune

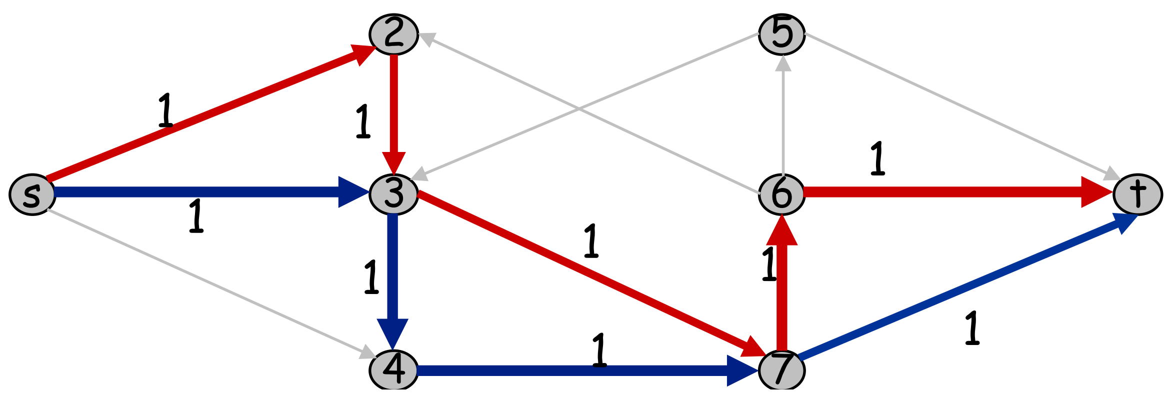
- Formulazione in termini di max flusso: assegnamo flusso pari ad 1 ad ogni arco.



- Teorema. Sia dato un grafo direzionato G e siano s e t due nodi di G. Il massimo numero di percorsi disgiunti da s a t in G e\` uguale al valore del max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita\` 1 agli archi di G.
- Dim. Dimostriamo ≤
  - Supponiamo che ci siano k percorsi disgiunti $P_1, \ldots, P_k$.
  - Poniamo f(e) = 1 se e compare su qualche percorso P_i; altrimenti poniamo f(e) = 0.
  - Siccome i percorsi sono disgiunti allora f e\` un flusso (conservazione del flusso soddisfatta) e ha valore k (k distinti archi e uscenti da s con f(e)=1)

Percorsi disgiunti

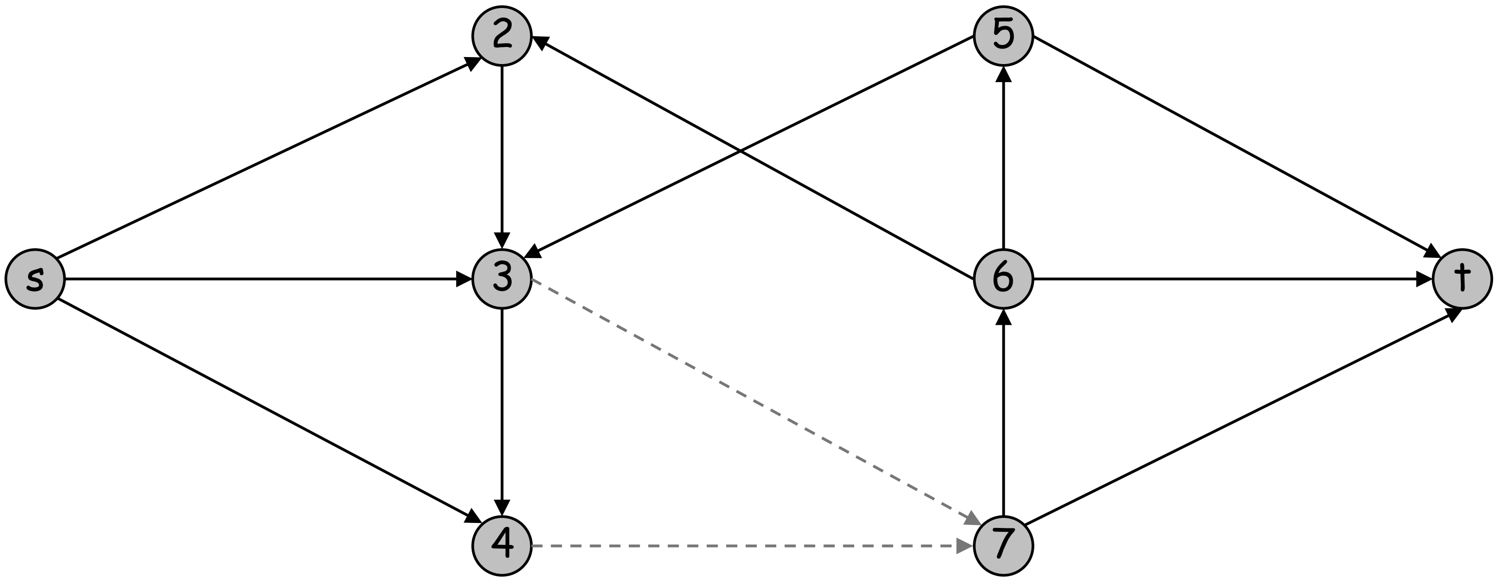
- Dimostriamo ≥
  - Supponiamo che il max flusso abbia valore k.
  - Siccome capacita` sono interi uguali ad 1 $\Rightarrow$ esiste una funzione flusso f che assegna valori interi (0 o 1) ad ogni arco e ha valore k.
  - Consideriamo un arco (s, u) con f(s, u) = 1.
    - Per la conservazione del flusso esiste un arco (u,v) per cui f(u,v)=1. Per lo stesso motivo esiste un arco (v,z) per cui f(v,z)=1. E cosi` via.
    - In questo modo possiamo individuare un percorso da s a t fatto di archi con flussi unitari.
  - Siccome il valore di f e` k allora da s escono k archi con flusso pari ad 1. Quindi con il procedimento descritto possiamo produrre k percorsi da s a t (non necessariamente semplici) che non hanno archi in comune (se li avessero non sarebbe soddisfatta la proprieta` sulla conservazione del flusso).



Connettivita` di una rete

- Connettivita` di una rete. Dato un grafo direzionato $G = (V, E)$ e due nodi s e t, trovare il minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s.

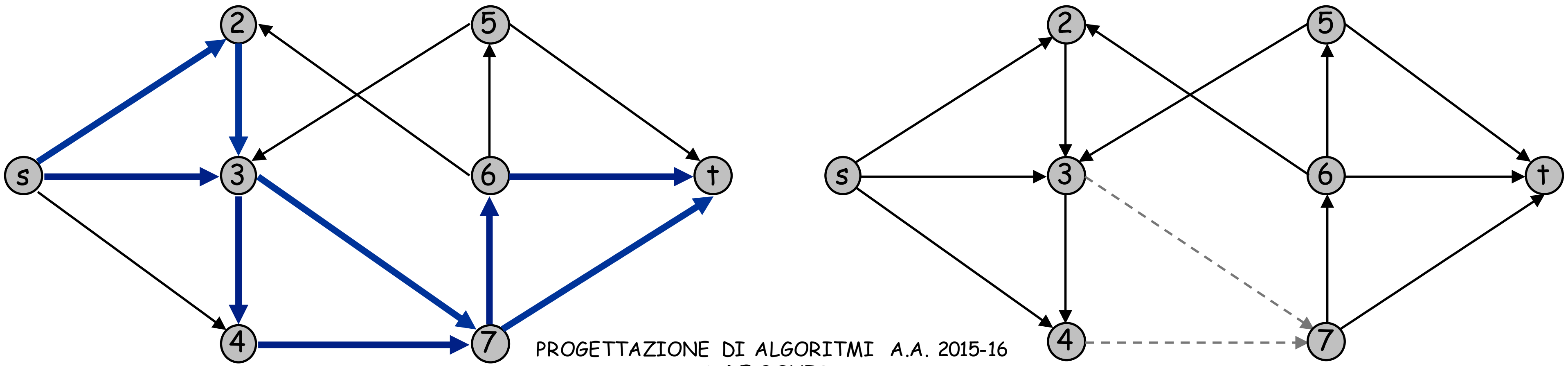
- Def. Un insieme di archi $F \subseteq E$ disconnette t da s se ogni percorso da s a t usa un arco di F.



Percorsi disgiunti e connetivita` di una rete

- **Teorema.** [Menger 1927] Sia G un grafo direzionato e siano s e t due nodi di G. Il max numero di percorsi disgiunti in G da s a t e` uguale al minimo numero di archi la cui rimozione disconnette t da s.

- Dim.
- Dimostriamo ≤
  - Supponiamo che la rimozione di $F \subseteq E$ disconnetta t da s e che $|F| = k$ → ciascun percorso da s a t usa almeno un arco in F.
  - Sia S un qualsiasi insieme di percorsi disgiunti da s a t. Ciascun arco di F e` usato da al piu` un percorso in S → $|S| \leq k$



Percorsi disgiunti e connetivita` di una rete

Dimostriamo ≥

- Supponiamo che il max numero di percorsi disgiunti sia k.
- Abbiamo dimostrato che max numero percorsi disgiunti = valore max flusso nella rete ottenuta assegnando capacita` 1 agli archi di G. Quindi il valore del max flusso in questa rete e` k.
- Teorema Massimo Flusso & Minimo Taglio ⇒ esiste taglio (A, B) con cap(A,B)= k.
- Sia F l'insieme degli archi che vanno da A verso B.
- Ogni arco ha capacita` 1 e la somma delle capacita` degli archi diretti da A verso B e` k → |F| = k
- Ovviamente se rimuoviamo gli archi di F disconnettiamo t da s per cui F e` un insieme che disconnette t da s e ha cardinalita` k.