

Cognome e Nome:  
Numero di Matricola:

**Spazio riservato alla correzione**

1	2	3	4	Bonus	Totale
/25	/25	/25	/25		/100

**1. Grafi**

- a) Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo DFS e analizzarne il tempo di esecuzione (fornire un limite superiore asintotico al tempo di esecuzione giustificando la risposta).

- b) Si spieghi come modificare l'algoritmo BFS in modo da ottenere un algoritmo che da' in output true se il grafo in input e' bipartito e false altrimenti. Qual e' la complessita' asintotica dell'algoritmo?

- c) **Esercizio per i punti di bonus:** Dimostrare che l'algoritmo descritto al punto precedente correttamente dà in output true se il grafo è bipartito e false altrimenti.

2. Algoritmi greedy
  - a. Si fornisca un algoritmo ottimo greedy per il problema del partizionamento di intervalli.

b. Qual è il tempo di esecuzione dell'algoritmo? Giustificare la risposta spiegando quali accorgimenti occorre adottare nell'implementazione per ottenere quel tempo di esecuzione?

c. Si dimostri che l'algoritmo greedy usa esattamente un numero di risorse pari alla profondità dell'insieme di intervalli.

3. Programmazione dinamica.

Un circolo sportivo ha a disposizione una certa somma di denaro  $B$  da spendere in attrezzature sportive da mettere a disposizione dei soci. Il presidente del circolo effettua un sondaggio tra i soci per capire a quali attrezzature sono maggiormente interessati tra un possibile insieme di attrezzature di cui potrebbe dotarsi il circolo. Ciascun socio esprime un voto da 0 a 10 per ciascun tipo di attrezzatura in modo che alla fine del sondaggio ciascun tipo di attrezzatura abbia un punteggio assegnato che esprime la sua utilità per il circolo. Il presidente del circolo, una volta acquisiti questi punteggi e conoscendo il costo esatto di ciascuna attrezzatura, deve decidere quali attrezzature acquistare in modo da massimizzare il punteggio totale dell'insieme di attrezzature acquistate senza superare il budget a disposizione.

- a. Formalizzare il problema sotto forma di un problema computazionale definendo in modo preciso e schematico un'istanza generica del problema.

b. Fornire lo pseudocodice di un algoritmo che da` in output il punteggio totale della soluzione ottima, cioe` il massimo punteggio tra quelli di tutti i possibili insiemi di attrezzature acquistabili con il budget a disposizione. Analizzare la complessita` dell'algoritmo fornito.

c. Dimostrare che l'algoritmo da` in output il valore della soluzione ottima.

4. **Massimo flusso**

a. Dimostrare che se  $f$  è un flusso massimo per la rete di flusso  $G$  allora la corrispondente rete residua  $G_f$  non contiene cammini aumentanti.

b. Sia  $f$  un flusso per la rete di flusso  $G$  e sia  $G_f$  la corrispondente rete residua. Mostrare come ottenere un taglio  $s$ - $t$  di capacità minima nel caso in cui  $G_f$  non contenga cammini aumentanti. Se si è in grado, dimostrare che la capacità del taglio è uguale al valore  $v(f)$  del flusso  $f$  ed è quindi minima.

c. Eseguire l'algoritmo di Ford-Fulkerson sul grafo raffigurato di seguito indicando per ogni iterazione dell'algoritmo, il flusso assegnato a ciascun arco e la corrispondente rete residua. Evidenziare il cammino aumentante scelto dall'algoritmo ad ogni iterazione.

