

Cognome e Nome:  
Numero di Matricola:

**Spazio riservato alla correzione**

1	2	3	4	Bonus	Totale
/25	/25	/25	/25		/100

**1. Grafi**

- a) Scrivere lo pseudocodice dell'algoritmo per ottenere l'ordinamento topologico di un DAG e si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore e' possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.

- b) Dimostrare per induzione che ogni DAG ha un ordinamento topologico. La dimostrazione deve essere chiara e schematica.

- c) **Bonus.** Descrivere come implementare l'algoritmo al punto precedente in modo che abbia tempo  $O(n+m)$ , dove  $n$  ed  $m$  sono rispettivamente il numero di nodi e di archi del grafo e **dimostrare** che il tempo di esecuzione dell'algoritmo così implementato è appunto  $O(n+m)$ .

2. Algoritmi greedy

a) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo di Dijkstra che non utilizza alcuna struttura dati ausiliaria per il calcolo efficiente del minimo. Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo e si dica in quale punto dell'algoritmo viene effettuata la scelta greedy. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore è possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.

b) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo di Dijkstra che utilizza una coda a priorit  (se non si   in grado, descrivere in modo **schematico** l'algoritmo). Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo nel caso in cui la coda a priorit  sia implementata con un heap. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore   possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.

3. Programmazione dinamica.

Vi siete iscritti ad un workshop della durata di un giorno durante il quale vengono svolte diverse lezioni alcune delle quali in contemporanea tra loro. Ciascuna lezione dà diritto ad un diverso numero di crediti che vi vengono riconosciuti solo se seguite la lezione per intero.

Al momento dell'iscrizione vi è stato consegnato l'orario di tutte le lezioni per cui conoscete l'ora di inizio e di fine di ciascuna lezione. Il vostro obiettivo è quello di massimizzare il numero totale di crediti acquisiti.

a) Formalizzare il problema come un problema computazionale indicando in modo preciso i dati che descrivono un'istanza del problema e ciò che costituisce una soluzione al problema (non come ottenerla).

b) Fornire una formula per il calcolo del valore della soluzione ottima in termini di valori delle soluzioni ottime per sottoproblemi di taglia più piccola. Spiegare in modo chiaro e schematico come si arriva alla formula da voi fornita.

c) Scrivere lo pseudocodice di un algoritmo **ricorsivo** efficiente che calcola il massimo numero di crediti che possono essere acquisiti durante il workshop e lo pseudocodice **anch'esso ricorsivo** di un algoritmo che stampa le lezioni che fanno parte della soluzione ottima.

4. **Massimo flusso**

- a) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo di Ford\_Fulkerson.

b) Si analizzi il tempo di esecuzione asintotico dell'algoritmo di Ford-Fulkerson nel caso in cui le capacità siano degli interi. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore e` possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo giustificando la risposta.

c) Si consideri la seguente rete di flusso e la funzione di flusso i cui valori sono indicati a sinistra delle capacità degli archi. Si disegni la rete residua rispetto alla funzione flusso indicata e si dica se questa funzione ha valore massimo. Nel caso in cui la funzione non abbia valore massimo, si fornisca la funzione flusso con valore massimo applicando una o più iterazioni dell'algoritmo di Ford-Fulkerson **a partire dalla funzione di flusso data. Occorre indicare per ogni arco qual è il flusso inviato sull'arco dalla funzione flusso di valore massimo. Le risposte che non sono ottenute a partire dalla funzione di flusso data non saranno valutate.**

