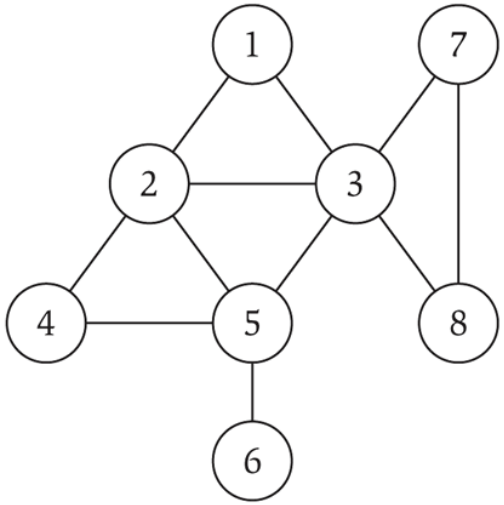
Grafi (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2023-24
Matricole congrue a 1
Docente: Annalisa De Bonis

Grafi non direzionati

- Grafi non direzionati. $G = (V, E)$
  - V = insieme nodi.
  - E = insieme archi.
  - Esprime le relazioni tra coppie di oggetti.
  - Parametri del grafo: $n = |V|$, $m = |E|$.



V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

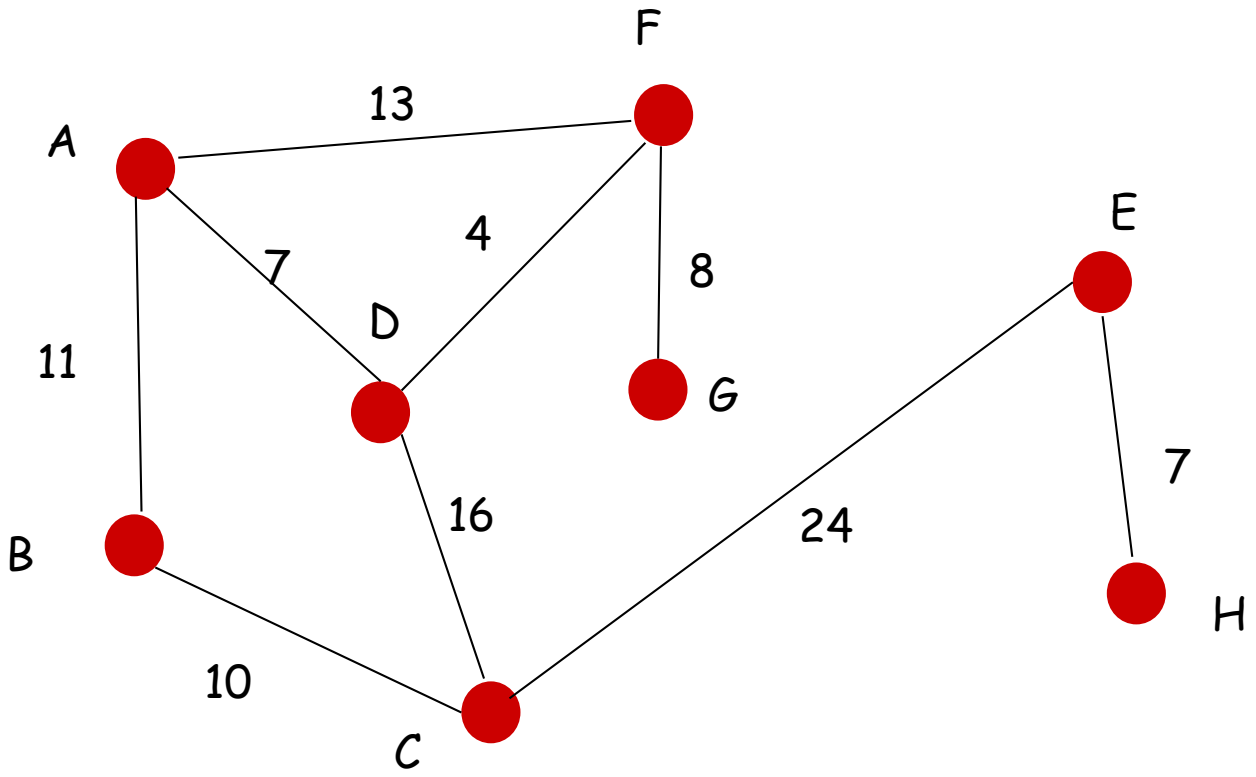
E = { 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6,7-8 }

n = 8

m = 11

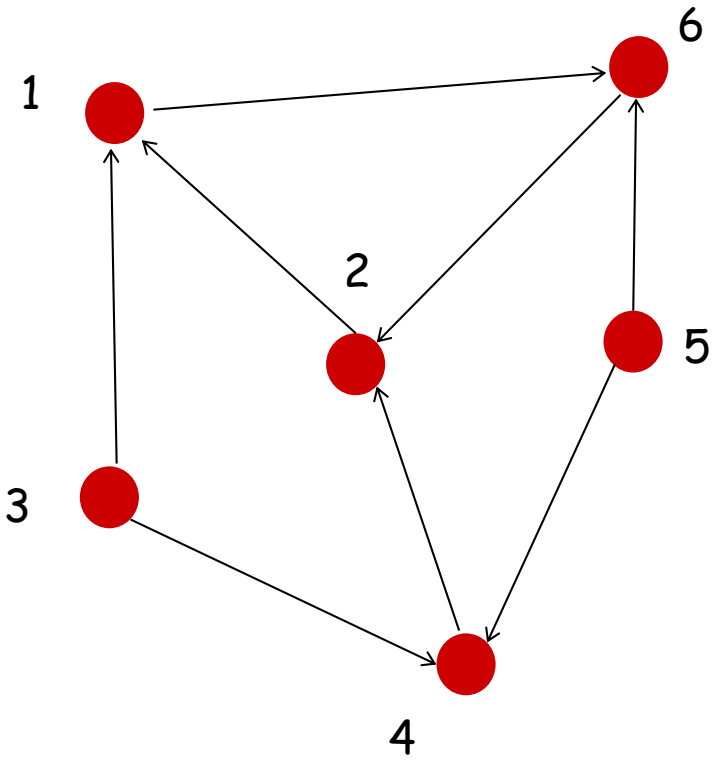
Esempio di applicazione

- Archi: strade (a doppio senso di circolazione)
- Nodi: intersezioni tra strade
- Pesi archi: lunghezza in km



Grafi direzionati

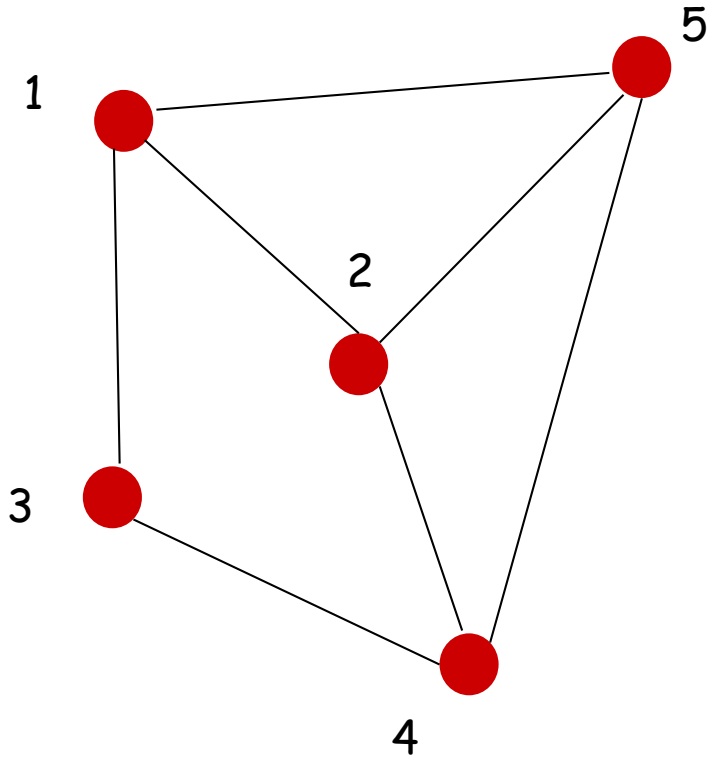
- Gli archi hanno una direzione
  - L'arco (u,v) è diverso dall'arco (v,u)
  - Si dice che l'arco e=(u,v) lascia u ed entra in v
  - e che u è l'origine dell'arco e v la destinazione dell'arco

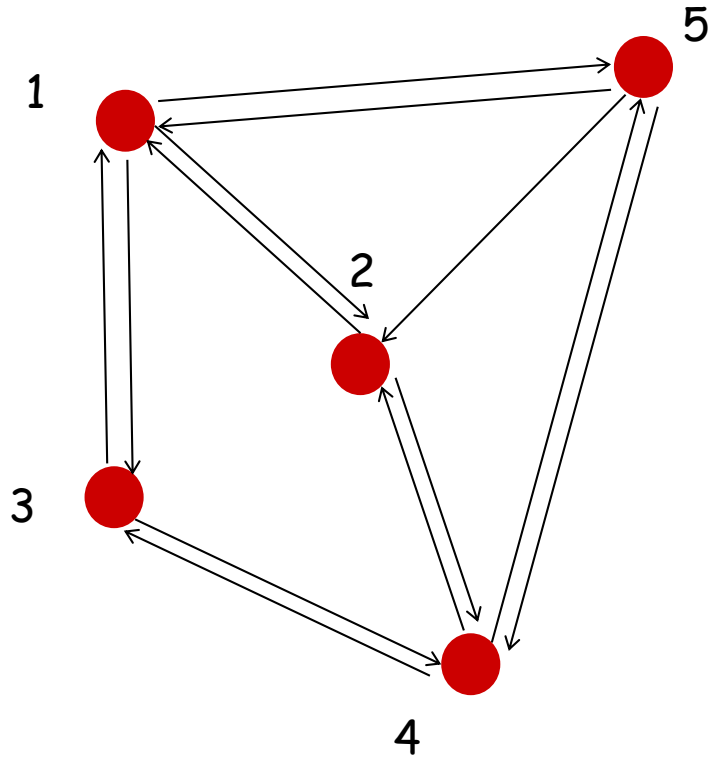


V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
E = {1-6, 2-1, 3-1, 3-4, 4-2, 5-4, 5-6, 6-2 }
n = 6
m = 8

Grafi direzionati

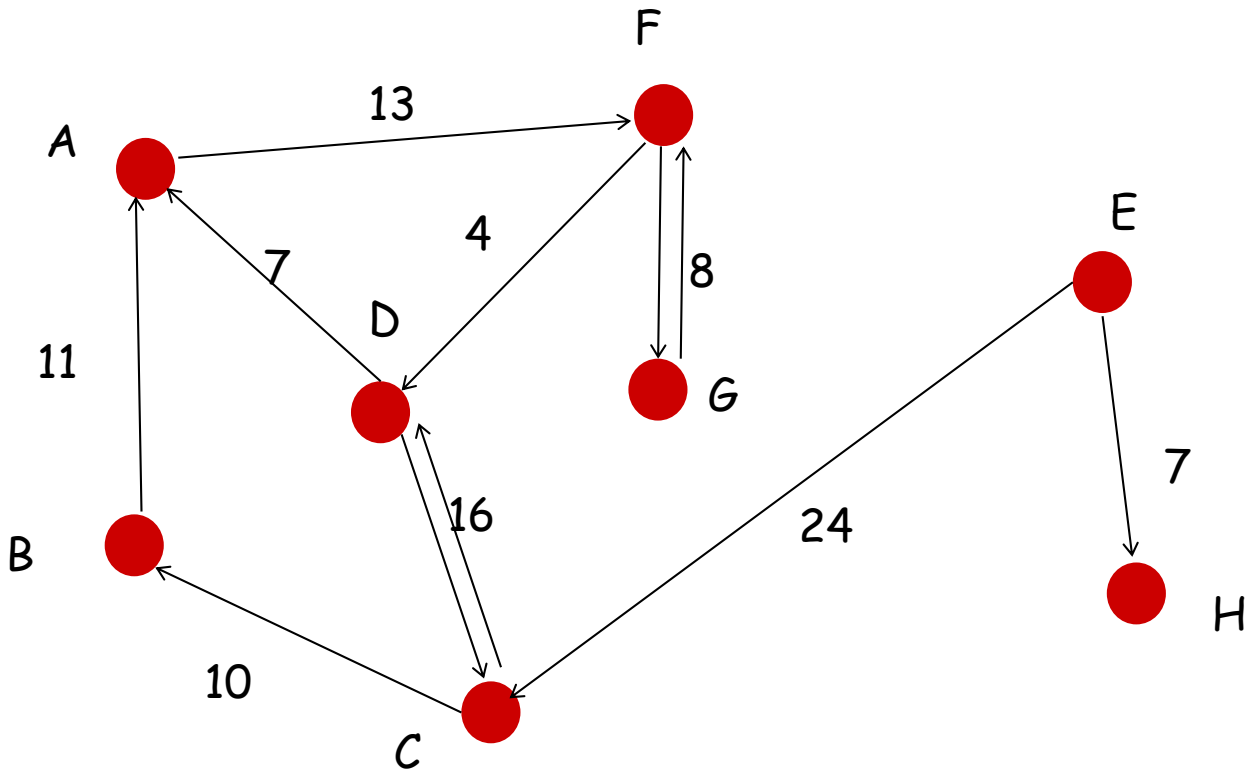
- Grafi non direzionati $G = (V, E)$ possono essere visti come un caso particolare degli archi direzionati in cui per ogni arco (u,v) c'è l'arco di direzione opposta (v,u)





Esempio di applicazione

- Archi: strade (a senso unico di circolazione)
- Nodi: intersezioni tra strade
- Pesi archi: lunghezza in km

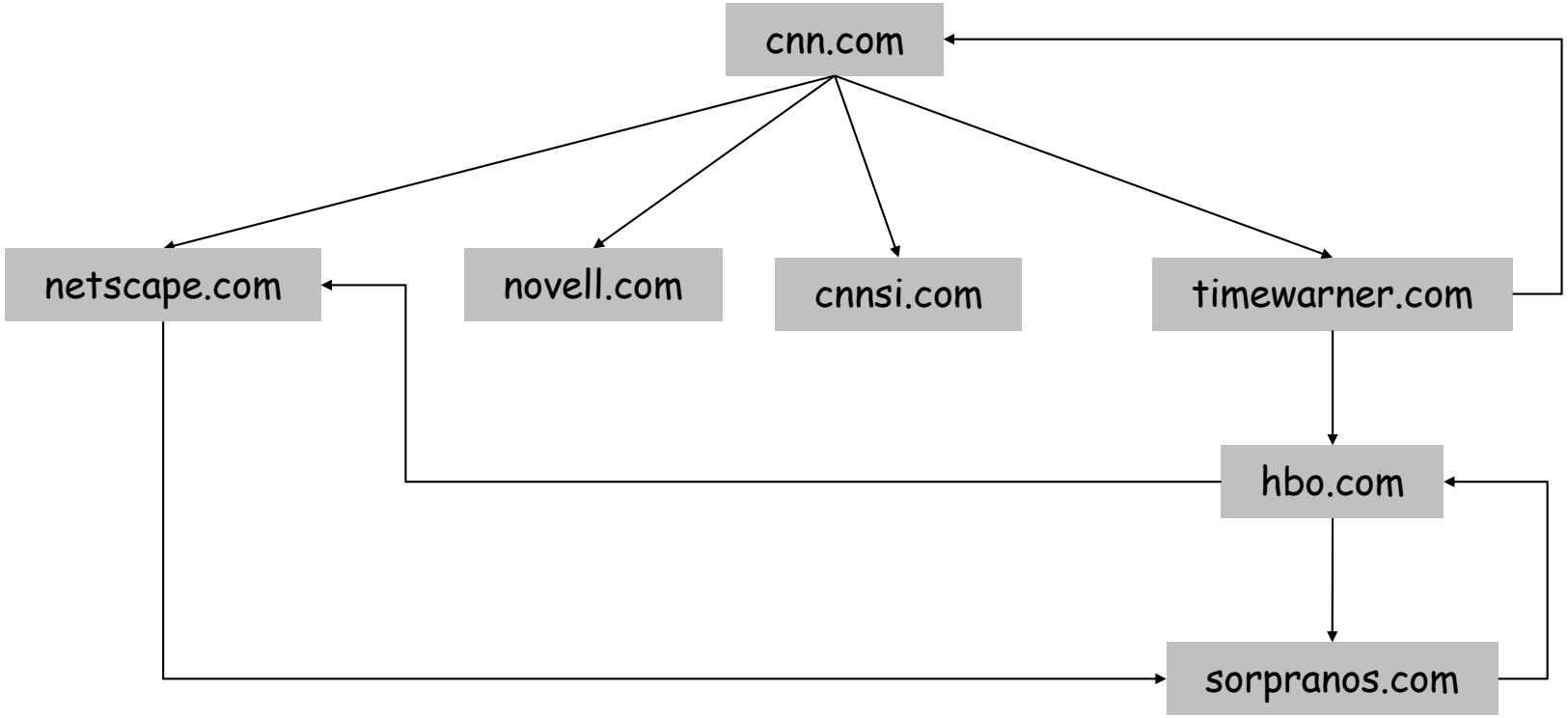


Alcune applicazione dei grafi

- Rete di amicizia su un social network: ogni utente è un nodo; ogni volta che due utenti diventano amici, si crea un arco del grafo.
- Google maps: i nodi rappresentano città, intersezioni di strade, siti di interesse, ecc. e gli archi rappresentano le connessioni dirette tra i nodi.
    - La rappresentazione mediante un grafo permette di trovare il percorso più corto per andare da un posto all'altro mediante un algoritmo.
- World Wide Web: le pagine web sono i nodi e il link tra due pagine è un arco. Google utilizza questa rappresentazione per esplorare il World Wide Web

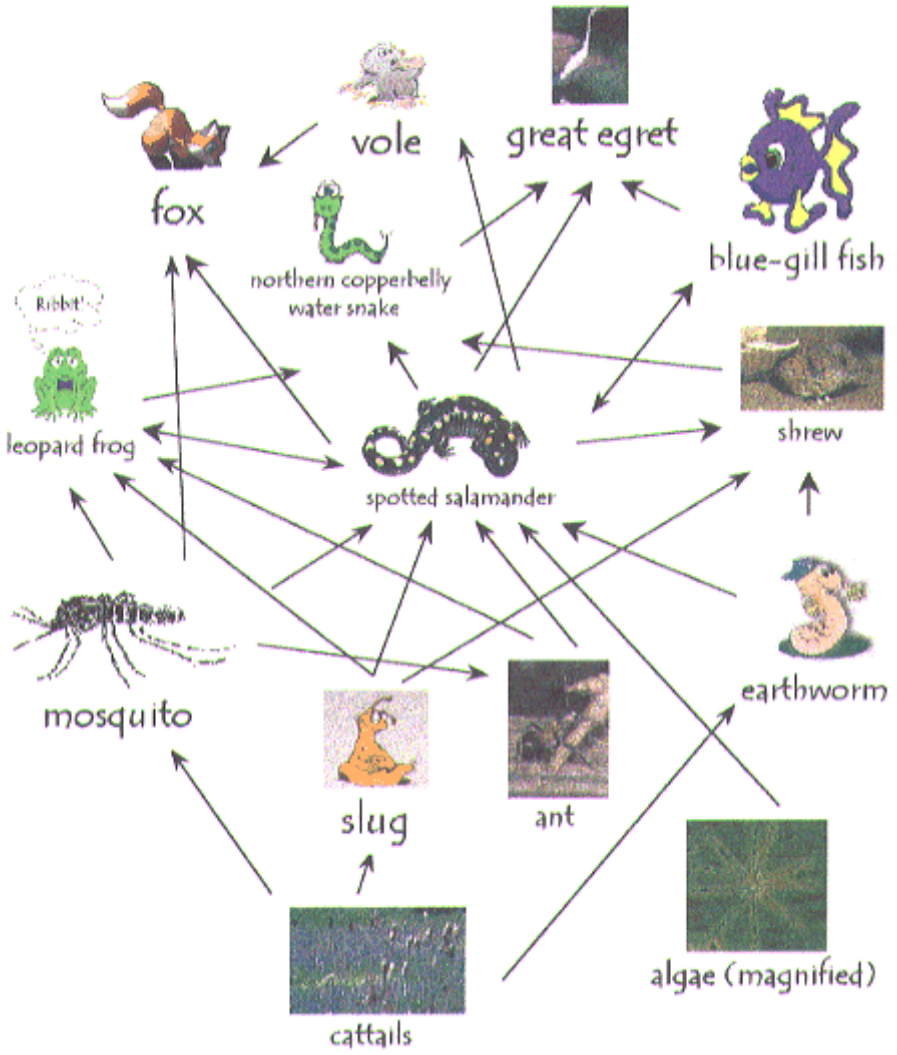
World Wide Web

- Web graph.
  - Nodo: pagina web.
  - Edge: hyperlink da una pagina all'altra.



Ecological Food Web

- Food web graph.
  - Nodo = specie
  - Arco dalla preda al predatore.



Reference: http://www.twingroves.dètrict96.k12.il.us/Wetlands/Salamander/SalGraphics/salfoodweb.giff

Alcune applicazioni dei grafi

Graph	*Nodi*	*Archi*
trasporto	intersezioni di strade	strade
trasporto	aeroporti	voli diretti
comunicazione	computer	cavi di fibra ottica
World Wide Web	web page	hyperlink
rete sociale	persone	relazioni
rete del cibo	specie	preda-predatore
scheduling	task	vincoli di precedenza
circuiti	gate	wire

Terminologia

- Consideriamo due nodi u e v di un grafo G connessi dall'arco e = (u,v)

- Si dice che
  - u e v sono adiacenti
  - u e v sono le estremità dell'arco (u,v)
  - l'arco (u,v) incide sui vertici u e v
  - u è un nodo vicino di v
  - v è un nodo vicino di u

- Dato un vertice u di un grafo G
  - grado di u = numero archi incidenti su u
    - è indicato con deg(u)

Numero di archi di un grafo non direzionato

m = numero di archi di *G*;

n= numero di nodi di *G* .

Degree (grado) = numero di vicini di u

1. La somma di tutti i gradi dei nodi di *G* è 2m : $\sum_{u \in V} deg(u) = 2m$

Dim. Ciascun arco incide su due vertici e quindi viene contato due volte nella sommatoria in alto. L'arco (x,y) è contato sia in deg(x) che in deg(y).

2. Il numero m di archi di un grafo *G* non direzionato è al più n(n-1)/2 .

Dim. Il numero di coppie **non ordinate** distinte che si possono formare con n nodi è n(n-1)/2 .
Posso scegliere il primo nodo dell'arco in n modi e il secondo in modo che sia diverso dal primo nodo, cioè in n-1 modi. Dimezzo in quanto l'arco (u,v) è uguale all'arco (v,u)

Numero di archi di un grafo direzionato

m = numero di archi di G;

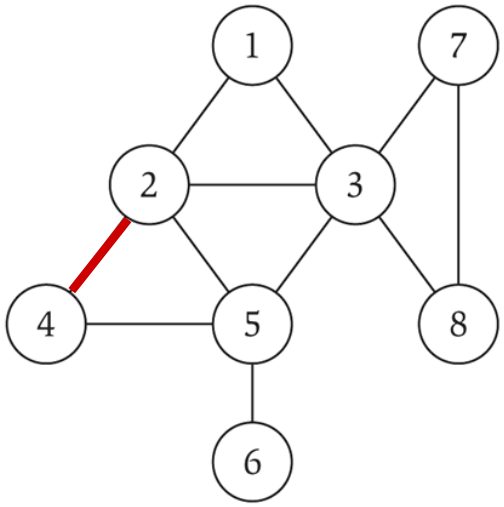
n= numero di nodi di G

Il numero m di archi di G è al più n^2

Dim. Il numero di coppie **ordinate** distinte che si possono formare con n nodi è n^2 . Posso scegliere il primo nodo dell'arco in n modi e il secondo in altri n modi (se ammettiamo archi con entrambe le estremità uguali).

Graph Representation: Adiacenza Matrix

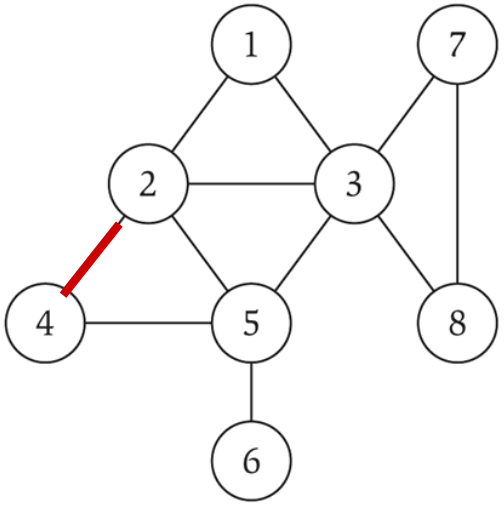
- Matrice di adiacenza. Matrice nxn con $A_{uv} = 1$ se (u, v) è an arco.
  - Spazio proporzionale a n^2.
  - Controllare se (u, v) è un arco richiede tempo $\Theta(1)$.
  - Identificare tutti gli archi richiede tempo $\Theta(n^2)$.

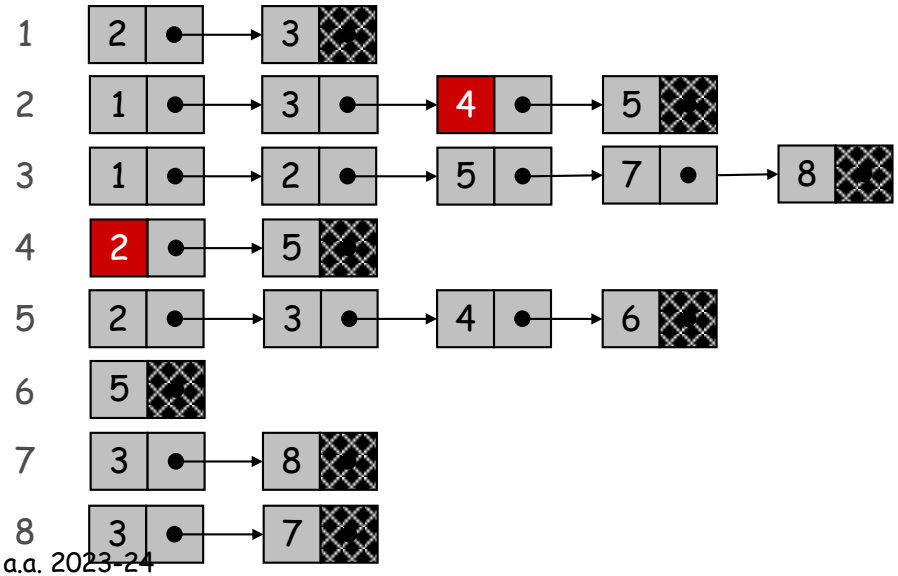


	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	1	0	0	0	1	0

Rappresentazione di un grafo: liste di adiacenza

- Liste di adiacenza. Array di liste in cui ogni lista è associata ad un nodo.
  - Ad ogni arco corrisponde un elemento della lista.
  - Se esiste l'arco (u,v) allora la lista associata ad u contiene v
  - In un grafo non direzionato l'arco (u,v) corrisponde ad un elemento della lista associata ad u e ad un elemento della lista associata a v→ somma lunghezze liste=2m
  - In un grafo direzionato l'arco (u,v) corrisponde ad un elemento della lista associata ad u → somma lunghezze liste=m
  - Spazio proporzionale a m + n.
  - Controllare se (u, v) è un arco richiede tempo O(deg(u)).
  - Individuare tutti gli archi richiede tempo Θ(m + n).



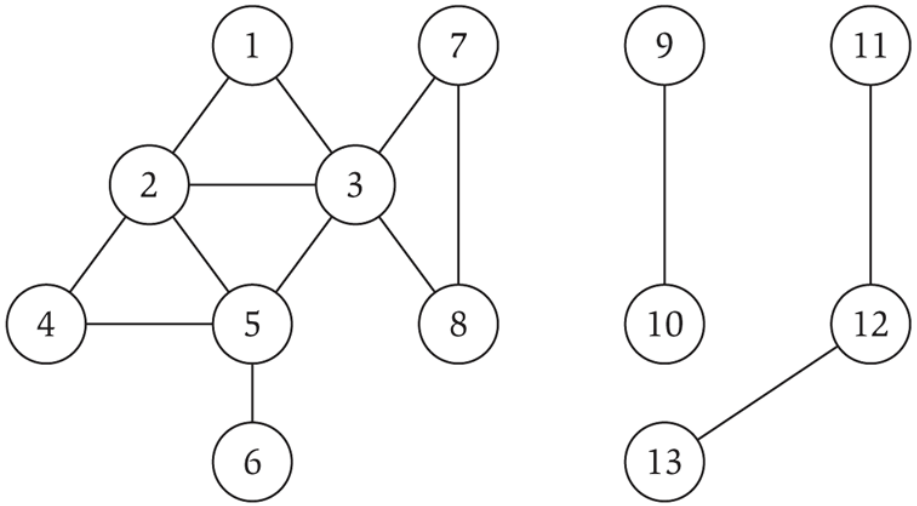


Percorsi e connettività

- Def. Un percorso in un grafo non direzionato $G = (V, E)$ è una sequenza P di nodi $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ con la proprietà che ciascuna coppia di vertici consecutivi v_i, v_{i+1} è unita da un arco in E.

- Def. Un percorso è semplice se tutti i nodi sono distinti.

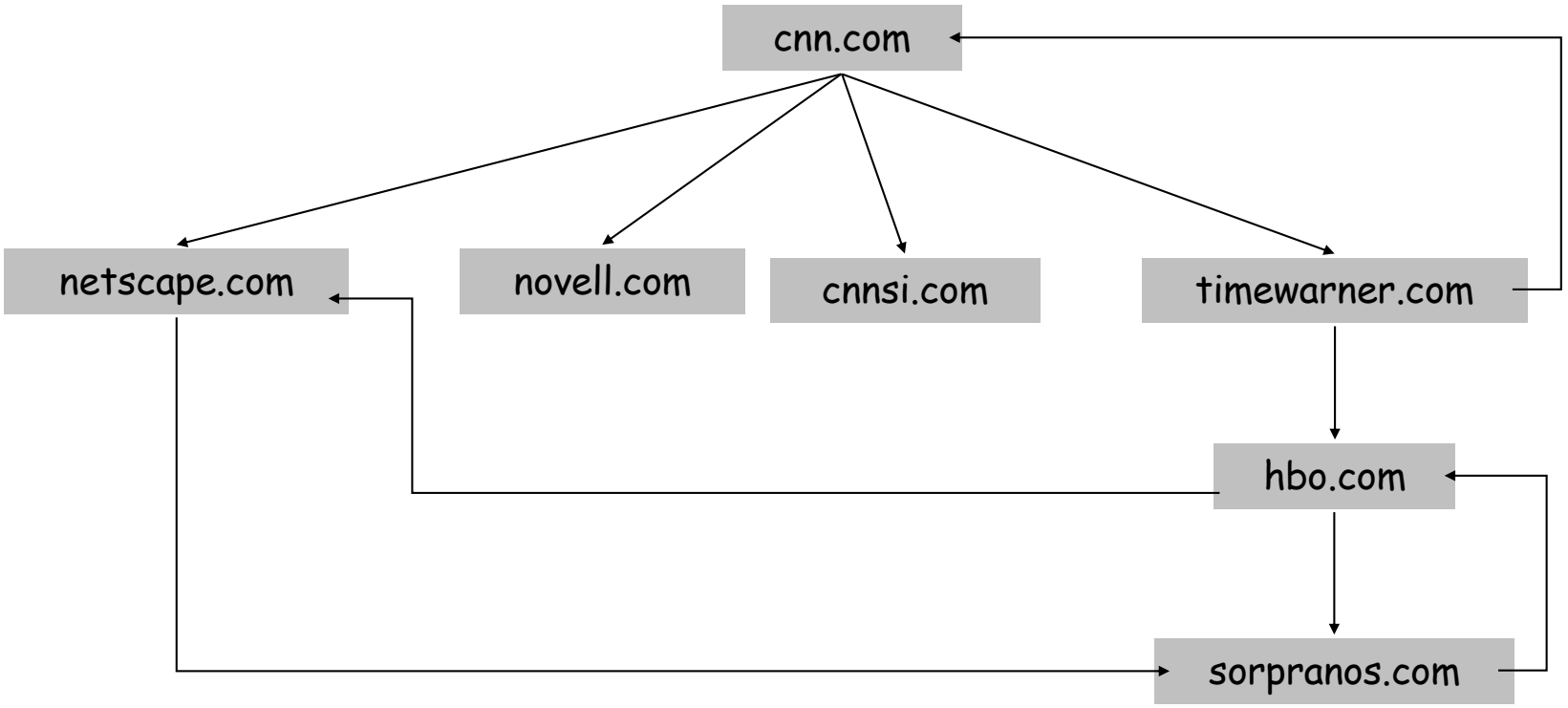
- Def. Un grafo non direzionato è connesso se per ogni coppia di nodi u e v, esiste un percorso tra u e v.



Applicazione del concetto di percorso

- **Esempi:**

  Web graph. Voglio capire se è possibile, partendo da una pagina web e seguendo gli hyperlink nelle pagine via via attraversate, arrivare ad una determinata pagina



Applicazione del concetto di percorso

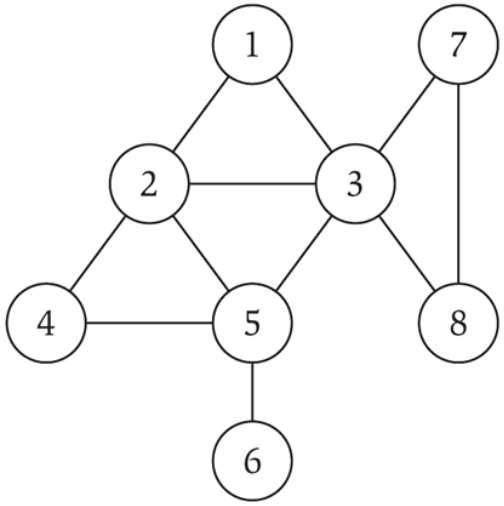
In alcuni casi può essere interessante scoprire il percorso più corto, cioe` composto dal minimo numero di archi, tra due nodi.

Esempio:

- Grafo : rete di trasporti dove i nodi sono gli aeroporti e gli archi i collegamenti diretti tra aeroporti.
- Voglio arrivare da Napoli a New York facendo il minimo numero di scali.

Cicli

- Def. Un ciclo è un percorso $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ in cui $v_1 = v_k$, $k > 2$.
- Def. Un ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_1$ è semplice se i primi k-1 nodi del ciclo sono tutti distinti tra di loro



ciclo (semplice) C = 1-2-4-5-3-1

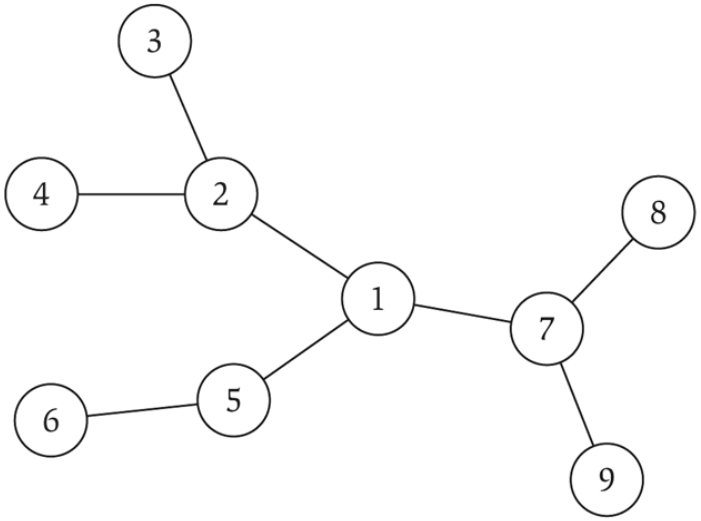
ciclo (non semplice) C' = 1- 3 -7 -8- 3 - 5 - 2- 1

Alberi

- Def. Un grafo non direzionato è un albero (tree) se è connesso e non contiene cicli

- Teorema. Sia G un grafo non direzionato con n nodi. Ogni due delle seguenti affermazioni implica la restante affermazione.
  - 1 e 2 ⟶ 3 ; 1 e 3 ⟶ 2 ; 2 e 3 ⟶ 1

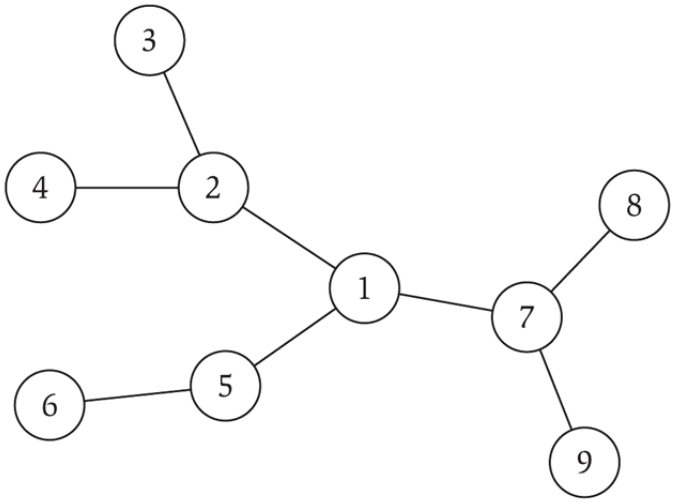
1. G è connesso.
2. G non contiene cicli.
3. G ha n-1 archi.



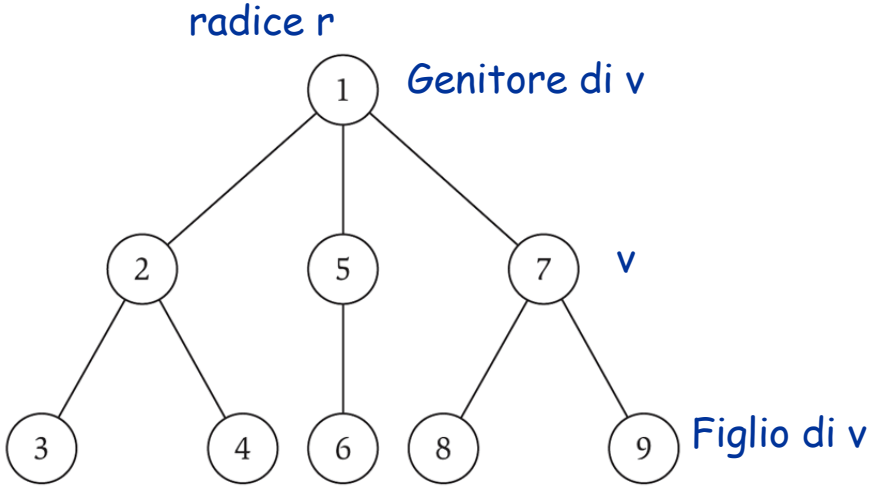
Alberi con radice

- Albero con radice. Dato un albero T, si sceglie un nodo radice r e si considerano gli archi di T come orientati a partire da r
- Dato un nodo v di T si dice
  - Genitore di v: il nodo che w precede v lungo il percorso da r a v (v viene detto figlio di w)
  - Antenato di v: un qualsiasi nodo w lungo il percorso che va da r a v (v viene detto discendente di w)

- Foglia: nodo senza discendenti



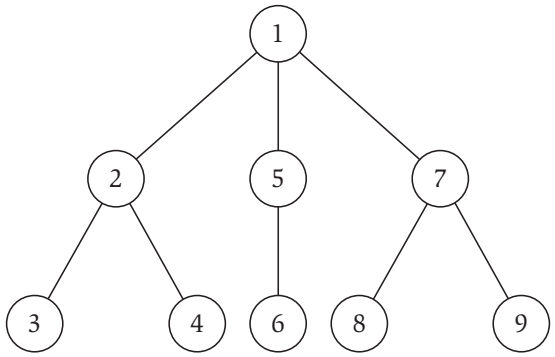
Un albero



Lo stesso albero con radice 1

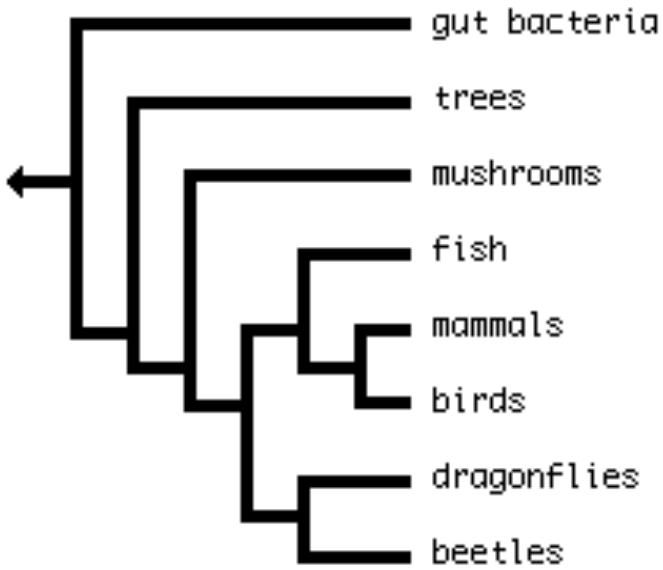
Alberi con radice

- Scegliere un nodo come radice, rende più semplice dimostrare la seguente affermazione
- se G è connesso e non contiene cicli, in altre parole, se G è un albero allora il numero di archi è n-1 (dove n è il numero di nodi).
- Dim.
- Per ogni nodo diverso dalla radice c'e` un arco distinto che lo connette al proprio padre →numero di archi ≥ n-1
- Per ogni arco c'è un nodo distinto (non radice) che è congiunto al padre da quell'arco → numero di archi ≤ n-1
- le due diseguaglianze → numero di archi= n-1



Importanza degli alberi: rappresentano strutture gerarchiche

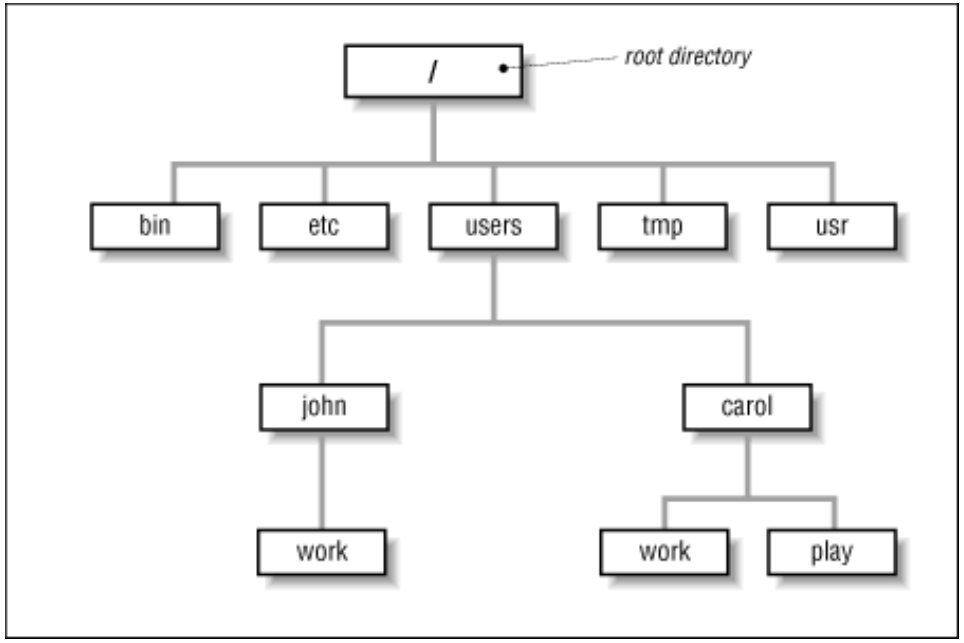
- Alberi filogenetici. Descrivono la storia evolutiva delle specie animali.



La filogenesi afferma l'esistenza di una specie ancestrale che diede origine a mammiferi e uccelli ma non alle altre specie rappresentate nell'albero (cioè, mammiferi e uccelli condividono un antenato che non è comune ad altre specie nell'albero). La filogenesi afferma inoltre che tutti gli animali discendono da un antenato non condiviso con i funghi, gli alberi e i batteri, e così via.

Importanza degli alberi: rappresentano strutture gerarchiche

- File system. Un file system tipicamente consiste di file organizzati in gruppi chiamati directory.
  - Una directory può contenere file e altre directory,
  - Un file system gerarchico è organizzato secondo una struttura gerarchica ad albero con radice
    - nodi interni: directory
    - foglie: file

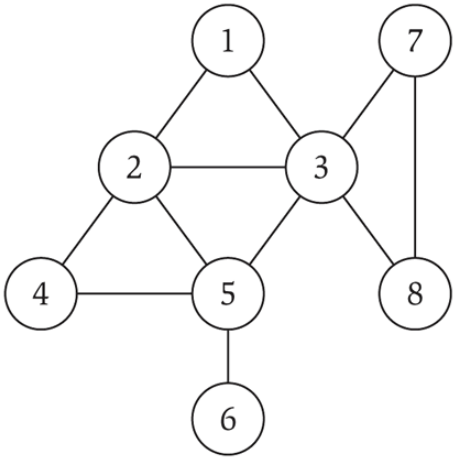


Visite di grafi

Connettività

- Problema della connettività tra s e t. Dati due nodi s e t, esiste un percorso tra s e t?

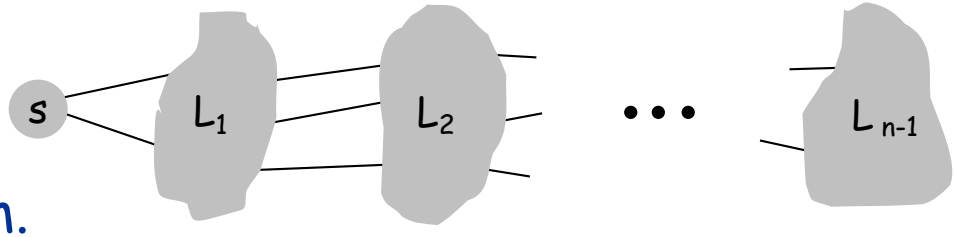
- Problema del percorso più corto tra s e t. Dati due nodi s e t, qual è la lunghezza del percorso più corto tra s e t
- Applicazioni.
  - Attraversamento di un labirinto.
  - Erdős number.
  - Minimo numero di dispositivi che devono essere attraversati dai dati in una rete di comunicazione per andare dalla sorgente alla destinazione
  - Minimo numero di scali in un viaggio aereo



Breadth First Search (visita in ampiezza)

- BFS. Esplora il grafo a partire da una sorgente s muovendosi in tutte le possibile direzioni e visitando i nodi livello per livello (N.B.: il libro li chiama layer e cioè strati).

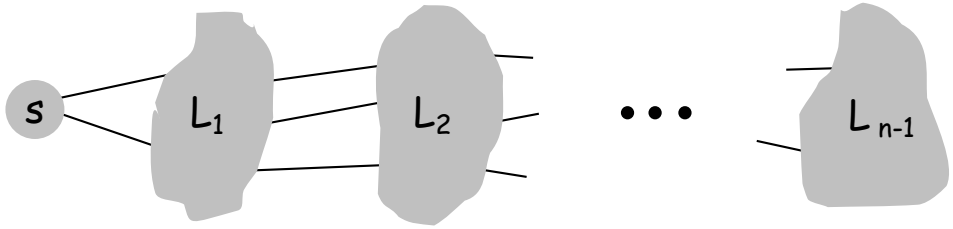
- I layer sono descritti di seguito



- BFS algorithm.
  - L_0 = { s }.
  - L_1 = tutti i vicini di s.
  - L_2 = tutti i nodi che non appartengono a L_0 o L_1, e che sono uniti da un arco ad un nodo in L_1.
  - L_{i+1} = tutti i nodi che non appartengono agli strati L_0 ,L_1,…,L_i e che sono uniti da un arco ad un nodo in L_i.

Breadth First Search

- distanza tra u e v= lunghezza del percorso piu` corto tra u e v
- Teorema. Per ogni i, L_i consiste di tutti i nodi a distanza i da s. Di conseguenza, c'è un percorso da s a t se e solo t appare in qualche livello.



L_1: livello dei nodi a distanza 1 da s
L_2: livello dei nodi a distanza 2 da s
...
L_{n-1}: livello dei nodi a distanza n-1 da s

Il teorema si puo` dimostrare in modo molto semplice usando l'induzione

Breadth First Search

- Teorema. Per ogni i, L_i consiste di tutti i nodi a distanza i da s. Di conseguenza, c'è un percorso da s a t se e solo t appare in L_i, per un certo $i \in \{0,1,\ldots,j\}$.

Dim. per induzione sull'indice del layer:
Base induttiva: per j=0, la tesi è vera perche' $L_0=\{s\}$ e s è l'unico nodo a distanza 0 da se stesso
Passo induttivo: Supponiamo vera la tesi fino ad un certo j e dimostriamo che è vera per j+1. Assumiamo quindi che per i=0,1,…,j, il layer L_i consista di tutti i nodi a distanza i da s.

.

Per def. di $L_{j+1,}$ un nodo u è in L_{j+1} se e solo se valgono le seguenti 1 e 2:

1. u non appartiene a $L_0,L_1,\ldots,L_j$
2. u è unito da un arco ad un nodo di L_j

un nodo u soddisfa la 1 e la 2 ←→ la distanza di u da s è j+1
(ricordiamo che stiamo assumendo l'ipotesi induttiva)

dimostrazione nelle prossime slide

Breadth First Search

un nodo u soddisfa sia la 1 che la 2 ←→ la distanza di u da s è j+1

dim.

- è immediato vedere che vale l'implicazione →
- vediamo perche':
- per la 2 esiste un arco da un certo nodo z di L_j ad u e siccome per ipotesi induttiva, z è a distanza j da s allora esiste un percorso di lunghezza j+1 da s ad u
- per la 1 il vertice u non è in $L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_j$ e di conseguenza u è a distanza > j da s (infatti per ipotesi induttiva tutti i nodi a distanza ≤j da s sono in $L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_j$)

- le affermazioni in rosso implicano che esiste un percorso da s ad u di j+1 archi e questo è il piu` corto possibile → la distanza da u ad s è j+1

Breadth First Search

- dimostriamo che vale l'implicazione ←
- Supponiamo che u sia a distanza j+1 da s e dimostriamo che valgono la 1 e la 2.

- Per ipotesi induttiva la 1 deve essere necessariamente soddisfatta (infatti per ipotesi induttiva $L_0, L_1, \ldots, L_j$ contengono solo nodi a distanza ≤ j da s)

- Dimostriamo che vale anche la 2.
- Sia P un percorso di j+1 archi da s ad u. Questo percorso esiste dal momento che la distanza da s di u è proprio j+1. Indichiamo con v il predecessore di u lungo P (P termina con l'arco (v,u)).
- Il sottopercorso P' di P che arriva fino a v ha lunghezza j e di conseguenza la distanza di v da s è ≤ j.
- Se la distanza di v da s fosse <j allora esisterebbe un percorso da s ad u con meno di j+1 archi contraddicendo l'ipotesi che la distanza di u da s e` j+1
- Quindi la distanza da s a v e proprio j e per ipotesi induttiva v si trova in L_j
  → u è unito da un arco ad un nodo di L_j

Breadth First Search

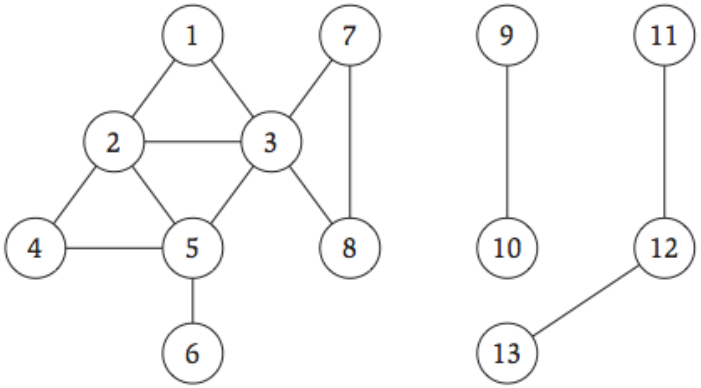
Pseudocodice (schema dell'algoritmo)

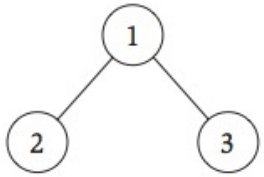
1. BFS(s)
2. L_0={ s }
3 **For**(i=0;i≤n-2;i++)
4. L_{i+1}= Ø ;
5. **Foreach** nodo u in L_i
6. **Foreach** nodo v adiacente ad u
7. **if**(v non appartiene ad L_0,…,L_{i+1})
8. L_{i+1}=L_{i+1} ∪ { v }
9. **EndIf**
10. **Endforeach**
11. **Endforeach**
12. **Endfor**

- Occorre un modo per capire se un nodo è gia stato visitato in precedenza. Il tempo di esecuzione dipende dal modo scelto, da come è implementato il grafo e da come sono rappresentati gli insiemi L_i che rappresentano i livelli

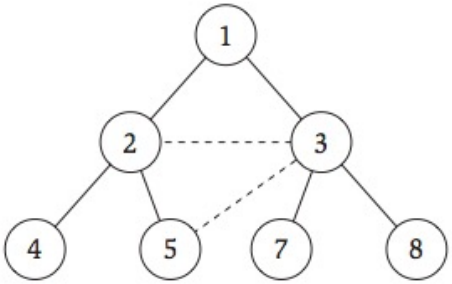
Esempio di esecuzione di BFS

G

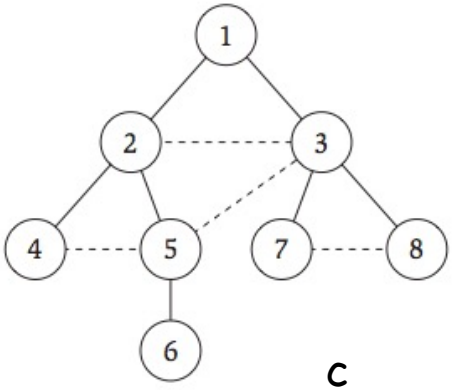




a



b



c

L_0={1}

a. L_1={2,3}

b. L_2={4,5,7,8}

c. L_3={6}

Breadth First Search Tree (Albero BFS)

- Proprietà. L'algoritmo BFS produce un albero che ha come radice la sorgente s e come nodi tutti i nodi del grafo raggiungibili da s.

- L'albero si ottiene in questo modo:
  - Consideriamo il momento in cui un vertice v viene scoperto, cioè il momento in cui visitato per la prima volta.
    - Ciò avviene durante l'esame dei vertici adiacenti ad un un certo vertice u di un certo livello L_i (linea 6).
    - In questo momento, oltre ad aggiungere v al livello L_{i+1} (linea 8), aggiungiamo l'arco (u,v) e il nodo v all'albero

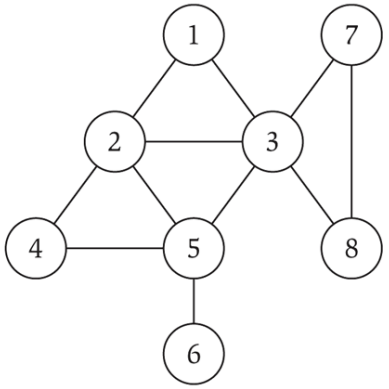
Breadth First Search Tree

- Proprietà. Si consideri un'esecuzione di BFS su $G = (V, E)$, e sia (x, y) un arco di G. I livelli di x e y differiscono di al più di 1.

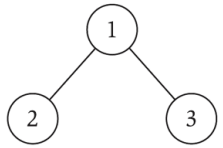
- Dim. Sia L_i il livello di x ed L_j quello di y. Supponiamo senza perdere di generalità che x venga scoperto prima di y cioè che $i \leq j$. Consideriamo il momento in cui l'algoritmo esamina gli archi incidenti su x.

- Caso 1. Il nodo y è stato già scoperto:
  Siccome per ipotesi y viene scoperto dopo x allora sicuramente y viene inserito
  a) o nel livello i dopo x, se y è adiacente a qualche nodo nel livello i-1 (es. x=2, y=3).
  b) o nel livello i+1, se è adiacente a qualche nodo del livello i esaminato nel **For each** alla linea 5 prima di x). (es. x=3,y=5)
  Quindi in questo caso si ha j= i oppure j=i+1.

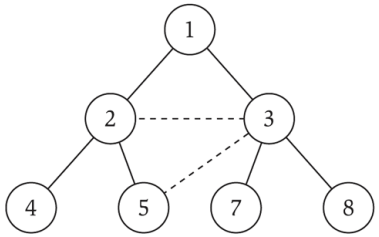
- Caso 2. Il nodo y non è stato ancora scoperto:
  Siccome tra gli archi incidenti su x c'è anche (x,y) allora y viene inserito in questo momento in L_{i+1} . Quindi in questo caso j=i+1. (es. x=2, y=5)



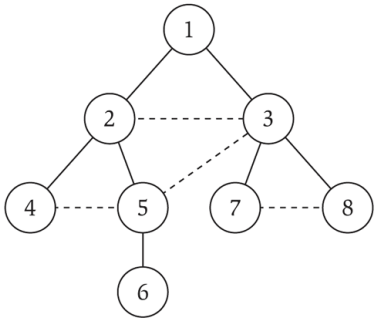
G



(a)



(b)



(c)

Implementazione di BFS con liste di adiacenza e array Discovered

- Ciascun insieme L_i è rappresentato da una lista L[i]
- Usiamo un array di valori booleani Discovered per associare a ciascun nodo il valore vero o falso a seconda che sia già stato scoperto o meno
- Durante l'algoritmo costruiamo anche l'albero BFS

```
1.   BFS(s):
2.   Poni Discovered[s] = true e Discovered[v] = false per tutti gli altri v
3.   Inizializza L[0] in modo che contenga solo s
4.   Poni il contatore dei livelli i = 0
5.   Inizializza il  BFS tree T con un albero vuoto
6.   While i<=n-2
7.        Inizializza L[i+1] con una lista vuota   //nodi raggiungibili da L[i]
8.        Foreach u ∈ L[i]     //L[i] è vuota se non ci sono altri nodi raggiungibili
9.          Foreach arco (u, v) incidente su u
10.           If Discovered[v] = false
11.              Poni Discovered[v] = true
12.               Aggiungi v alla lista L[i+1]
13.              Aggiungi l'arco (u, v) all'albero T
14.         Endif
15.       Endfor
16.    EndFor
17.     i=i+1
18.  Endwhile
```

Implementazione di BFS per grafo implementato con liste di adiacenza

```
1.  BFS(s):
2.  Poni Discovered[s] = true e Discovered[v] = false per tutti gli altri v
3.  Inizializza L[0] in modo che contenga solo s
4.  Poni il contatore dei livelli i = 0
5.  Inizializza il  BFS tree T con un albero vuoto
6.  While i<=n-2
7.      Inizializza L[i+1] con una lista vuota
8.      Foreach u ∈ L[i]
9.        Foreach arco (u, v) incidente su u
10.        If Discovered[v] = false then
11.          Poni Discovered[v] = true
12.          Aggiungi v alla lista L[i+1]
13.          Aggiungi l'arco (u, v) all'albero T
14.        Endif
15.      Endfor
16.   Endfor
17.   i=i+1
18. Endwhile
```

O(n)

O(1)

n volte

n-1 volte

O(n)

Sul totale di tutte le iterazioni del while, al più n volte

Sul totale di tutte le iterazioni del While al più 2m volte.

O(m)

Foreach più esterno viene eseguito al più n volte in quanto ogni nodo raggiungibile da s appartiene ad una sola lista L_i
Foreach più interno viene eseguito al piu` $\sum_{u \in V} deg(u) \leq 2m$ volte

Algoritmo è O(n+m)

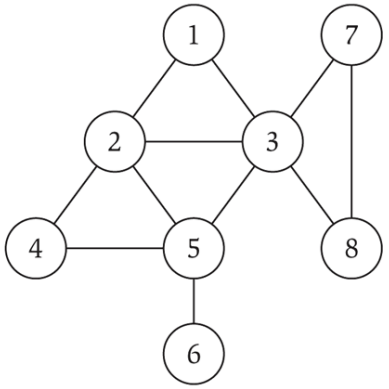
Breadth First Search Tree

- Proprietà. Si consideri un'esecuzione di BFS su $G = (V, E)$, e sia (x, y) un arco di G. I livelli di x e y differiscono di al più di 1.

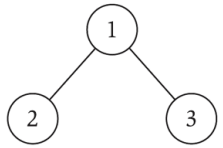
- Dim. Sia L_i il livello di x ed L_j quello di y. Supponiamo senza perdere di generalità che x venga scoperto prima di y cioè che $i \leq j$. Consideriamo il momento in cui l'algoritmo esamina gli archi incidenti su x.

- Caso 1. Il nodo y è stato già scoperto:
  Siccome per ipotesi y viene scoperto dopo x allora sicuramente y viene inserito
  a) o nel livello i dopo x, se y è adiacente a qualche nodo nel livello i-1 (es. x=2, y=3).
  b) o nel livello i+1, se è adiacente a qualche nodo del livello i esaminato nel **For each** alla linea 5 prima di x). Quindi in questo caso si ha j= i oppure j=i+1. (es. x=3,y=5)

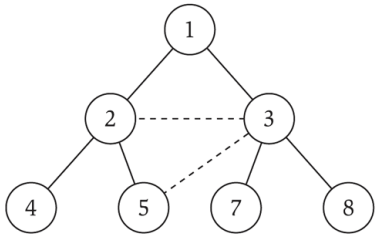
- Caso 2. Il nodo y non è stato ancora scoperto:
  Siccome tra gli archi incidenti su x c'è anche (x,y) allora y viene inserito in questo momento in L_{i+1} . Quindi in questo caso j=i+1. (es. x=2, y=5)



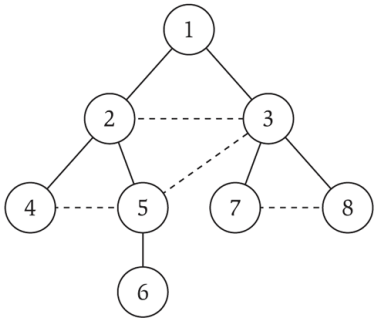
G



(a)



(b)



(c)

Implementazione di BFS con coda FIFO

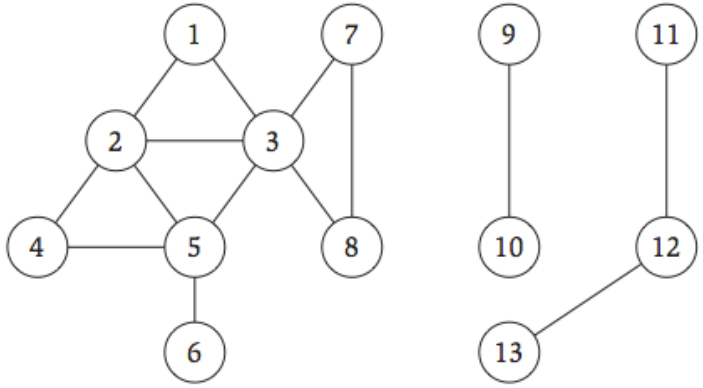
L'algoritmo BFS si presta ad essere implementato con un coda
Ogni volta che viene scoperto un nodo u, il nodo u viene inserito nella coda
Vengono esaminati gli archi incidenti sul nodo al front della coda

```
BFS(s)
1.    Inizializza Q con una coda vuota
2.    Inizializza il  BFS tree T con un albero vuoto
3.    Poni Discovered[s] = true e Discovered[v] = false per tutti gli altri v
4.    Inserisci s in coda a Q con una enqueue
5.    While(Q non è vuota)
6.       estrai il front di Q con una deque e ponilo in u
7.       Foreach arco (u,v) incidente su u
8.        If(Discovered[v]=false)
9.            poni Discovered[v]= true
10.           aggiungi v in coda a Q con una enqueue
11.           aggiungi (u,v) al BFS tree T
12.    Endif
13.   Endfor
14.   Endwhile
```

Dimostrare per esercizio che il tempo di esecuzione è O(n+m)
(svolto in classe)

Esempio di esecuzione di BFS con coda FIFO

G



elementi della coda durante l'esecuzione (front = elemento più a sinistra)

all'inizio Q= 1

dopo I iterazione del while Q= 2 3

dopo II iterazione del while Q = 3 4 5

dopo III iterazione del while Q = 4 5 7 8

dopo IV iterazione del while Q = 5 7 8

dopo V iterazione del while Q = 7 8 6

dopo VI iterazione del while Q = 8 6

dopo VII iterazione del while Q = 6

dopo VIII iterazione del while Q è vuota

- Viene estratta la sorgente e vengono inseriti i nodi del livello 1.
- Poi man mano vengono estratti i nodi del livello 1 ed inseriti quelli del livello 2.
- Quando non ci sono piu` elementi del livello 1, cominciano ad essere estratti i nodi del livello 2 e via via inseriti quelli del livello 3 e così via.