Moltiplicazione di interi

- Algoritmo che usiamo comunemente ha tempo di esecuzione $O(n^2)$, dove n e\` il numero di cifre di ciascun numero

$$
\begin{array}{r}
2345 \times \\
5382 = \\
\hline
4690 \\
18760 \\
7035 \\
11725 \\
\hline
12620790
\end{array}
$$

Moltiplicazione veloce di interi

Ogni numero intero w di n cifre può essere scritto come $10^{n/2} \times w_s + w_d$

- w_s indica il numero formato dalle $n/2$ cifre più significative di w
- w_d denota il numero formato dalle $n/2$ cifre meno significative.

Ad esempio 124100 può essere scritto come $10^3 \times 124 + 100$

Per moltiplicare due numeri x e y, vale l'uguaglianza

$$
\begin{aligned}
x\,y &= (10^{n/2}\,x_s + x_d)(10^{n/2}\,y_s + y_d) \\
&= 10^n\,x_s\,y_s + 10^{n/2}(x_s\,y_d + x_d\,y_s) + x_d\,y_d
\end{aligned}
$$

Decomposizione: se x e y hanno almeno due cifre, decomponi x nei due interi x_s e x_d aventi ciascuno la metà delle cifre di x e decomponi y nei due interi y_s e y_d aventi ciascuno la metà delle cifre di y.

Ricorsione: calcola ricorsivamente le moltiplicazioni $x_s\,y_s$, $x_s\,y_d$, $x_d\,y_s$ e $x_d\,y_d$.

Ricombinazione: combina i numeri risultanti usando l'uguaglianza riportata sopra.

Moltiplicazione veloce di interi

- l'algoritmo esegue quattro moltiplicazioni di due numeri di $n/2$ cifre (ad un costo di $T(n/2)$), e tre somme di numeri di n cifre (a un costo $O(n)$)
- la moltiplicazione per il valore 10^k può essere realizzata spostando le cifre di k posizioni verso sinistra e riempiendo di 0 la parte destra
- il costo della decomposizione e della ricombinazione è cn

Vale la relazione di ricorrenza

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Moltiplicazione veloce di interi

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Assumiamo per semplicità $n = 2^k$ per un certo k e applichiamo iterativamente

la relazione di ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq cn + 4T(n/2) \leq cn + 4(cn/2 + 4T(n/2^2)) = cn + 2cn + 4^2T(n/2^2) \\ &\leq cn + 2cn + 4^2(cn/2^2 + 4T(n/2^3)) = cn + 2cn + 2^2cn + 4^3T(n/2^3) \\ &\leq \cdots \\ &\leq cn + 2cn + 2^2cn + \ldots + 2^{i-1}cn + 4^iT(n/2^i) \\ &= cn\sum_{j=0}^{i-1} 2^j + 4^iT(n/2^i) = cn2^i - cn + 4^iT(n/2^i) \end{aligned}$$

Ponendo $i = k = \log_2 n$ si ha $T(n) \leq cn^2 - cn + n^2T(1) = O(n^2)$.

Moltiplicazione veloce di interi

- È possibile progettare un algoritmo più veloce?
- Abbiamo visto che $x\,y = 10^n\, x_s\, y_s + 10^{n/2}(x_s\, y_d + x_d\, y_s) + x_d\, y_d$.
- Osserviamo che sommando e sottraendo $x_s y_s + x_d y_d$ a $x_s y_d + x_d y_s$ si ha

$$\begin{aligned} x_s y_d + x_d y_s &= x_s y_d + x_d y_s + x_s y_s + x_d y_d - x_s y_s - x_d y_d \\ &= x_s y_s + x_d y_d + (x_s y_d + x_d y_s - x_s y_s - x_d y_d) \end{aligned}$$

- Poiché $x_s y_d + x_d y_s - x_s y_s - x_d y_d = -(x_s - x_d) \times (y_s - y_d)$ allora possiamo scrivere
$$x_s y_d + x_d y_s = x_s y_s + x_d y_d - (x_s - x_d) \times (y_s - y_d)$$
- quindi il valore $x_s y_d + x_d y_s$ può essere calcolato facendo uso di $x_s y_s$, $x_d y_d$ e $(x_s - x_d) \times (y_s - y_d)$
- Quindi per computare il prodotto xy sono necessarie tre moltiplicazioni e non più quattro come prima

Moltiplicazione veloce di interi

Si ha quindi la relazione di ricorrenza

$$T(n) \le \begin{cases} c_0 & \text{se } n \le 1 \\ 3T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Assumiamo per semplicità $n = 2^k$, per un certo k, e applichiamo iterativamente la relazione di ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &\le cn + 3T(n/2) \le cn + 3(cn/2 + 3T(n/2^2)) = cn + (3/2)cn + 3^2 T(n/2^2) \\ &\le cn + (3/2)cn + 3^2(cn/2^2 + 3T(n/2^3)) = cn + (3/2)cn + (3/2)^2 cn + 3^3 T(n/2^3) \\ &\le \dots \\ &\le cn + (3/2)cn + (3/2)^2 cn + \dots + (3/2)^{i-1} cn + 3^i T(n/2^i) \\ &= cn \sum_{j=0}^{i-1} (3/2)^j + 3^i T(n/2^i) = cn \left(\frac{(3/2)^i - 1}{3/2 - 1} \right) + 3^i T(n/2^i) \\ &= 2cn((3/2)^i - 1) + 3^i T(n/2^i) = 2cn(3/2)^i - 2cn + 3^i T(n/2^i) \end{aligned}$$

Continua nella prossima slide

Ponendo $i = k = \log_2 n$ si ha

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le 2cn(3/2)^{\log_2 n} - 2cn + 3^{\log_2 n} T(1) \\
&= 2cn \left(2^{\log_2 (3/2)}\right)^{\log_2 n} - 2cn + \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 n} T(1) \\
&= 2cn \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 (3/2)} - 2cn + \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 3} T(1) \\
&= 2cn\, n^{\log_2 (3/2)} - 2cn + n^{\log_2 3} T(1) \\
&= 2cn\, n^{\log_2 3 - 1} - 2cn + n^{\log_2 3} T(1) \\
&= 2cn^{\log_2 3} - 2cn + n^{\log_2 3} T(1) \\
&\le 2cn^{\log_2 3} - 2cn + n^{\log_2 3} c_0 \\
&= O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,585})
\end{aligned}
$$

Esempi di relazioni di ricorrenza della forma $T(n) \le \alpha T(n/\beta) + cn^k$

- Moltiplicazione veloce di interi: primo algoritmo

$$
T(n) \le \begin{cases} c_0 & \text{se } n \le 1 \\ 4T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

  Applicazione del risultato provato:
  - si ha che $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $k = 1$
  - $\alpha > \beta^k$, quindi si applica il terzo caso e si ha $T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$
- Moltiplicazione veloce di interi: secondo algoritmo

$$
T(n) \le \begin{cases} c_0 & \text{se } n \le 1 \\ 3T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

  Applicando il risultato dimostrato,
  - si ha che $\alpha = 3$, $\beta = 2$ e $k = 1$
  - $\alpha > \beta^k$, quindi si applica il terzo caso e si ha $T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,585})$

Sommatorie utili

- $$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$
- $$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ per } a \neq 1$$
- $$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \text{ per } 0 < a < 1.$$

Il problema della coppia più vicina

Problema: vogliamo trovare la coppia di punti più vicina tra un insieme di punti del piano.

La distanza tra due punti $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ si calcola con la formula $\sqrt{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ in tempo $O(1)$

Il problema può essere risolto in tempo $O(n^2)$ calcolando le distanze tra tutte le coppie di punti.

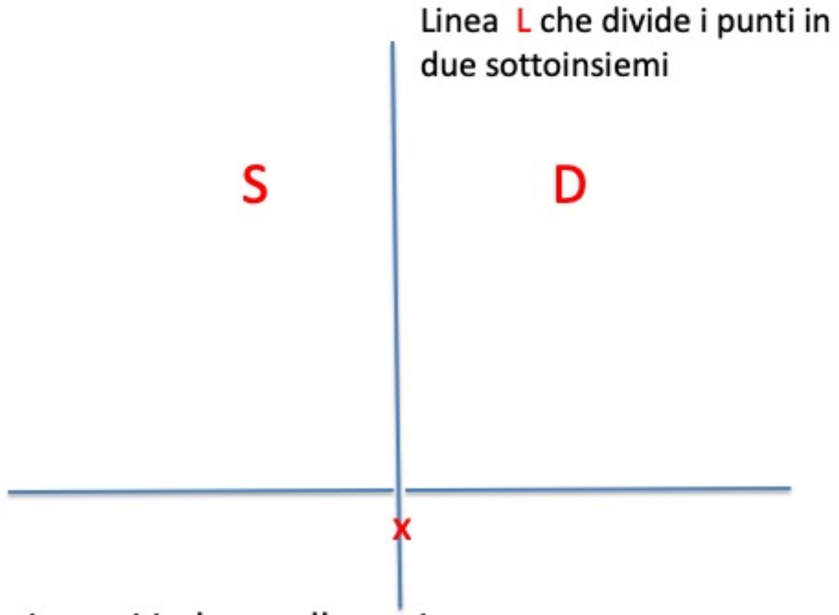
Utilizzando la tecnica del divide et impera, il problema può essere risolto in tempo $O(n \log n)$.

Il problema della coppia più vicina

Idea intuitiva.

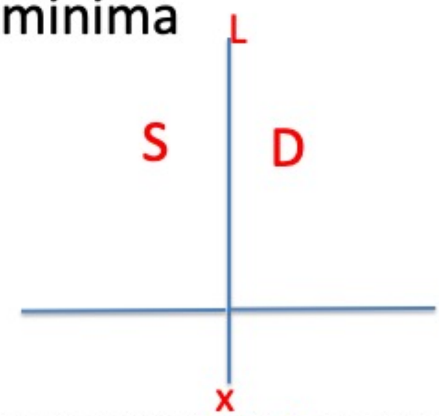
- l'insieme ha cardinalià minore o uguale di una certa costante: usiamo la ricerca esaustiva.
- altrimenti: lo dividiamo in due parti uguali S e D, per esempio quelli a sinistra e quelli a destra di una fissata linea verticale
  - troviamo ricorsivamente le soluzioni per S e quella per D individuando due coppie di punti a distanza minima, d_S e d_D
- soluzione finale: o una delle due coppie già individuate oppure può essere formata da un punto in S e uno in D
- se d_{SD} è la minima distanza tra punti aventi estremi in S e D, la soluzione finale è data dalla coppia di punti a distanza $\min\{d_{SD}, d_S, d_D\}$.

Partizione in due sottoinsiemi di n/2 punti ciascuno



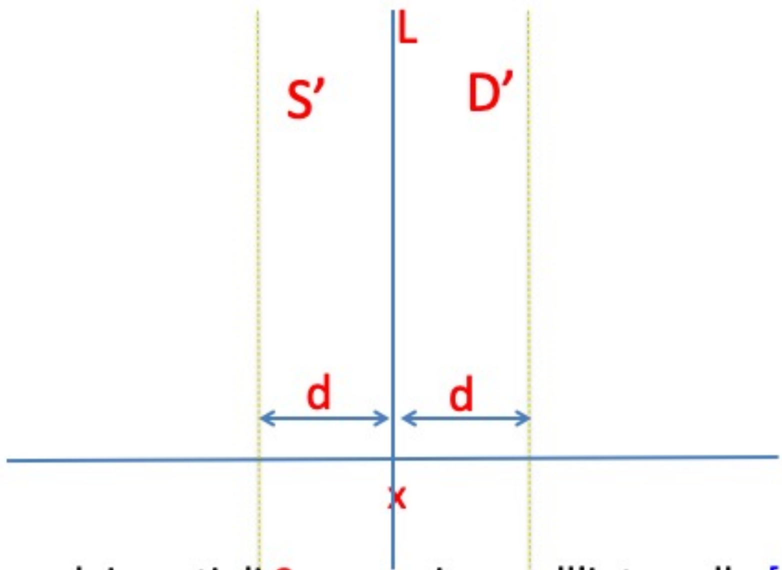
- Ordina i punti in base alle ascisse
- **x**= ascissa punto **pc** centrale nell'ordinamento
- **S**= insieme dei punti a sinistra di **pc** nell'ordinamento
- **D**= insieme dei punti a destra di **pc** nell'ordinamento

Individuazione della coppia di punti a distanza minima



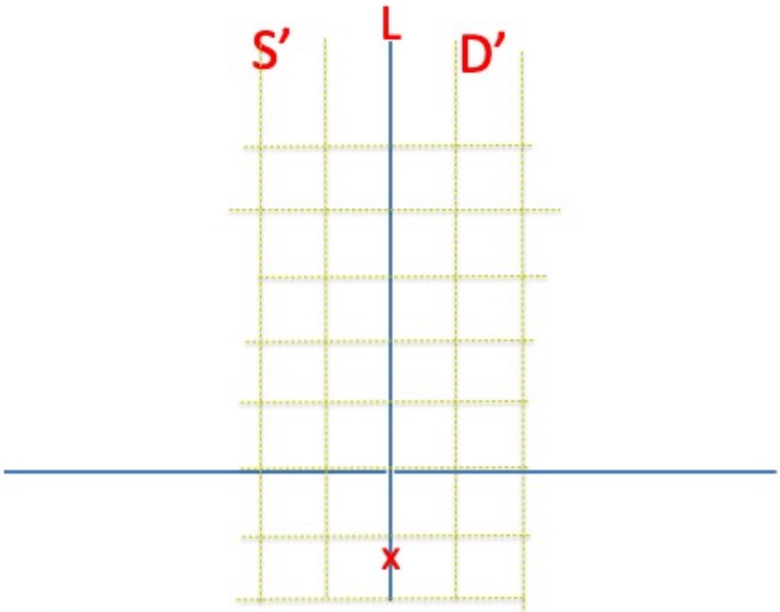
- I 2 punti a distanza minima o sono entrambi in S, o sono entrambi in D, o uno dei due si trova in S e l'altro in D
- Divide et impera:
- Decomposizione: partiziona l'insieme di punti in S e D
- Soluzione sottoproblemi: cerca la coppia a distanza minima d_S in S e la coppia a distanza minima d_D in D. $d=\min\{d_{S,}\ d_D\}$
- Ricombinazione: Cerca tra le coppie (p,q) con p in S e q in D quella a distanza minima d_{SD} e nel far questo ignora le coppie che evidentemente sono a distanza maggiore di d. Alla fine restituisce la coppia con distanza pari a $\min\{d,\ d_{SD}\}$.

Ricerca della coppia (p,q) a distanza minima con p in S e q in D



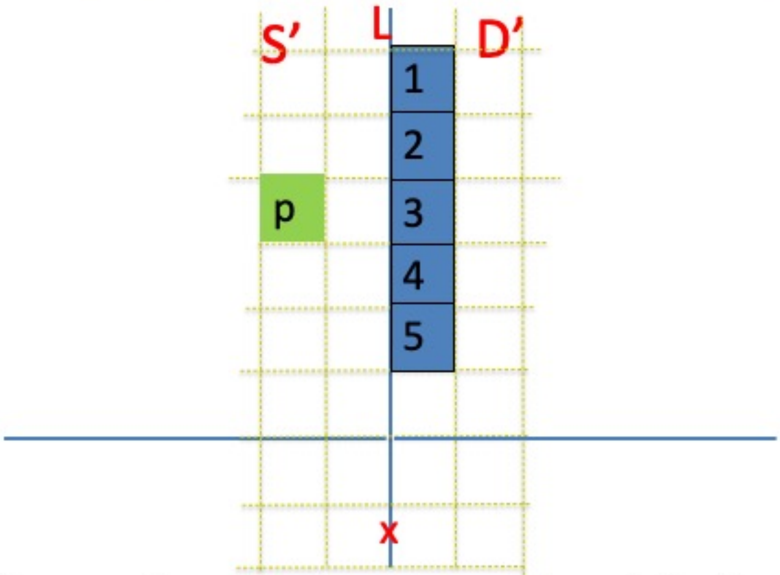
- S'= insieme dei punti di S con ascissa nell'intervallo [x-d,x]
- D'= insieme dei punti di D con ascissa nell'intervallo [x,x+d]
- è sufficiente considerare coppie (p,q) con p in S' e q in D' ' in quanto le altre coppie (p,q) con p in S e q in D sono a distanza maggiore di d

Dividiamo S’ e D’ in tanti quadrati di lato uguale a d/2



- **Osservazione 1:** Ciascun quadrato contiene al piu` un unico punto altrimenti esisterebbe una coppia di punti entrambi in S’ o entrambi in D’, a distanza minore di d

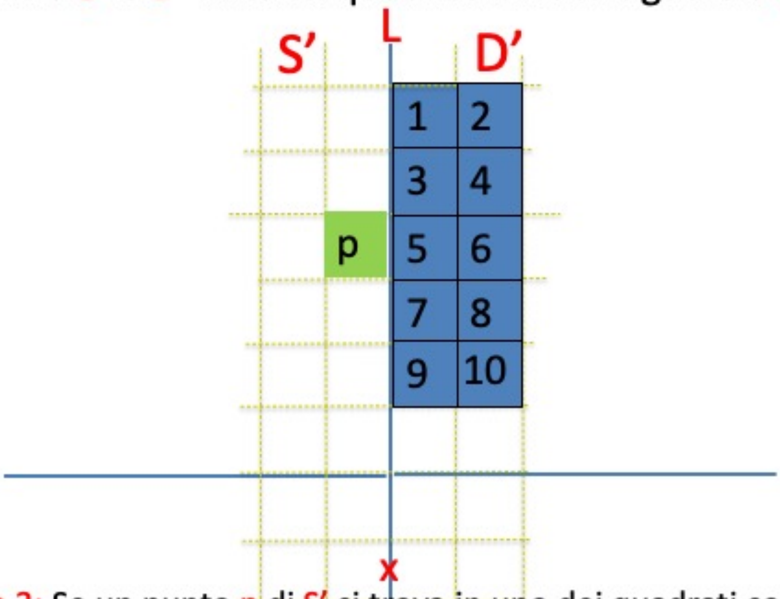
Dividiamo S’ e D’ in tanti quadrati di lato uguale a d/2



Osservazione 2: Se un punto p di S’ si trova in uno dei quadrati più a sinistra allora i punti di D’ a distanza minore di d da p possono trovarsi solo nei quadrati di D’ confinanti con L e in particolare in 5 di questi quadrati, in quello alla stessa altezza del quadrato contenente p, nei 2 quadrati al di sopra di questo e nei due al di sotto.
Ad esempio se p è nel quadrato verde, allora un punto q di D’ a distanza minore di d da p può trovarsi solo in uno dei quadrati in D’ colorati di azzurro

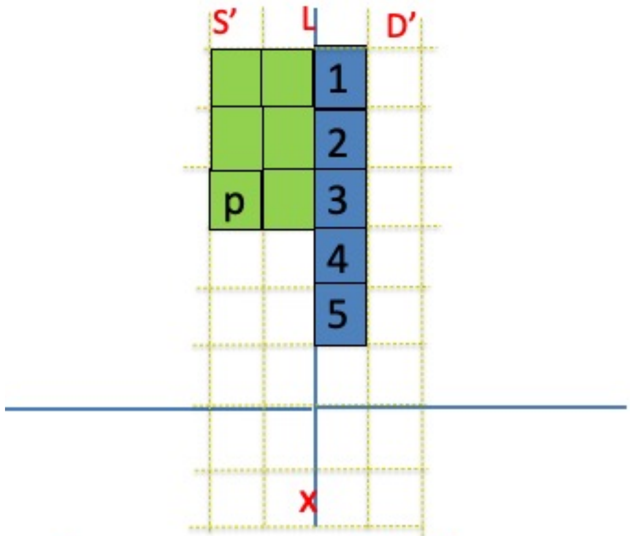
Se q è più in alto rispetto a p allora q si trova in uno dei quadrati 1, 2, 3; altrimenti si trova ir uno dei quadrati 3, 4, 5.

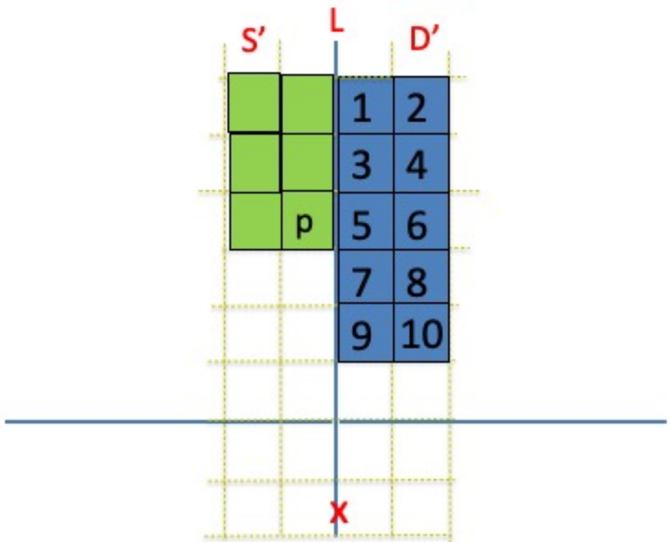
Dividiamo S′ e D′ in tanti quadrati di lato uguale a d/2



- **Osservazione 3:** Se un punto p di S′ si trova in uno dei quadrati confinati con L allora i punti di D′ a distanza minore di d da p possono trovarisi solo nei due quadrati di D′ alla stessa altezza di quello contenente p o nei quattro quadrati al di sopra di questi due quadrati o nei quattro al di sotto.
- Se p si trova nel quadrato verde allora un punto q di D′ a distanza minore di d da p può trovarsi solo in uno dei 10 quadrati in D′ colorati di azzurro
  - Se q è più in alto rispetto a p allora q si trova in uno dei quadrati 1-6; altrimenti q si trova in uno dei quadrati 5-10

Dividiamo S′ e D′ in tanti quadrati di lato uguale a d/2





- P_d = array dei punti di S′ e D′ in ordine non decrescente di altezza
- per ogni punto p in P_d cerchiamo il punto a distanza minima da p tra quelli più in alto di p
- Ciascun quadrato contiene al più 1 punto → un punto q di D′ a distanza al più d da p si trova al più 11 locazioni in avanti nell'array P_d rispetto a p
  - tra p e q possono esserci infatti al più 5 punti di D′ e 5 punti di S′ (II figura): ad esempio se q è più in alto rispetto a p allora tra p e q può esserci al più un punto di D′ per ciascuno dei quadrati 1-6 (meno quello contente q) e un punto di S′ per ciascuno dei quadrati verdi (meno quello contente p)

L'algoritmo che trova la coppia più vicina

Input: P_x = array dei punti ordinato in modo non decrescente rispetto alle ascisse; P_y = array dei punti ordinato in modo non decrescente rispetto alle ordinate, n dimensione degli array P_x e P_y

1. Se $n <= 3$, calcola le distanze tra le tre coppie di punti per trovare la coppia a distanza minima.
2. Se $n > 3$, esegue i seguenti passi:
3. Inserisce nell'array S_x i primi $\lfloor n/2 \rfloor$ punti di P_x e nell'array D_x gli ultimi $\lceil n/2 \rceil$ punti di P_x
4. Inserisce nell'array S_y i primi $\lfloor n/2 \rfloor$ punti di P_x nell'ordine in cui appaiono in P_y e nell'array D_y gli ultimi $\lceil n/2 \rceil$ punti di P_x nell'ordine in cui appaiono in P_y
5. Effettua una chiamata ricorsiva con input S_x, S_y e $\lfloor n/2 \rfloor$ e una chiamata ricorsiva con input D_x, D_y e $\lceil n/2 \rceil$. Siano d_S e d_D i valori delle distanze delle coppie di punti restituite dalla prima e dalla seconda chiamata rispettivamente. Pone $d = \min\{d_S, d_D\}$ e (p, q) uguale alla coppia a distanza d.
6. Copia in P_d i punti a distanza minore di d dalla retta verticale passante per l'elemento centrale di P_x nello stesso ordine in cui appaiono in P_y
7. Per ciascun punto p' in P_d esamina gli 11 punti che seguono p' in P_d; per ciascun punto q' (tra questi 11) computa la sua distanza da p' e se questa risulta minore di d, aggiorna il valore di d e pone $(p, q) = (p', q')$
8. Restituisce la coppia (p, q)

Analisi del costo dell'algoritmo che trova coppia più vicina

Assumiamo per semplicità che n sia un potenza di 2

1. Se n è $<= 3$, il costo è limitato superiormente da una certa costante c_0
2. Se n è > 3, il costo dell'algoritmo è così computato:
3. il costo del passo 3 è $O(n)$
4. il costo del passo 4 è $O(n)$: i punti di P_y vengono scanditi a partire dalla prima locazione.e vengono man mano inseriti in S_y o in D_y a seconda che si trovino in locazioni di P_x di indice minore di $\lfloor n/2 \rfloor$ oppure in locazioni di P_x di indice maggiore o uguale di $\lfloor n/2 \rfloor$
5. Il costo delle due chiamate ricorsive è $2T(n/2)$; il costo delle altre operazioni eseguite al passo 5 è costante
6. Il passo 6 richiede tempo $O(n)$: i punti di P_y vengono scanditi a partire dalla prima locazione e quelli la cui ascissa differisce al più d dall'ascissa dell'elemento centrale di S_x vengono man mano inseriti in P_d
7. il passo 7 richiede tempo $O(n)$ perché P_d contiene al più n punti e per ciascuno di essi vengono computate al più 11 distanze, 11 confronti e 11 aggiornamenti di d, p e q.
8. il passo 8 richiede tempo $O(1)$

Costo computazionale dell'algoritmo per la coppia più vicina definito mediante relazione di ricorrenza

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 3 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_0, c sono costanti.

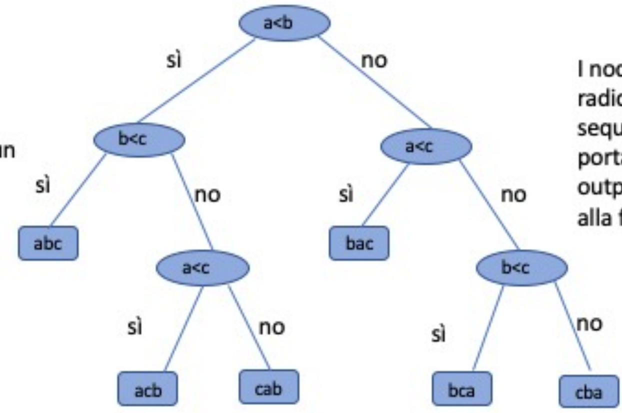
Abbiamo $T(n) = O(n \log n)$.

```
CoppiaPiuVicina(Px,Py,n):
IF(n<=3){Return RicercaEsaustiva(Px,Py,n);}
 ELSE{ p=Px[n/2];}
j=k=0;
FOR(i=0;i<n/2;i=i+1){
Sx[i]=Px[i]; Dx[i]=Px[i+n/2];}
if n%2==1 Dx[n-1]=Px[n-1];
FOR(i=0;i<n;i=i+1){
IF(Py[i].x<=p.x){Sy[j]=Py[i]; j=j+1;}
ELSE {Dy[k]=Py[i]; k=k+1;}
}
(ps,qs)= CoppiaPiuVicina(Sx,Sy,n/2);
(pd,qd)=CoppiaPiuVicina(Dx,Dy,(n+1)/2);
IF(Dist(ps,qs)<Dist(pd,qd)){d=Dist(ps,qs); (p,q)=(ps,qs);}
ELSE {d=Dist(pd,qd); (p,q)=(pd,qd);}
FOR(i=m=0;i<n;i=i+1){
 IF(|Py[i].x-p.x|<=d){Pd[m]=Py[i]; m=m+1;}
}
FOR(i=0;i<m;i=i+1){
  FOR(j=i+1;j<=min{i+11,m};j=j+1){
     IF(Dist(Pd[i],Pd[j])<d){ d=Dist(Pd[i],Pd[j]); (p,q)=(Pd[i],Pd[j]);}
 }
}
RETURN(p,q);
}
```

Albero di decisione di un particolare algoritmo basato sui confronti per ordinare 3 numeri

I nodi interni sono associati ai confronti

Ciascuna foglia e` associata ad un possible ordinamento (permutazione)



I nodi lungo un percorso dalla radice ad una foglia forniscono la sequenza di confronti che hanno portato l'algoritmo a dare in output l'ordinamento associato alla foglia

Altezza dell'albero = massimo numero di confronti fatti in un'esecuzione dall'algoritmo

Limite inferiore per gli algoritmi di ordinamento basati su confronti

- L'albero di decisione di un qualsiasi algoritmo di ordinamento deve avere una foglia per ogni possibile ordinamento dell'input
- Se l'input consiste di n numeri allora l'albero di decisione deve contenere almeno n! foglie. Sia h l'altezza dell'albero.
- Il massimo numero di foglie in un albero binario di altezza h e` 2^h
- Ne consegue che l'altezza h dell'albero deve essere tale che

  $2^h \geq n! \rightarrow h \geq \log n! \geq \log (n/2)^{n/2} = n/2 \log(n) - n/2$

  $\rightarrow h = \Omega(n\log n)$

- Siccome h=numero confronti fatti nel caso pessimo dall'algoritmo allora abbiamo dimostrato che il numero di confronti effettuati nel caso pessimo di da qualsiasi algoritmo di ordinamento basato su confronti e` $\Omega(n\log n)$.