

# Problemi difficili e ricerca esaustiva intelligente

Progettazione di Algoritmi a.a. 2023-24

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

1

- Gli argomenti di questa lezione sono tratti da Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani: Algorithms : Cap. 9, fino al paragrafo 9.1.2 (incluso)
- Nella lezione vengono inoltre illustrati, in modo informale, alcuni concetti di teoria della complessità richiamati nell'introduzione al capitolo.

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

2

## Introduzione

Finora ci siamo interessati alla **progettazione** di algoritmi **efficienti**

Efficienza = polinomiale

Tecniche: divide et impera, greedy, programmazione dinamica

Però..... esistono dei problemi

- Che non sappiamo risolvere efficientemente
- Né sappiamo dimostrare che non esistono soluzioni efficienti

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

3

## $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

**Problema decisionale**: consiste nel rispondere ad una domanda che ammette solo sì o no come risposta

Informalmente:

**P** è la classe dei problemi decisionali **risolvibili** in tempo polinomiale

Es.: esiste un cammino di costo al più  $k$  fra due vertici?

Usa Dijkstra per trovare il cammino minimo e se questo ha costo al più  $k$  rispondi sì; altrimenti rispondi no.

**NP** è la classe dei problemi decisionali **verificabili** in tempo polinomiale,

informalmente, problemi per cui è possibile esibire una prova che esiste una soluzione al problema (risposta al problema decisionale è sì) ed è possibile verificare in tempo polinomiale che essa è una prova dell'esistenza di una soluzione al problema

Es.: cammino hamiltoniano: Dato un grafo, determinare se esiste un percorso che tocca i vertici del grafo esattamente una volta.

Se ci viene fornita in input una sequenza di vertici possiamo in tempo polinomiale verificare che si tratta di un percorso che tocca ciascun vertice del grafo esattamente una volta

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

4

## $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ?

Chiaramente  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$ .

Ma  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ? Oppure  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ? **Non si conosce la risposta!**

$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  implicherebbe che ogni problema in NP può essere risolto in tempo polinomiale.

per chi resolvesse il problema  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  ? c'è in palio...



[Clay Mathematics Institute](https://www.claymaths.org/)

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

5

## Riduzione polinomiale

- Supponiamo ora di sapere che  $P'$  non è in  $\mathcal{P}$  (di fatto non è possibile dire con certezza che  $P'$  non è in  $\mathcal{P}$ )
  - Si può vedere che se  $P' \leq P$  allora anche  $P$  non è in  $\mathcal{P}$
- Questa implicazione ha portato Cook e Levin a definire una classe di problemi decisionali apparentemente intrattabili: la classe dei problemi  $\mathcal{NP}$  - *completi*. Intuitivamente, i problemi  $\mathcal{NP}$ -completi sono problemi della classe  $\mathcal{NP}$  che sono "difficili da risolvere" almeno quanto qualsiasi problema in  $\mathcal{NP}$ .

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

6

## Riduzione polinomiale

- In alcuni casi è possibile risolvere in tempo polinomiale un problema  $P$  trasformandolo in un problema  $P'$  per il quale si sa come trovare una soluzione in tempo polinomiale
- La trasformazione deve richiedere tempo polinomiale altrimenti la soluzione di  $P$  attraverso la soluzione per  $P'$  non sarebbe polinomiale.
  - Una riduzione polinomiale di un problema  $P$  ad un problema  $P'$  è una coppia di algoritmi polinomiali, uno che trasforma ogni istanza  $I$  di  $P$  in un'istanza  $I'$  di  $P'$ , e l'altro che trasforma una soluzione per l'istanza  $I'$  in una soluzione per l'istanza  $I$ .
  - Se esiste una tale riduzione, diciamo che  $P$  è riducibile polinomialmente a  $P'$ , e scriviamo  $P \leq P'$ ; questa relazione è chiaramente sia riflessiva che transitiva.
- Esempio: max spanning tree  $\leq$  min spanning tree
- Per risolvere un'istanza di max spanning tree basta sostituire ciascun peso con il suo negato. Una volta trovato il min spanning tree (con uno degli algoritmi noti) per il nuovo grafo, questo sarà anche un max spanning tree per il grafo originario.

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

7

## Problemi NP-completi

- I problemi NP-completi sono problemi in NP difficili **almeno** quanto qualsiasi altro problema in NP
  - Se si trovasse un algoritmo polinomiale per uno solo di questi problemi allora qualsiasi altro problema in NP risulterebbe risolvibile in tempo polinomiale ( $P=NP$ )
- Il problema del cammino Hamiltoniano è NP-completo
  - Se si trovasse un algoritmo polinomiale per questo problema allora ogni problema in NP potrebbe essere risolto in tempo polinomiale

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

8

## Problemi NP-completi

- Se qualcuno fosse in grado di trovare un algoritmo polinomiale per uno qualsiasi dei problemi NP-completi, questa persona vincerebbe



- Pochi credono che ciò sia possibile... La maggior parte degli esperti di teoria della complessità computazionale propende per l'ipotesi  $P \neq NP$

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

9

## Riduzione polinomiale

- Def. un problema  $P$  in  $\mathcal{NP}$  è  $\mathcal{NP}$  - *completo* se  $P' \leq P$  per ogni problema  $P'$  in  $\mathcal{NP}$ .
- Per dimostrare che un problema  $P$  in  $\mathcal{NP}$  è  $\mathcal{NP}$  - *completo*, è sufficiente trovare una riduzione polinomiale **da** qualche problema  $P'$  che si sa essere  $\mathcal{NP}$  - *completo* **a**  $P$ .
  - $P' \leq P$  e  $P' \in \mathcal{NP}$ -completo  $\Rightarrow P \in \mathcal{NP}$ -completo
    - (se  $P$  fosse risolvibile in tempo polinomiale lo sarebbe anche  $P' \rightarrow$  contraddizione al fatto che  $P'$  è NP-completo)
  - Siccome per definizione di  $\mathcal{NP}$  - *completo* ogni problema  $\mathcal{NP}$  - *completo* è riducibile a  $P'$  allora per la proprietà transitiva ogni problema  $\mathcal{NP}$  - *completo* è riducibile a  $P$
- Bisognava cominciare da un primo problema  $\mathcal{NP}$  - *completo*
  - Cook e Levin dimostrarono che esistono effettivamente problemi  $\mathcal{NP}$  - *completi*. Più precisamente, hanno dimostrato che il problema di soddisfacibilità per le formule booleane è  $\mathcal{NP}$  - *completo*

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

10

## Problemi non decisionali

- Se un problema non è un problema decisionale possiamo comunque classificarlo secondo le modalità viste prima tra i problemi risolvibili in modo efficiente o in quelli difficili
- Problema NP-hard: problema (non necessariamente in NP) la cui soluzione in tempo polinomiale permetterebbe la soluzione in tempo polinomiale di ogni problema in NP.

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

11

## Problemi di ottimizzazione

- Un modo per classificare un problema di ottimizzazione come problema difficile è di formularlo come un problema decisionale
- Se la versione decisionale è NP-completa allora il problema è NP-hard
- Esempio: Problema del commesso viaggiatore
  - Dato un grafo non direzionato con dei costi non negativi sugli archi, trovare un ciclo di costo minimo che passa esattamente una volta attraverso ciascun nodo
  - Possiamo riformularlo come “Esiste un ciclo che passa esattamente una volta attraverso ciascun nodo e ha costo al più  $k$ ?”
  - E' evidente che il problema di ottimizzazione non è più semplice da risolvere della sua versione decisionale. Se conosco la soluzione del problema di ottimizzazione posso rispondere immediatamente alla domanda del problema decisionale.

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

12

## Il problema della fattorizzazione di un intero

- La difficoltà di alcuni problemi non è solo una questione teorica e non deve essere in generale vista come una cosa negativa.
- Problema della fattorizzazione di un intero in una delle sue versioni più note: dato un intero positivo  $n = a \cdot b$ , con  $a$  e  $b$  primi, trovare  $a$  e  $b$ .
  - Se  $a$  e  $b$  sono primi molto grandi è molto difficile risolverlo, ma se qualcuno mi suggerisce  $a$  e  $b$ , posso facilmente verificare che  $n = a \cdot b$
- Il problema della fattorizzazione di interi è usato nel sistema crittografico RSA che è alla base del commercio elettronico!
- se si trovasse un algoritmo efficiente per fattorizzare un intero allora non potremmo più fare affidamento su RSA.

**N.B. non è noto se questo problema è NP-hard.**

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

13

## Ricerca esaustiva

Supponiamo di dovere fornire un algoritmo per risolvere un problema.

Se non riusciamo a trovare un algoritmo efficiente con nessuna tecnica studiata, potrebbe trattarsi di un problema "difficile"!

Che fare?

Unica possibilità: la **forza bruta!**

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A. DE BONIS

14

## Ricerca esaustiva?

Ricerca esaustiva su tutto lo **spazio delle soluzioni**.

In linea di principio risolve **qualsiasi** problema!

Ma in quanto tempo?

Per la fattorizzazione di  $n$ , se  $a$  e  $b$  avessero 2048 bit, non basterebbe una vita!

Tuttavia la tecnica può essere utilizzata per istanze **piccole**.

Vedremo adesso degli **accorgimenti** per migliorare l'efficienza di algoritmi di ricerca esaustiva

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

15

## Ricerca esaustiva intelligente

**Backtracking**: a volte si può rifiutare una possibile soluzione esaminando solo una sua piccola parte

**Branch and bound**: in un problema di ottimizzazione, a volte si può scartare una possibile soluzione senza averla esaminata completamente, perché il suo valore non può essere ottimale

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

16



## Formule booleane e soddisfacibilità

Una formula (espressione) booleana  $\phi$  è **soddisfacibile** se esiste un assegnamento delle sue variabili che la rende Vera/ 1

Es.:  $\phi = (a + \neg b) \cdot (\neg a)$  è **soddisfacibile** perchè  $\phi = 1$  assegnando  $a=0, b=0$   
 $\phi = (a) \cdot (\neg a)$  **non** è soddisfacibile

Stabilire se una formula booleana è soddisfacibile è «**difficile**» (problema NP-Completo)

Ogni formula booleana può essere espressa in Forma Normale Congiuntiva, in breve CNF (espressione POS).

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

17

## Il problema SAT

SAT (Satisfiability)

INPUT: una formula booleana

OUTPUT: SI, se la formula è soddisfacibile; NO, altrimenti

CNF - SAT

INPUT: una formula booleana in CNF

OUTPUT: SI, se la formula è soddisfacibile; NO, altrimenti

SAT e CNF-SAT sono due problemi **decisionali** NP-completi. Qui ci occuperemo di CNF-SAT

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

18

## Risolvere SAT

**Esempio:**  $\phi = (a + b + c + \neg d) \cdot (a + b) \cdot (a + \neg b) \cdot (\neg a + c) \cdot (\neg a + \neg c)$

Per vedere se  $\phi$  è soddisfacibile posso valutare tutti i 16 assegnamenti possibili

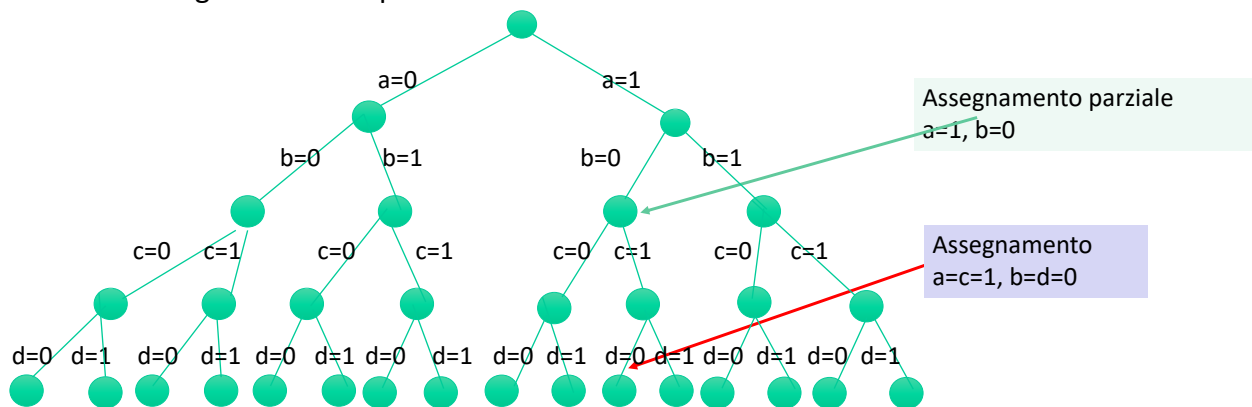
Dato uno specifico assegnamento, è facile verificare se esso rende  $\phi$  Vera/1 o Falsa/0.

Per esempio: per  $a=1, b=0, c=1, d=0$  si ha

$$\begin{aligned} \phi &= (1 + 0 + 1 + \neg 0) \cdot (1+0) \cdot (1 + \neg 0) \cdot (\neg 1 + 1) \cdot (\neg 1 + \neg 1) = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

## Ricerca esaustiva e albero delle decisioni

Potremmo organizzare tale processo tramite un **albero delle decisioni**



L'albero avrà  $2^n$  foglie, se  $n$  è il numero delle variabili. Dovremmo valutare un numero **esponenziale** di possibili assegnamenti.

## Backtracking

Cominciamo dalla radice costruendo l'albero in maniera incrementale.

A volte potremo scartare alcuni assegnamenti, fermandoci ad un assegnamento parziale, dal quale è inutile proseguire.

Allora **backtrack**: torniamo indietro per provare altre strade.

## Backtracking e SAT

**Esempio:**  $\phi(a,b,c,d) = (a + b + c + \neg d) \cdot (a + b) \cdot (a + \neg b) \cdot (\neg a + c) \cdot (\neg a + \neg c)$

Partiamo ponendo  $a=0$

$\phi(0,b,c,d) = (0 + b + c + \neg d) \cdot (b) \cdot (\neg b) \cdot (1) \cdot (1) = (b + c + \neg d) \cdot (b) \cdot (\neg b)$

Sottoproblema:  $\phi(b,c,d) = (b + c + \neg d) \cdot (b) \cdot (\neg b)$  è soddisfacibile?

Poniamo  $b=0$ .

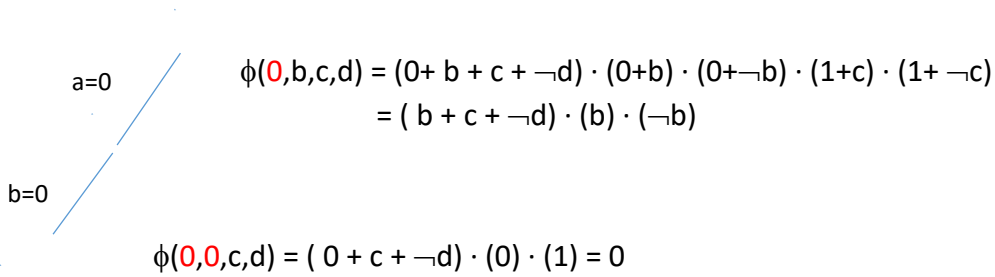
$\phi(0,0,c,d) = (c + \neg d) \cdot (0) \cdot (1) = 0$

indipendentemente dagli assegnamenti per  $c$  e  $d$ : **Backtrack!**

# Valutazione parziale

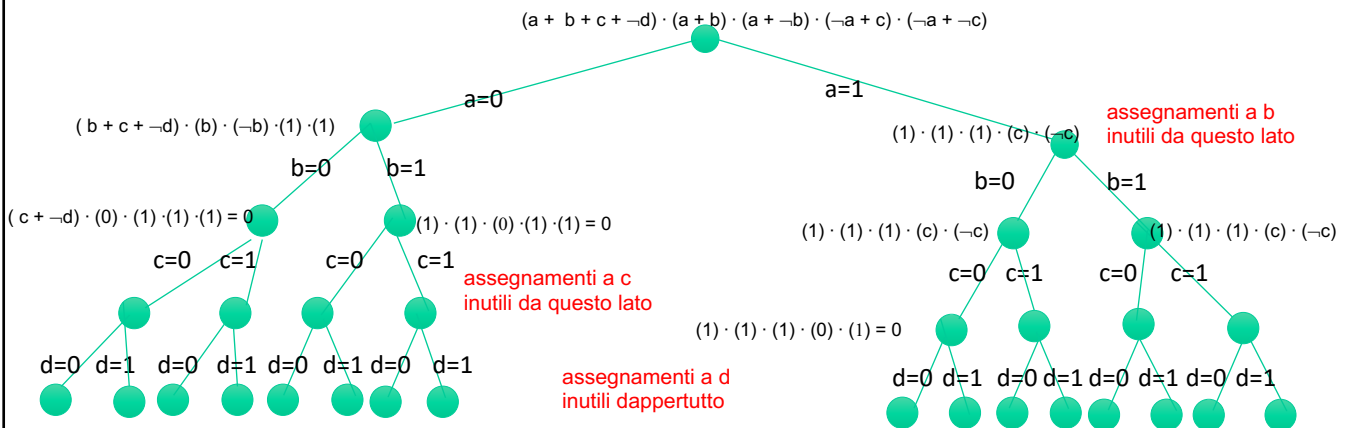
Nell'albero delle decisioni:

$$\phi(a,b,c,d) = (a + b + c + \neg d) \cdot (a + b) \cdot (a + \neg b) \cdot (\neg a + c) \cdot (\neg a + \neg c)$$



23

Possiamo fermarci dopo aver considerato 4 assegnamenti parziali



24

Alla fine....

Possiamo affermare che la formula non è soddisfacibile.

Avendo risparmiato un bel po' di calcoli

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2028-29  
A.DE BONIS

25

## Backtracking

Per ogni sottoproblema considerato esegue un test con 3 possibili risultati:

- Failure:** il sottoproblema non ha soluzioni  
(es.:  $\phi = 0$  in un nodo interno)
- Success:** trovo una soluzione al problema di partenza  
(es.:  $\phi = 1$  in una foglia)
- Uncertainty:** bisogna proseguire  
(es.:  $\phi = ?$ )

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

26

## Schema backtrack

```

Start with some problem  $P_0$ 
Let  $\mathcal{S} = \{P_0\}$ , the set of active subproblems
Repeat while  $\mathcal{S}$  is nonempty:
  choose a subproblem  $P \in \mathcal{S}$  and remove it from  $\mathcal{S}$ 
  expand it into smaller subproblems  $P_1, P_2, \dots, P_k$ 
  For each  $P_i$ :
    If test( $P_i$ ) succeeds: halt and announce this solution
    If test( $P_i$ ) fails: discard  $P_i$ 
    Otherwise: add  $P_i$  to  $\mathcal{S}$ 
Announce that there is no solution
    
```

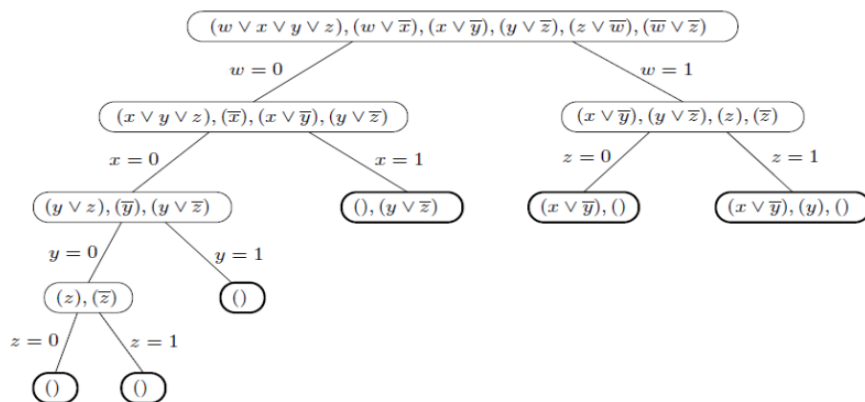
Nonostante la complessità resti **esponenziale**, il backtracking può essere molto efficiente nella pratica

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

27

## Esempio del libro

**Figure 9.1** Backtracking reveals that  $\phi$  is not satisfiable.



Qui ( ) indica una «clausola vuota» cioè insoddisfacibilità

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

28

## Branch and bound

La stessa idea del backtracking può essere estesa a problemi di **ottimizzazione**.  
Ogni soluzione ha un valore e cerchiamo una soluzione ottima (minima o massima).  
Nel seguito considereremo problemi di **minimizzazione**.

Anche stavolta considereremo soluzioni parziali a sottoproblemi.

Per **escludere** una soluzione parziale dobbiamo essere certi che il suo **costo supera** quello di un'altra soluzione già calcolata. Meglio: il costo di tutte le soluzioni sviluppate a partire da essa hanno un costo superiore ad un certo limite (**bound**).

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

29

## Il commesso viaggiatore

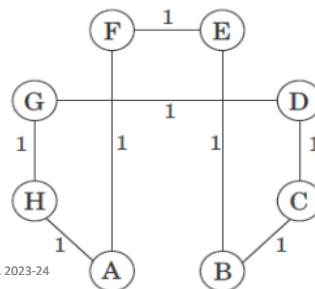
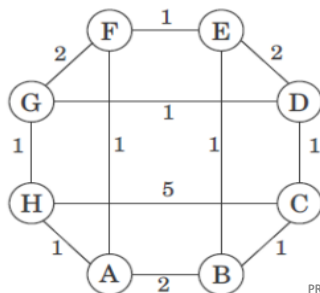
Il problema del commesso viaggiatore, in breve TSP (Traveling Salesman Problem) è il seguente.

TSP

INPUT: Un grafo completo  $G=(V,E)$  con dei costi sugli archi

OUTPUT: Un ciclo di costo minimo che passa per ogni vertice una ed una sola volta (giro di costo minimo)

nel grafo sono stati rimossi gli archi con peso molto grande



PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

30

## Risolvere TSP

La **ricerca esaustiva** valuta ogni possibile giro del grafo a partire da un certo nodo (non ha importanza quale)

In genere si assume che il grafo è **completo** (un arco tra ciascuna coppia di nodi) per cui occorre considerare tutte le sequenze di  $n+1$  vertici del grafo tale che

La sequenza comincia e finisce in uno stesso vertice (non ha importanza quale)

I nodi compresi tra il primo e l'ultimo compaiono esattamente una volta nella sequenza

Numero di sequenze =  $(n-1)!$

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

31

## Risolvere TSP: albero delle decisioni

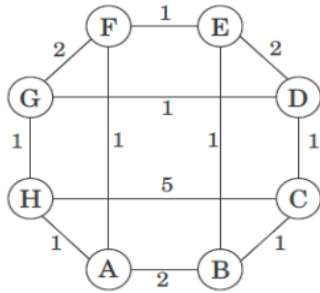
- Il nodo prescelto come punto di partenza diventa **radice** dell'albero delle decisioni.
- Ogni foglia rappresenta un **giro**.
- Ogni nodo interno un **cammino parziale** dal nodo di partenza.
  - Un nodo interno  $v$  ha come figli i nodi ad esso adiacenti che non sono stati ancora attraversati dal **cammino parziale** che termina in  $v$ .
- N.B. Il numero di foglie è esponenziale nel numero di nodi del grafo

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

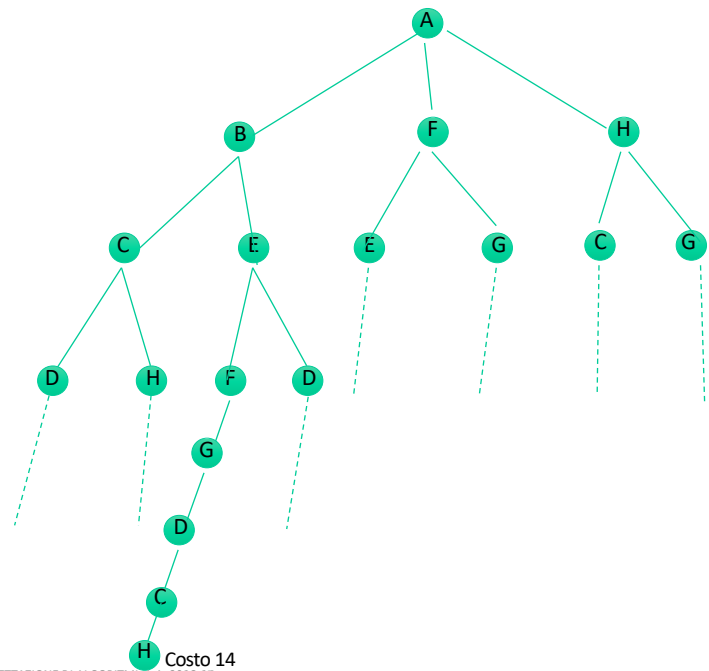
32



## Albero delle decisioni



N.B. Il grafo input non è completo: si assume che siano stati tolti gli archi più costosi che non possono far parte della soluzione ottima.



PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

33

## Risolvere TSP con Branch and Bound

- Partendo dal nodo prescelto come punto di partenza dall'algoritmo, costruiamo in modo incrementale l'albero delle decisioni.
- Il nodo prescelto diventa **radice**.
- Ogni foglia rappresenta un **giro**.
- Ogni nodo interno un **cammino parziale** dal nodo di partenza.
- **Nel costruire l'albero delle decisioni in modo incrementale, ogni volta che arriviamo in un nodo interno valutiamo se estendere ulteriormente il cammino parziale che termina in quel nodo.**

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

34

## Limite inferiore

Per escludere una soluzione/cammino parziale bisogna essere sicuri che il **costo** di ogni suo completamento **porti ad un costo maggiore di un certo limite inferiore**.

Sia  $x$  il vertice di partenza (nell'esempio  $x=A$ )

Ogni nodo interno  $v$  dell'albero rappresenta un cammino  $P$  semplice da  $x$  a  $v$  che passa per un certo insieme di nodi  $S$  **che include anche**  $x$  e  $v$ . Indichiamo con  $[x, S, v]$  questo cammino parziale.

Vogliamo trovare un limite inferiore al costo di qualsiasi giro completo che inizia con  $P$ .

Se tale limite è  $\geq$  del costo di un giro già noto, possiamo evitare di esplorare il sottoalbero di  $v$ .

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

35

## Limite inferiore per TSP

Come limitare inferiormente il costo di un percorso che comincia con  $P$ ?

Osserviamo che un tale percorso proseguirà da  $v$  attraversando solo nodi di  $V \setminus S$  e poi raggiungerà di nuovo il punto di partenza  $x$ .

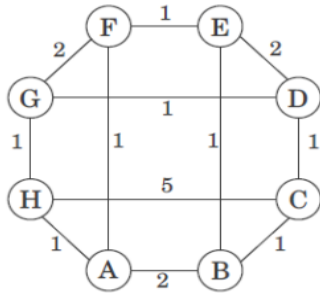
Il **costo del percorso che resta ancora da fare** è  $\geq$  della somma di:

1. L'arco di costo minimo tra  $v$  ed un vertice in  $V \setminus S$
2. L'arco di costo minimo tra un vertice in  $V \setminus S$  e  $x$
3. Il costo di un MST del sottografo formato dai nodi in  $V \setminus S$  e dagli archi di  $E$  che incidono su questi nodi (sottografo indotto dai nodi in  $V \setminus S$ )
  - NB: un percorso semplice in  $V \setminus S$  non può avere costo inferiore all'albero di costo minimo che congiunge tutti i vertici in  $V \setminus S$ .

PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
A.DE BONIS

36

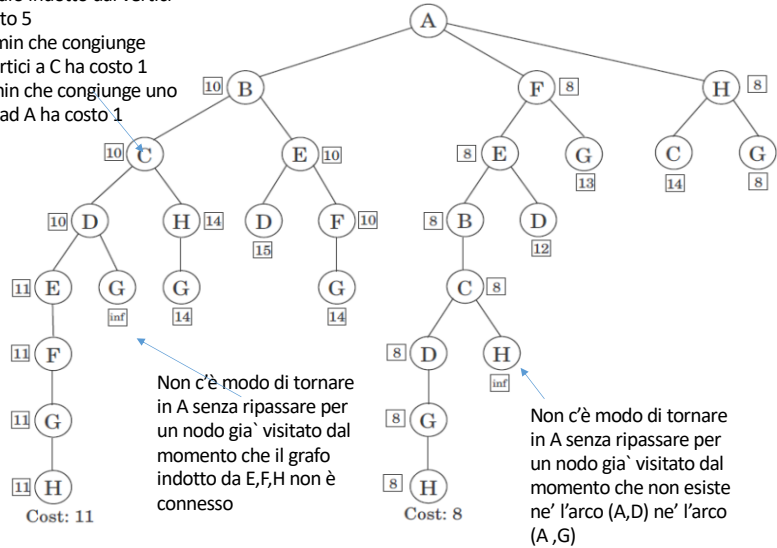
## Branch and bound: esempio



MST del sottografo indotto dai vertici D,E,F,G,H ha costo 5  
 L'arco di costo min che congiunge uno di questi vertici a C ha costo 1  
 L'arco di costo min che congiunge uno di questi vertici ad A ha costo 1

I numeri nei quadrati sono il **limite** ottenuto sul giro che inizia in quel modo.

Alla fine considereremo soltanto **11 giri**



PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
 A.DE BONIS

37

## Esempio

Consideriamo il cammino parziale  $P = (A, B)$

Costo di  $P = 2$

Costo di una qualsiasi estensione di  $P \geq 8$

1. 1 = costo arco BC
2. 1 = costo arco AH
3. 6 costo MST relativo a  $\{C, D, E, F, G, H\}$

L'arco AB ha costo 2 per cui il costo di un giro completo che inizia con  $P$  è  $\geq 10$



PROGETTAZIONE DI ALGORITMI A.A. 2023-24  
 A.DE BONIS

38

## Schema algoritmo branch and bound

Start with some problem  $P_0$

Let  $\mathcal{S} = \{P_0\}$ , the set of active subproblems

bestsofar =  $\infty$

Repeat while  $\mathcal{S}$  is nonempty:

    choose a subproblem (partial solution)  $P \in \mathcal{S}$  and remove it from  $\mathcal{S}$

    expand it into smaller subproblems  $P_1, P_2, \dots, P_k$

    For each  $P_i$ :

        If  $P_i$  is a complete solution: update bestsofar

        else if  $\text{lowerbound}(P_i) < \text{bestsofar}$ : add  $P_i$  to  $\mathcal{S}$

return bestsofar