Programmazione dinamica (V parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23

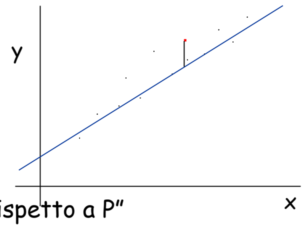
Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

Segmented Least Squares

- Minimi quadrati.
  - Problema fondazionale in statistica e calcolo numerico.
  - Dato un insieme P di n punti del piano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
  - Trovare una linea L di equazione y = ax + b che minimizza la somma degli errori quadratici.

$$Error(L,P) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$



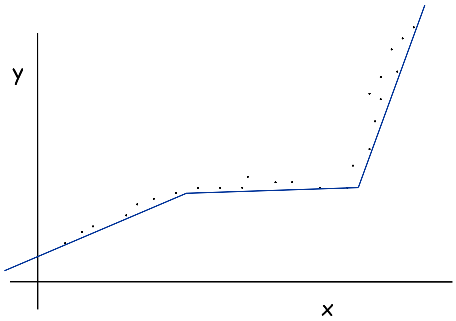
  - Chiameremo questa quantita` "Errore di L rispetto a P"
  - Chiameremo "Errore minimo per P", il minimo valore di Error(L,P) su tutte le possibili linee L
- Soluzione. Analisi $\Rightarrow$ il minimo errore per un dato insieme P di punti si ottiene usando la linea di equazione y = ax + b con a e b dati da

$$a = \frac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i - a \sum_i x_i}{n}$$

Segmented Least Squares

- L'errore minimo per alcuni insiemi input di punti puo` essere molto alto a causa del fatto che i punti potrebbero essere disposti in modo da non poter essere ben approssimati usando un'unica linea.

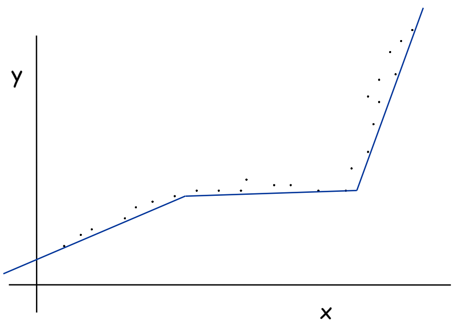
Esempio: i punti in figura non possono essere ben approssimati usando un'unica linea. Se pero` usiamo tre linee riusciamo a ridurre di molto l'errore.



Segmented Least Squares

Segmented least squares.

- In generale per ridurre l'errore avremo bisogno di una sequenza di linee intorno alle quali si distribuiscono sottoinsiemi di punti di P.
- Ovviamente se ci fosse concesso di usare un numero arbitrariamente grande di segmenti potremmo ridurre a zero l'errore:
  - Potremmo usare una linea per ogni coppia di punti consecutivi.
- Domanda. Qual e` la misura da ottimizzare se vogliamo trovare un giusto compromesso tra accuratezza della soluzione e parsimonia nel numero di linee usate?



Il problema e` un caso particolare del problema del change detection che trova applicazione in data mining e nella statistica: data una sequenza di punti, vogliamo identificare alcuni punti della sequenza in cui avvengono delle variazioni significative (in questo caso quando si passa da un'approssimazione lineare ad un'altra)

Segmented Least Squares

Formulazione del problema Segmented Least Squares.

- Dato un insieme P di n punti nel piano (x_1, y_1), (x_2, y_2) , . . . , (x_n, y_n) con $x_1 < x_2 < ... < x_n$, **vogliamo partizionare P in un certo numero m di sottoinsiemi $P_1, P_2, \dots, P_m$ in modo tale che**
- Ciascun P_i e` costituito da punti contigui lungo l'asse delle ascisse
  - P_i viene chiamato segmento
- La sequenza di linee $L_1, L_2, \dots, L_m$ ottime rispettivamente per $P_1, P_2, \dots, P_m$ minimizzi la somma delle 2 seguenti quantita:

1) La somma E degli m errori minimi per $P_1, P_2, \dots, P_m$ (l'errore minimo per il segmento P_i e` ottenuto dalla linea L_i)

$$E = Error(L_1, L_2, \dots, L_m; P_1, P_2, \dots, P_m) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(x_i, y_i) \in P_j} (y_i - a_j x_i - b_j)^2$$

2) Il numero m di linee (pesato per una certa costante input C>0)

La quantita` da minimizzare e` quindi E+ Cm (penalita`) .

Segmented Least Squares

Formulazione del problema Segmented Least Squares.

- Input: insieme P di n punti nel piano (x_1, y_1), (x_2, y_2) , . . . , (x_n, y_n) con $x_1 < x_2 < ... < x_n$, e una costante C>0
- Obiettivo: Trovare una partizione $P_1, P_2, \dots, P_m$ di P tale che

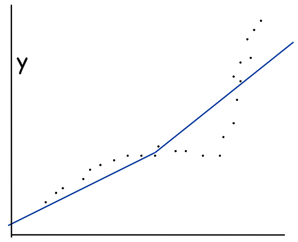
1. ciascun P_i e` costituito da punti contigui lungo l'asse delle ascisse
2. la penalita` E + C m sia la piu` piccola possibile

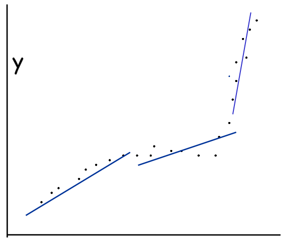
- dove E e` la somma degli m errori minimi per $P_1, P_2, \dots, P_m$

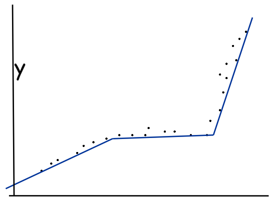
$$E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(x_i, y_i) \in P_j} (y_i - a_j x_i - b_j)^2$$

Per ogni j nella sommatoria a_j e b_j sono ottenuti applicando il metodo dei minimi quadrati ai punti di P_j

Segmented Least Squares







per ciascuna delle tre partizioni, le linee sono ottenute applicando il metodi dei minimi quadrati ai punti in ciascun segmento della partizione

Segmented Least Squares

- Il numero di partizioni in segmenti dei punti in P e` esponenziale → ricerca esaustiva e` inefficiente
- La programmazione dinamica ci permette di progettare un algoritmo efficiente per trovare una partizione di penalita` minima
- A differenza del problema dell'Interval Scheduling Pesato in cui utilizzavamo una ricorrenza basata su due possibili scelte, per questo problema utilizzeremo una ricorrenza basata su un numero polinomiale di scelte.

Approccio basato sulla programmazione dinamica

Notazione

- Sia p_j un qualsiasi punto input,
  OPT(j) = costo minimo della penalita` per i punti $p_1, p_2, \ldots, p_j$.

- Siano p_i e p_j due dei punti input, con $i \leq j$,
  e(i,j) = minimo errore per l'insieme di punti $\{p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j\}$.

$$e(i,j) = \sum_{k=i}^{j} (y_k - a_{ij} x_k - b_{ij})^2$$

  dove a_{ij} e b_{ij} sono ottenuti applicando il metodo dei minimi quadrati ai punti $p_1, p_2, \ldots, p_j$

Per computare OPT(j), osserviamo che

- se l'ultimo segmento nella partizione di $\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$ e` costituito dai punti $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$ per un certo i, allora
- penalita` = OPT(i-1) +e(i,j) + C .
- Il valore della penalita` cambia in base alla scelta di i
- Il valore OPT(j) e` ottenuto in corrispondenza dell'indice i che minimizza OPT(i-1) +e(i,j) + C .

Approccio basato sulla programmazione dinamica

- Da quanto detto nella slide precedente, si ottiene la seguente formula per OPT(j):

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0 \\ \min\limits_{1 \leq i \leq j} \left\{ \; e(i,j) + C + OPT(i-1) \right\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Segmented Least Squares: Algorithm

```
INPUT: n, p1,…,pn, c

Segmented-Least-Squares() {
   M[0] = 0
   for j = 1 to n
      for i = 1 to j
         compute the least square error e(i,j) for
         the segment pi,…, pj

   for j = 1 to n
      M[j] = min 1 ≤ i ≤ j (e(i,j) + c + M[i-1])

   return M[n]
}
```

Tempo di esecuzione. $O(n^3)$.

- Collo di bottiglia = dobbiamo computare il valore e(i, j) per $O(n^2)$ coppie i, j. Usando la formula per computare la minima somma degli errori quadratici, ciascun e(i,j) e` computato in tempo O(n)

Algoritmo che produce la partizione

```
Find-Segments(j)
  If j = 0 then
    Output nothing
  Else
    Find an i that minimizes e_{i,j} + C + M[i − 1]
    Output the segment {p_i, . . . , p_j} and the result of
          Find-Segments(i − 1)
  Endif
```

Esercizio

- Per il saggio di fine anno gli alunni di una scuola saranno disposti in fila secondo un ordine prestabilito e **non modificabile**. La fila sara` suddivisa in gruppi contigui e ciascun gruppo dovra` intonare una parte dell'inno della scuola. Il maestro di canto ha inventato un dispositivo che permette di valutare come si fondono le voci di un gruppo tra di loro. Piu` **basso** e` il punteggio assegnato dal dispositivo ad un gruppo, migliore e` l'armonia delle voci. Il maestro vuole ripartire la fila di alunni in gruppi contigui in modo da ottenere entrambi i seguenti obiettivi
  - la somma dei punteggi dei gruppi sia la piu` piccola possibile
  - il numero totale di gruppi non sia troppo grande per evitare che l'inno debba essere suddiviso in parti troppo piccole. Ogni gruppo fa aumentare il costo della soluzione di un valore costante g>0.

NB: Il dispositivo computa per ogni coppia di posizioni i e j con in i≤j, il valore f(i,j) dove **f(i,j)** = punteggio assegnato al gruppo che parte dall'alunno in posizione i e termina con l'alunno in posizione j.

continua nella slide successiva

98

Esercizio

- Si formuli il suddetto problema sotto forma di problema computazionale specificando in cosa consistono un'istanza del problema (input) e una soluzione del problema (output). Occorre definire una funzione costo di cui occorre ottimizzare il valore.
- Si fornisca una formula ricorsiva per il calcolo del valore della soluzione ottima del problema basata sul principio della programmazione dinamica. **Si spieghi in modo chiaro come si ottiene la suddetta formula.**
- Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo che trova il valore della soluzione ottima per il problema.

99

Sottosequenza crescente piu` lunga
elementi non necessariamente contigui

- Vogliamo individuare la sottosequenza (strettamente) crescente piu` lunga in una sequenza di numeri. La sottosequenza non deve essere necessariamente formata da elementi contigui nella sequenza input. La sequenza input è memorizzata in un array A.
- Indichiamo con A[0,...,i] il segmento di A degli elementi con indice da 0 a i.
- Esempio: A=<3 12 9 4 12 5 8 11 6 13 10>
- La sottosequenza crescente piu` lunga e` <3 4 5 8 11 13>

Sottosequenza crescente piu` lunga
elementi non necessariamente contigui

- OPT(i) = lunghezza della sottosequenza crescente più lunga che termina in i (l'ultimo elemento della sottosequenza è A[i])
- Una volta che abbiamo calcolato OPT(i) per ogni i, andiamo a calcolare il massimo di tutti i valori OPT(i) per ottenere la lunghezza della sottosequenza crescente piu` lunga.

Sottosequenza crescente piu` lunga
elementi non necessariamente contigui

- Osserviamo che nella sottosequenza crescente piu` lunga che termina in i, l'elemento A[i] e` preceduto dalla piu` lunga sottosequenza crescente che termina in un certo j tale che j<i e A[j]<[A[i].
  - Quale di questi j bisogna prendere?
    - Quello per cui la lunghezza della sottosequenza è massima, cioe` l'indice j per cui si ottiene il massimo valore OPT(j) in questo insieme: { OPT(j): 0 ≤j ≤ i-1 e A[j]<A[i] }

Si ha quindi

OPT(i)=max{OPT(j)+1: 0 ≤j ≤ i-1 e A[j] < A[i] }

102

Sottosequenza crescente piu` lunga
elementi non necessariamente contigui

- Esempio: A=<3 12 9 4 12 5 8 11 6 13 10>
- per calcolare OPT(10) consideriamo j=0, j=2, j=3, j=5, j=6, j=8
- per calcolare OPT(9) consideriamo j=0, j=2, j=3,j=4 j=5, j=6,j=7,j=8
- per calcolare OPT(8) consideriamo j=0, j=3,j=5
- per calcolare OPT(7) consideriamo j=0, j=2, j=3, j=5, j=6
- per calcolare OPT(6) consideriamo j=0, j=3, j=5,
- per calcolare OPT(5) consideriamo j=0, j=3
- per calcolare OPT(4) consideriamo j=0, j=2, j=3
- per calcolare OPT(3) consideriamo j=0
- per calcolare OPT(2) consideriamo j=0
- per calcolare OPT(1) consideriamo j=0
- OPT(0)=1 → OPT(1)=OPT(2)=OPT(3)=2
- OPT(0)=1 e OPT(2)=OPT(3)=2 → OPT(4)=3
- OPT(0)=1 e OPT(3)=2 → OPT(5)= 3
- OPT(0)=1 , OPT(3)=2 , OPT(5)= 3 → OPT(6)=4
- OPT(0)=1 , OPT(2)=OPT(3)=2 , OPT(5)= 3 , OPT(6)=4 → OPT(7)=5
- OPT(0)=1 , OPT(3)=2 , OPT(5)= 3 --> OPT(8)=4
- OPT(0)=1 , OPT(2)=OPT(3)=2 , OPT(4)=3, OPT(5)= 3 , OPT(6)=4, OPT(7)=5→ OPT(9)=6
- OPT(0)=1 e OPT(3)=2 , OPT(5)= 3, OPT(6)=OPT(8)=4 → OPT(10)=5

103

Sottosequenza crescente piu` lunga

elementi non necessariamente contigui

Questo algoritmo trova la lunghezza della sottosequenza crescente piu` lunga che termina in i

```
LIS(A,i):
  if i<0 return 0
  if i=0
    P[0]=-1, M[0]=1, return 1
 if M[i]!=empty return M[i]
 M[i]=1    //restera` 1 se non ci sono j<i conA[j]<A[i]
 P[i]=-1    //serve nel caso alla fine M[i]=1
 for( j=0; j<i; j++)
   if (A[j]<A[i] )
     m=LIS(A,j)
     if(M[i]<m+1)
        M[i]=m+1
        P[i]=j
 return M[i]
```

tempo $O(n^2)$

M globale
P globale: mi serve per la stampa
P[i]= indice dell'elemento che precede i nella sottosequenza crescente piu` lunga che termina in i

Per computare il valore della sottosequenza crescente piu` lunga dell'array occorre prima invocare LIS(A,n-1) e poi trovare il massimo dell'array M.