

Programmazione dinamica (III parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23

Matricole congrue a 1

Docente: Annalisa De Bonis

40

40

Minimum Coin Change Problem

- Dato un insieme infinito di monete con valori $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$ e una somma di denaro V , fornire una formula per calcolare il minimo numero di monete richieste per cambiare la somma di denaro V . Assumiamo $v_1=1$ in modo che il problema ammetta sempre una soluzione.

- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- Possiamo cambiare la banconota in 6 modi:
- $\{1,1,1,1,1,1\}$, $\{1,1,1,1,2\}$, $\{1,1,2,2\}$, $\{1,1,4\}$, $\{2,2,2\}$, $\{2,4\}$
- La soluzione che include meno monete e' quindi $\{2,4\}$

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

41

41

Minimum Coin Change Problem

- Greedy non sempre funziona
- Strategia Greedy: esamina i valori delle monete in ordine decrescente e per ciascun valore esaminato utilizza quante più monete di quel valore
- Sistema di monete canonico: sistema per il quale la strategia greedy fornisce la soluzione ottima
- Esempio di sistema canonico: sistema USA include monete con questi valori 1, 5, 10, 25 cent.
 - Voglio cambiare 8 cent. La strategia greedy produce la soluzione {5,1,1,1} che è la soluzione ottima.
- Esempio di sistema non canonico: 1, 4, 5 cent.
 - Voglio cambiare 8 cent. La strategia greedy produce la soluzione {5,1,1,1} mentre la soluzione ottima è {4,4}

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

42

42

Minimum Coin Change Problem

$OPT(i,v)$ = minimo numero di monete per cambiare una banconota di valore v quando abbiamo a disposizione monete di valore v_1, \dots, v_i

- Se $v_i \leq v$, bisogna considerare sia il caso in cui la soluzione include monete di valore v_i sia il caso in cui non le contiene:
 - Numero monete nella soluzione ottima tra quelle che contengono una moneta di valore v_i è $= 1 +$ numero monete nella soluzione ottima per l'importo $v - v_i$ quando si possono utilizzare monete di valore v_1, \dots, v_i
 - Numero monete nella soluzione ottima tra quelle che non contengono una moneta di valore v_i è $=$ numero monete nella soluzione ottima per l'importo v quando si possono utilizzare monete di valore v_1, \dots, v_{i-1} ($v_i=1$)
- $OPT(i,v) = \min\{OPT(i,v-v_i)+1, OPT(i-1,v)\}$
- Se $v_i > v$, l'unico caso possibile è quello in cui la soluzione non include monete di valore v_i → $OPT(i,v) = OPT(i-1,v)$
- Se $v=0$ allora $OPT(i,v)=0$ per ogni i
- Se $i=1$ allora $OPT(i,v)=v$ per ogni v

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

43

43

Minimum Coin Change problem

$\text{MinCoinChange}(n, v_1, \dots, v_n, V)$ // $v_1 < \dots < v_n$

For $i = 1$ to n

$M[i, 0] \leftarrow 0$ //importo da cambiare = 0 \rightarrow soluzione contiene 0 monete

For $v = 1$ to V

$M[1, v] \leftarrow v$ //si possono usare solo monete da un euro

For $i = 1$ to n

For $v = 1$ to V

if $v < v_i$

then $M[i, v] \leftarrow M[i-1, v]$

else

$M[i, v] \leftarrow \min\{1+M[i, v-v_i], M[i-1, v]\}$

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

44

44

Minimum Coin Change problem

Esercizio: scrivere l'algoritmo che costruisce la soluzione ottima del minimum coin change problem.

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

45

45

Coin change problem

- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- La soluzione che richiede meno monete è {2,4}
- {1,1,1,1,1,1} {1,1,1,1,2}, {1,1,2,2}, {1,1,4}, {2,2,2}, {2,4}
- Vediamo la tabella che genererebbe l'algoritmo per questa istanza:

- Mostriamo il calcolo del valore di qualche cella:
- $M[2,6]=\min\{M[1,6], 1+M[2,4]\}=\min\{6,3\}=3$
- $M[3,3]=M[2,3]=2$ in quanto $v_3>3$
- $M[3,4]=\min\{M[2,4], 1+M[3,0]\}=\min\{2,1\}=1$

	0	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	1	1	2	2	3	3
3	0	1	1	2	1	2	2

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

46

46

Coin change problem

- Dato un insieme infinito di monete C di n diversi valori $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$ ed una certa somma di denaro di valore V , fornire una strategia per trovare in quanti modi possiamo usare le monete in C per cambiare V .
- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- Possiamo cambiare la banconota in 6 modi:
- {1,1,1,1,1,1} {1,1,1,1,2}, {1,1,2,2}, {1,1,4}, {2,2,2}, {2,4}

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

47

47

Coin change problem

$N(i,v)$ =numero di modi in cui possiamo cambiare v con monete di valore v_1, \dots, v_i

- Se $i > 1$ e $v_i \leq v$ allora la soluzione puo` includere o meno una moneta di valore v_i
 - Dobbiamo sommare il numero di soluzioni che includono monete di valore v_i al numero di soluzioni che non includono monete di valore v_i
 - $N(i,v) = N(i,v-v_i) + N(i-1, v)$
- Se $i > 1$ il valore v_i e` maggiore dell'importo da coprire allora
 - Le soluzioni possibili sono solo quelle che non includono monete di valore v_i
 - $N(i,v) = N(i-1, v)$
- Caso base $i=1 \rightarrow N(i,v)=1$ per ogni v
- Caso base $v=0 \rightarrow N(i,v)=1$ (solo insieme vuoto) per ogni $i > 0$

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

48

48

Coin change problem

- Ad esempio: Banconota di 6 euro

Valori monete: 1,2,4

- Possiamo cambiare la banconota in 6 modi:
- $\{1,1,1,1,1,1\}$, $\{1,1,1,1,2\}$, $\{1,1,2,2\}$, $\{1,1,4\}$, $\{2,2,2\}$, $\{2,4\}$
- Vediamo la tabella che genererebbe l'algoritmo per questa istanza:

	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4
3	1	1	2	2	4	4	6

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

49

49

Sottosequenza comune piu` lunga

Def. Dati una sequenza di caratteri $x=x_1,x_2,\dots,x_m$ ed un insieme di indici $\{k_1,k_2,\dots,k_t\}$ tali che $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq m$, la sequenza formata dai caratteri di x in posizione k_1,k_2,\dots,k_t viene detta sottosequenza di x .

N.B. I caratteri della sottosequenza non devono essere necessariamente consecutivi in x .

Problema: Date due sequenze $x=x_1,x_2,\dots,x_m$ e $y=y_1,\dots,y_n$, vogliamo trovare la sottosequenza piu` lunga comune ad entrambe le sequenze.

Esempio: $x=BACBDAB$ e $y=BDCABA$,
 $BCAB$ e` una sottosequenza comune a x e y di lunghezza massima.
 I caratteri della sequenza $BCAB$ appaiono nelle posizioni 1, 3, 6, 7 in x e nelle posizioni 1, 3, 4, 5 in y .
 $BDAB$ e` un'altra sottosequenza comune a x e y di lunghezza massima.
 anche $BABA$ e` un'altra sottosequenza comune a x e y di lunghezza massima.

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
 A. De Bonis

50

Sottosequenza comune piu` lunga

Approccio brute force: Per ogni sottosequenza di x controlla se la sottosequenza compare in y . Il numero di sottosequenze e` 2^m per cui l'algoritmo sarebbe esponenziale.

Perche ci sono 2^m sottosequenze di $x = x_1, x_2, \dots, x_m$?

Risposta: ogni sottosequenza corrisponde ad una sequenza di m bit dove il k -esimo bit e` 1 se x_k fa parte della sottosequenza e 0 se x_k non fa parte della sottosequenza.

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
 A. De Bonis

51

Sottosequenza comune piu` lunga

Input: $x=x_1, x_2, \dots, x_m$ e $y=y_1, \dots, y_n$

Sia $OPT(i, j)$ la lunghezza della sottosequenza più lunga comune a x_1, \dots, x_i e y_1, \dots, y_j .

Per calcolare $OPT(i, j)$ consideriamo i 3 seguenti casi:

- Se $x_i = y_j$ allora la sottosequenza comune piu` lunga termina con $x_i = y_j$
 - In questo caso la soluzione ottima e` formata dalla sottosequenza piu` lunga comune a x_1, \dots, x_{i-1} e y_1, \dots, y_{j-1} seguita dal carattere $x_i = y_j$
- Se $x_i \neq y_j$ e la sottosequenza comune piu` lunga termina con un simbolo diverso da x_i , allora la soluzione ottima e` data dalla soluzione ottima per x_1, \dots, x_{i-1} e y_1, \dots, y_j
- Se $x_i \neq y_j$ e la sottosequenza comune piu` lunga termina con un simbolo diverso da y_j , allora la soluzione ottima e` data dalla soluzione ottima per x_1, \dots, x_i e y_1, \dots, y_{j-1}

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

52

Sottosequenza comune piu` lunga

Se $i=0$ o $j=0$ allora banalmente la sottosequenza comune piu` lunga ha lunghezza 0 perche' almeno una delle due sequenze e` vuota.

$$OPT(i, j) = \begin{cases} OPT(i, j) = 0 & \text{se } i=0 \text{ o } j=0 \\ OPT(i-1, j-1) + 1 & \text{se } i > 0, j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max\{OPT(i-1, j), OPT(i, j-1)\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

53

Sottosequenza comune piu` lunga: algoritmo

ComputaLunghezzaLCS(X,Y)

1. $m \leftarrow$ lunghezza di X
2. $n \leftarrow$ lunghezza di Y
3. For $i=1$ to m
4. $M[i,0] \leftarrow 0$
5. For $j=0$ to n
6. $M[0,j] \leftarrow 0$
7. For $i=1$ to m
8. For $j=1$ to n
9. If $x_i=y_j$
10. Then $M[i,j] \leftarrow 1+M[i-1,j-1]$
11. $b[i,j] = \nwarrow$
12. Else if $M[i-1,j] \geq M[i,j-1]$
13. Then $M[i,j] \leftarrow M[i-1,j]$
14. $b[i,j] = \uparrow$
15. Else $M[i,j] \leftarrow M[i,j-1]$
16. $b[i,j] = \leftarrow$

L'algoritmo oltre a computare i valori $M[i,j]=OPT(i,j)$, memorizza nelle entrate $b[i,j]$ della matrice b delle frecce in modo che successivamente la sottosequenza comune piu` lunga possa essere ricostruita agevolmente (si veda algoritmo nella slide successiva).

54

Sottosequenza comune piu` lunga: algoritmo

$x=BACBDAB$ e $y=BDCABA$

	\emptyset	B	D	C	A	B	A
	0	1	2	3	4	5	6
\emptyset 0	0	0	0	0	0	0	0
B 1	0	$\nwarrow 1$	$\leftarrow 1$	$\leftarrow 1$	1	1	1
A 2	0	1	1	1	$\nwarrow 2$	2	2
C 3	0	1	1	2	$\uparrow 2$	2	2
B 4	0	1	1	2	2	$\nwarrow 3$	3
D 5	0	1	2	2	2	$\uparrow 3$	3
A 6	0	1	2	2	3	3	$\nwarrow 4$
B 7	0	1	2	2	3	4	$\uparrow 4$

Seguendo le frecce viene stampata BABA

55

Sottosequenza comune piu` lunga: algoritmo

$x=BACBDAB$ e $y=CDCAB$

	\emptyset	C	D	C	A	B
	0	1	2	3	4	5
\emptyset 0	0	0	0	0	0	0
B 1	0	0	0	0	0	1
A 2	0	0	0	0	1	1
C 3	0	1	1	1	1	1
B 4	0	1	1	1	1	2
D 5	0	1	2	2	2	2
A 6	0	1	2	2	3	3
B 7	0	1	2	2	3	4

Seguendo le frecce rosse viene stampata CDAB

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

56

L'algoritmo che stampa la sottosequenza comune piu` lunga

Stampa-LCS(b,X,i,j)

1. If $i=0$ or $j=0$
2. Then return
3. If $b[i,j]=x_i$
4. Then Stampa-LCS(b,X,i-1,j-1)
5. print(x_i)
6. Else if $b[i,j]=y_j$
7. Then Stampa-LCS(b,X,i-1,j)
8. Else Stampa-LCS(b,X,i,j-1)

Progettazione di Algoritmi A.A. 2022-23
A. De Bonis

57