Algoritmi greedy
III parte

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
Matricole congrue a 1
Docente: Annalisa De Bonis

Cammini minimi

- Si vuole andare da Napoli a Milano in auto percorrendo il minor numero di chilometri
- Si dispone di una mappa stradale su cui sono evidenziate le intersezioni tra le strade ed è indicata la distanza tra ciascuna coppia di intersezioni adiacenti
- Come si può individuare il percorso più breve da Napoli a Milano?

Cammini minimi

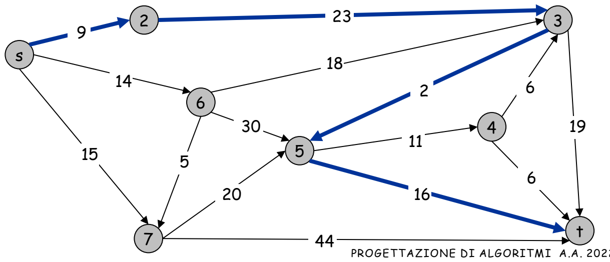
- Esempi di applicazioni dei cammini minimi in una rete
- Trovare il cammino di **tempo minimo** in una rete
- Se i pesi esprimono l'inaffidabilità delle connessioni in una rete, trovare il collegamento che è **più sicuro**

Il problema dei cammini minimi

- Input:
  - Grafo direzionato G = (V, E).
  - Per ogni arco e, valore ℓ_e (costo, peso o lunghezza dell'arco e)
  - s = sorgente
- Def. Per ogni percorso direzionato P, ℓ(P) = somma delle lunghezze degli archi in P.

Il problema dei cammini minimi: trova i percorsi direzionati più corti da s verso tutti gli altri nodi.

NB: Se il grafo non è direzionato possiamo sostituire ogni arco (u,v) con i due archi direzionati (u,v) e (v,u)



Costo del percorso da s a t
s-2-3-5-t = 9 + 23 + 2 + 16
= 50

Varianti del problema dei cammini minimi

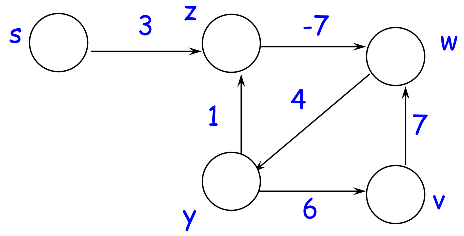
- Single Source Shortest Paths: determinare il cammino minimo da un dato vertice sorgente s ad ogni altro vertice
- Single Destination Shortest Paths: determinare i cammini minimi ad un dato vertice destinazione t da tutti gli altri vertici
  - Si riduce a Single Source Shortest Path invertendo le direzioni degli archi
- Single-Pair Shortest Path: per una data coppia di vertici u e v determinare un cammino minimo da un dato vertice u a v
  - i migliori algoritmi noti per questo problema hanno lo stesso tempo di esecuzione asintotico dei migliori algoritmi per Single Source Shortest Path.
- All Pairs Shortest Paths: per ogni coppia di vertici u e v, determinare un cammino minimo da u a v

Cammini minimi

- Soluzione inefficiente:
  - si considerano tutti i percorsi possibili e se ne calcola la lunghezza
  - il numero di percorsi potrebbe essere esponenziale (ad esempio, nel grafo completo)
  - l'algoritmo non termina in presenza di cicli
- Si noti che l'algoritmo di visita BFS è un algoritmo per Single Source Shortest Paths nel caso in cui tutti gli archi hanno lo stesso peso

Cicli negativi

- Se esiste un ciclo negativo lungo un percorso da s a v, allora non è possibile definire il cammino minimo da s a v



Il ciclo <z,w,y,z> ha peso -2

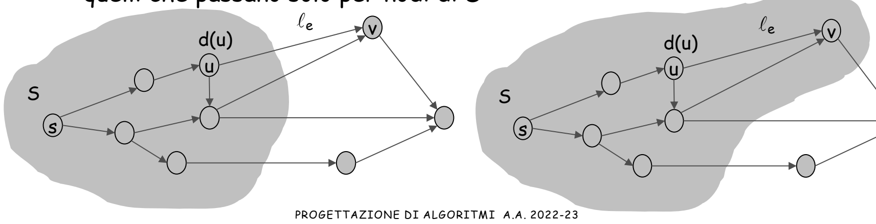
- Attraversando il ciclo <z,w,y,z> un numero arbitrario di volte possiamo trovare percorsi da s a v di peso arbitariamente piccolo

Algoritmo di Dijkstra

in G solo archi con lunghezze maggiori o uguali di zero

Algoritmo di Dijkstra (1959).

- Ad ogni passo mantiene l'insieme S dei nodi esplorati, cioé di quei nodi u per cui è già stata calcolata la distanza minima d(u) da s.
- Inizializzazione S = { s }, d(s) = 0.
- Ad ogni passo, sceglie tra i nodi non ancora in S ma adiacenti a qualche nodo di S, quello che può essere raggiunto nel modo più economico possibile (scelta greedy)
- In altra parole sceglie v che minimizza $d'(v) = \min_{e = (u,v) : u \in S} d(u) + \ell_e$, aggiunge v a S e pone d(v) = d'(v).
- d'(v) rappresenta la lunghezza del percorso più corto da s a v tra quelli che passano solo per nodi di S



Algoritmo di Dijkstra

in G solo archi con lunghezze maggiori o uguali di zero

Dijkstra's Algorithm $(G, \ell), s)$
Let S be the set of explored nodes
    For each $u \in S$, we store a distance $d(u)$
Initially $S = \{s\}$ and $d(s) = 0$
While $S \neq V$
    Select a node $v \notin S$ with at least one edge from S for which
        $d'(v) = \min_{e=(u,v):u \in S} d(u) + \ell_e$ is as small as possible
    Add v to S and define $d(v) = d'(v)$
EndWhile

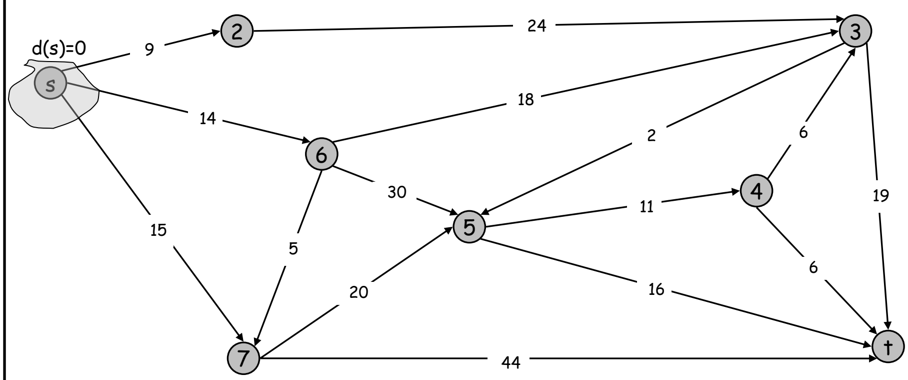
Questa versione dell'algoritmo di Dijkstra assume che tutti i nodi siano raggiungibili da s. Se non si puo` fare questa assunzione allora si puo` modificare l'algoritmo inserire un if per interrompe il ciclo se ad una certa iterazione non ci sono nodi in cui entrano archi provenienti da nodi di S .

Esercizio: Ad ogni passo l'algoritmo di Dijkstra aggiunge un certo nodo v ad S. Dimostrare per induzione che il percorso più corto da s a v computato dall'algoritmo passa solo attraverso nodi già inseriti in S.

83

Algoritmo di Dijkstra

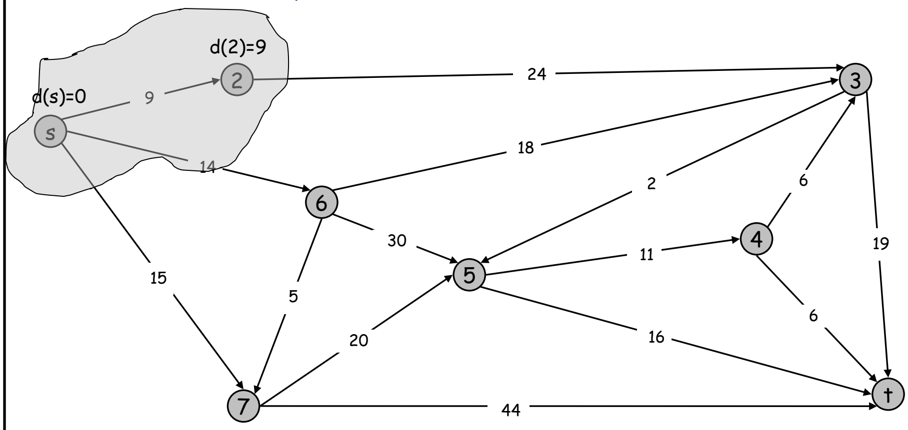
S={s} computo d'(2)=9 , d'(6)=14, d'(7)=15 → scelgo 2 e pongo d(2)=9, shortest path = s-2



84

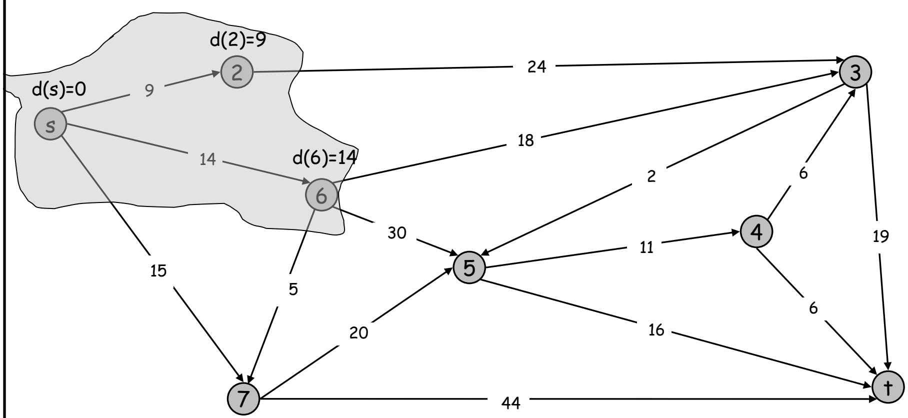
Algoritmo di Dijkstra

S={s,2} computo d'(6)=14, d'(7)=15, d'(3)=9+24=33 → scelgo 6 e pongo d(6)=14 , shortest path = s-6



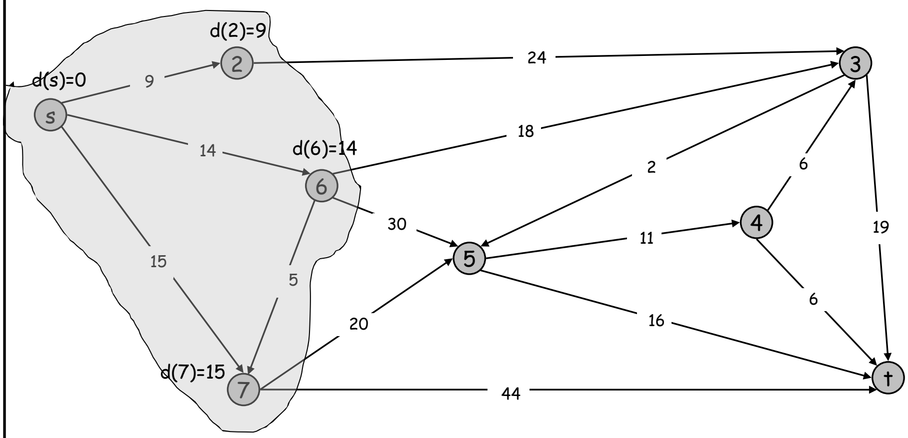
Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6} computo d'(7)=min{15,14+5}=15, d'(5)=14+30=44, d'(3)=min{9+24, 14+18} =32 → scelgo 7 e pongo d(7)=15, shortest path = s-7



Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6,7} computo d'(5)=min{14+30,15+20}=35, d'(3)=min{9+24, 14+18} =32, d'(t)=15+44=59 → scelgo 3 e pongo d(3)=32 , shortest path = s-6-3

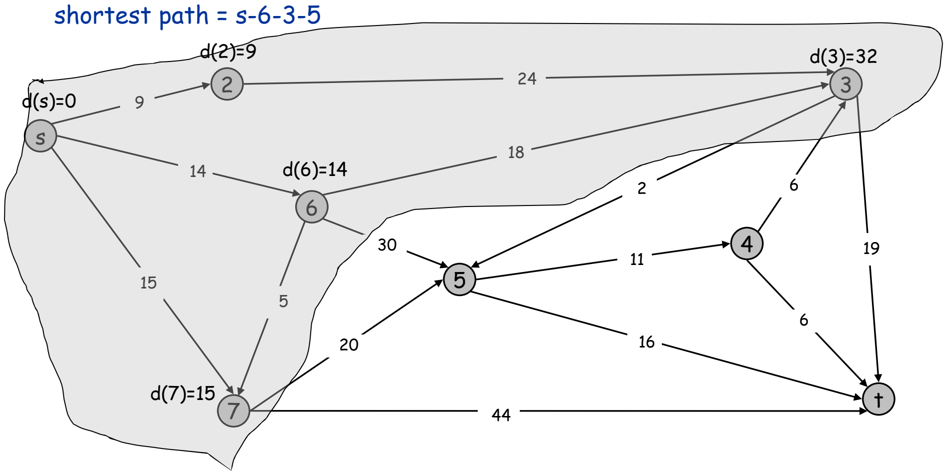


87

87

Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6,7,3} computo d'(5)=min{14+30,15+20,32+2}=34, d'(t)=min{15+44, 32+19}=51 → scelgo 5 e pongo d(5)=34 , shortest path = s-6-3-5

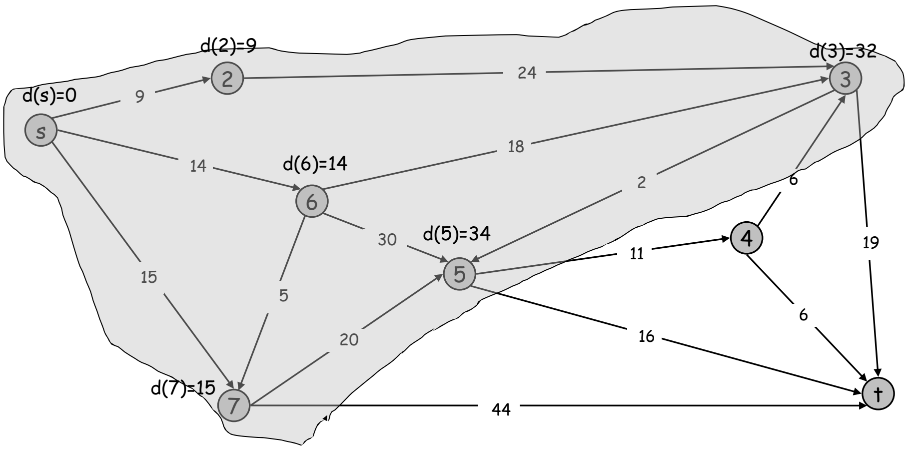


88

88

Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6,7,3,5} computo d'(4)=34+11=45, d'(t)=min{15+44, 32+19, 34+16}=50
→ scelgo 4 e pongo d(4)=45 , shortest path = s-6-3-5-4

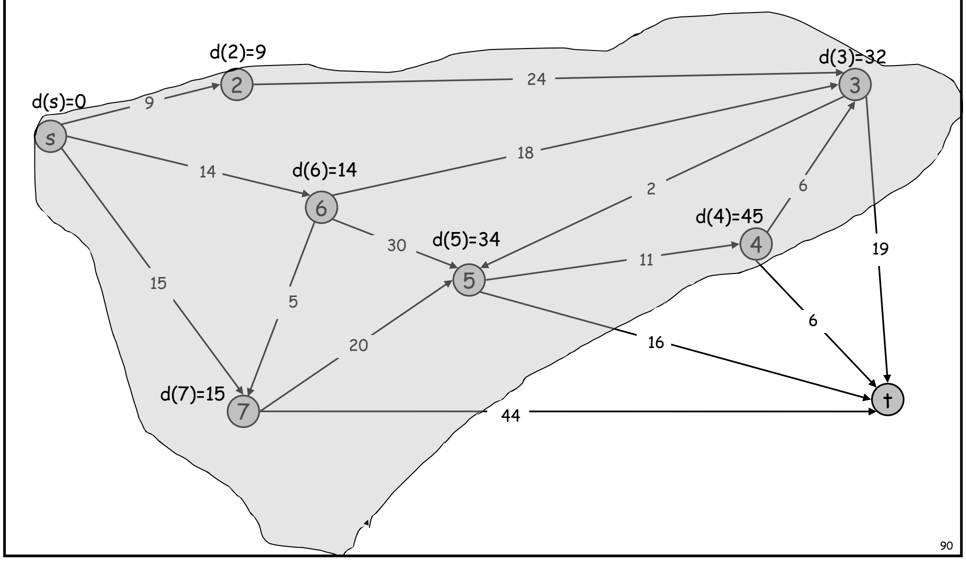


89

89

Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6,7,3,5,4} computo d'(t)=min{15+44, 32+19, 34+16,45+6}=50
→ scelgo t e pongo d(t)=50 , shortest path = s-6-3-5-t

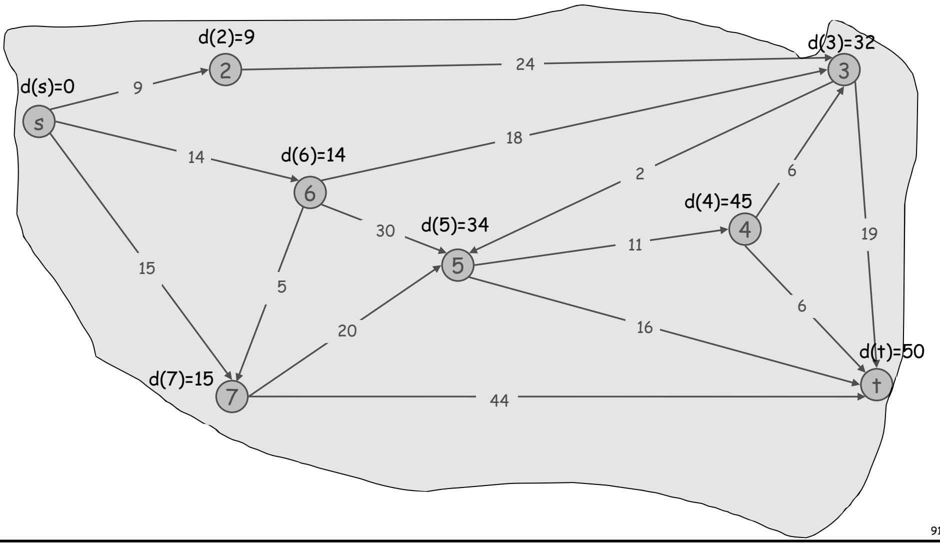


90

90

Algoritmo di Dijkstra

S={s,2,6,7,3,5,4,t}



Algortimo di Dijksta: Correttezza

Teorema. Sia G un grafo in cui per ogni arco e è definita una lunghezza $\ell_e \geq 0$ (è fondamentale che ℓ_e **non sia negativa**). Per ogni nodo u $\in$ S il valore d(u) calcolato dall'algoritmo di Dijkstra è la lunghezza del percorso più corto da s a u.

Dim. (per induzione sulla cardinalità |S| di S)

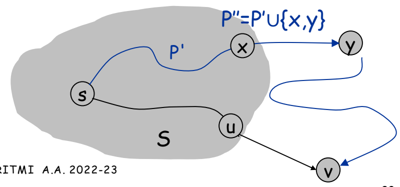
Base: |S| = 1. In questo caso S={s} e d(s)=0 per cui la tesi vale banalmente.

Ipotesi induttiva: Assumiamo vera la tesi per |S| = k $\geq$ 1.

- Sia v il prossimo nodo inserito in S dall'algoritmo e sia (u,v) l'arco attraverso il quale è stato raggiunto v, cioè quello per cui si ottiene

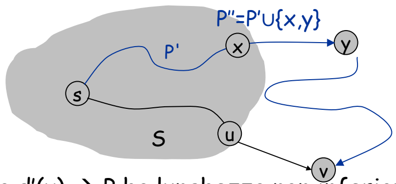
$$d'(v) = \min_{e=(u,v)\,:\,u\in S} d(u) + \ell_e ,$$

- Consideriamo il percorso di lunghezza d'(v), cioé quello formato dal percorso più corto da s ad u più l'arco (u,v)
- Consideriamo un **qualsiasi** altro percorso P da s a v. Dimostriamo che P non è più corto di d'(v)
- Sia (x,y) il primo arco di P che esce da S.
- Sia P' il sottocammino di P fino a x.
- P' più l'arco (x,y) ha già lunghezza non più piccola di d'(v) altrimenti l'algoritmo non avrebbe scelto v.



Algortimo di Dijksta: Correttezza

- Dimostriamo che il percorso P'' formato da P' più l'arco (x,y) ha già lunghezza non più piccola di d'(v).
- ℓ(P') + ℓ((x,y)) ≥ d(x) + ℓ((x,y)) siccome d(x) è per ipotesi induttiva uguale alla lunghezza del percorso più corto da s a x
- d(x) + ℓ((x,y)) ≥ d'(y) siccome d'(y)= min $_{(u,y):\, u\in S}$ d(u)+ ℓ((u,y))
- d'(y) ≥ d'(v) altrimenti alla k-esima iterazione l'algoritmo non avrebbe inserito v in S



- P'' ha lunghezza non inferiore a d'(v) → P ha lunghezza non inferiore a d'(v)
  - **l'implicazione è vera perchè P'' è il sottocammino di P cha va da s a y e il sottocammino di P che va da y a v non può avere costo negativo.**

Algoritmo di Dijkstra: analisi tempo di esecuzione

```
Dijkstra's Algorithm (G, ℓ , s)
Let S be the set of explored nodes
    For each u ∈ S, we store a distance d(u)
Initially S = {s} and d(s) = 0
While S ≠ V
    Select a node v ∉ S with at least one edge from S for which
       d'(v) = min_{e=(u,v):u∈S} d(u) + ℓ_e is as small as possible
    Add v to S and define d(v) = d'(v)
EndWhile
```

•While iterato n volte

•Se non usiamo nessuna struttura dati per trovare in modo efficiente il minimo d'(v) il calcolo del minimo richiede di scandire tutti gli archi che congiungono un vertice in S con un vertice non in S → O(m) ad ogni iterazione del while → O(nm) in totale.

Algoritmo di Dijkstra: come renderlo più efficiente?

```
Dijkstra's Algorithm (G,ℓ ,s)
Let S be the set of explored nodes
    For each u∈S, we store a distance d(u)
Initially S={s} and d(s)=0
While S≠V
    Select a node v∉S with at least one edge from S for which
       d'(v)=min_{e=(u,v):u∈S} d(u)+ℓ_e is as small as possible
    Add v to S and define d(v)=d'(v)
EndWhile
```

Miglioramenti:

1. per ogni $x \notin S$, teniamo traccia dell'ultimo valore computato $d'(x)$ (se non è mai stato calcolato poniamo $d'(x)= \infty$) e
2. ad ogni iterazione del while: per ogni $z \notin S$, ricomputiamo il valore $d'(z)$ solo se è stato appena aggiunto ad S un nodo u per cui esiste l'arco (u,z)
   per calcolare il nuovo valore di $d'(z)$ basta calcolare $\min\{d'(z), d(u)+\ell_e\}$, dove $e=(u,z)$ è l'arco che congiunge z al nodo u appena introdotto in S. Possiamo farlo perchè teniamo traccia dell'ultimo valore precedentemente computato $d'(z)$.
3. Se per ogni $x \notin S$, memorizziamo $(d'(x),x)$ in una coda a priorità, $d'(v)=\min_{x \notin S}\{d'(x)\}$ può essere ottenuto invocando la funzione Min o direttamente ExtractMin che va anche a rimuovere l'entrata $(d'(v),v)$. L'aggiornamento di $d'(z)$ al punto 1 può essere fatto con ChangeKey.

95

Algoritmo di Dijkstra con coda a priorità: analisi del tempo di esecuzione

```
Dijkstra's Algorithm (G,ℓ,s)
Let S be the set of explored nodes
For each u not in S, we store a distance d'(u)
Let Q be a priority queue of pairs (d'(u),u) s.t. u is not in S
For each u ∈ S, we store a distance d(u)
Insert(Q,(0,s))
For each u≠s insert (Q, ∞,u)  in Q EndFor
While  S≠ V
 (d(v),v)<-- ExtractMin(Q)
  Add v to S
  For each edge e=(v,z)
   If  z not in S && d(v)+ ℓe< d'(z)
     ChangeKey(Q,z, d(v)+ ℓe)

EndWhile
```

In una singola iterazione del while, il for è iterato un numero di volte pari al numero di archi uscenti da u.
Se consideriamo tutte le iterazioni del while, il for viene iterato in totale O(m) volte

96

Algoritmo di Dijkstra con coda a priorità: analisi del tempo di esecuzione

•Se usiamo una min priority queue che per ogni vertice v **non** in S contiene la coppia (d'[u],v) allora con un'operazione di ExtractMin possiamo ottenere il vertice v con il valore d'[v] più piccolo possibile

•Tempo inizializzazione: tempo per effettuare gli n inserimenti in Q

•Tempo While: O(n) se escludiamo il tempo per fare le n ExtractMin e il tempo del for. Il for esegue in totale O(m) iterazioni (si veda slide precedente). In al piu` m di queste viene eseguita una changeKey mentre ciascuna delle le altre ha tempo costante.

Se la coda è implementata mediante una lista o con un array non ordinato:
Inizializzazione: O(n)
While: $O(n^2)$ per le n ExtractMin; O(m) per le O(m) ChangeKey
Tempo algoritmo: $O(n^2)$

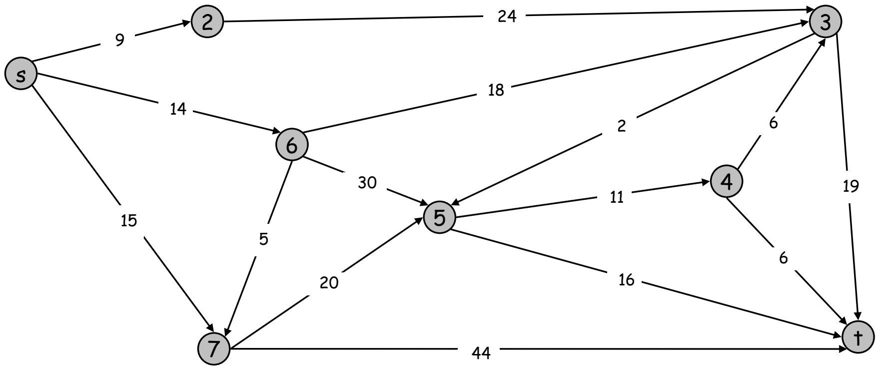
Se la coda è implementata mediante un heap binario:
Inizializzazione: O(n) con costruzione bottom up oppure O(n log n) con n inserimenti
While: O(n log n) per le n ExtractMin; O(m log n) per le m ChangeKey
Tempo algoritmo: O(n log n+ m log n)

97

97

Algoritmo di Dijkstra

Trova i percorsi più corti

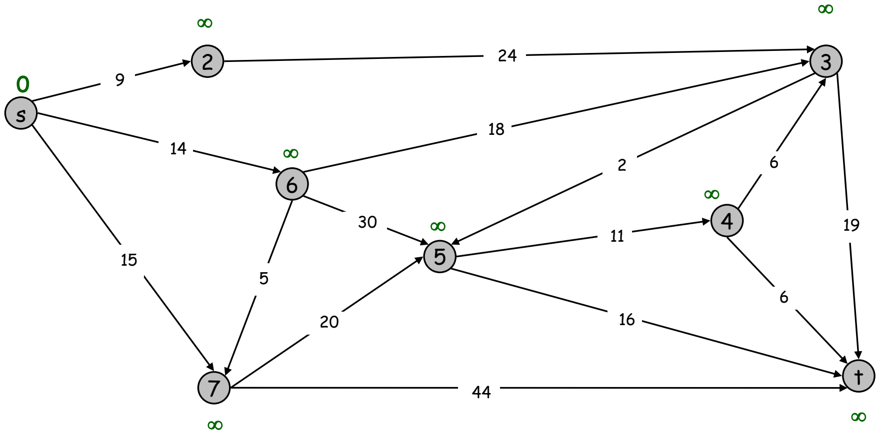


98

98

Algoritmo di Dijkstra

S = { }
Q = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }

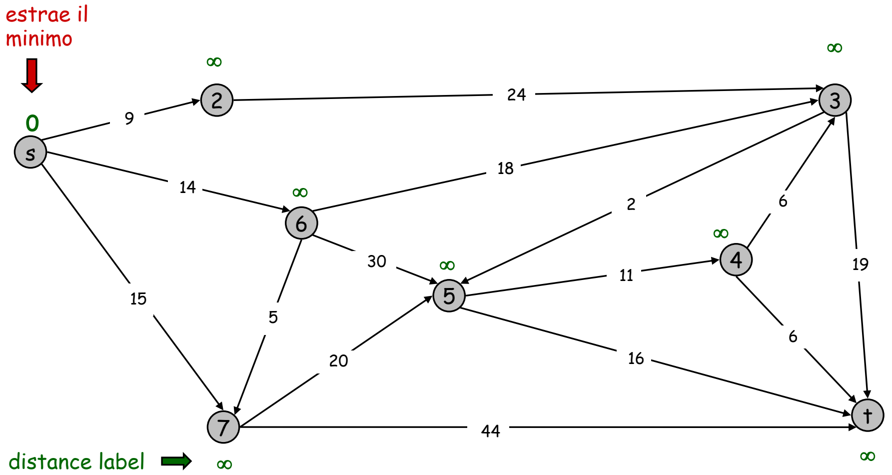


99

99

Algoritmo di Dijkstra

S = { }
Q = { (0,s), (∞,2), (∞,3), (∞,4),(∞,5), (∞,6), (∞,7), (∞,t) }

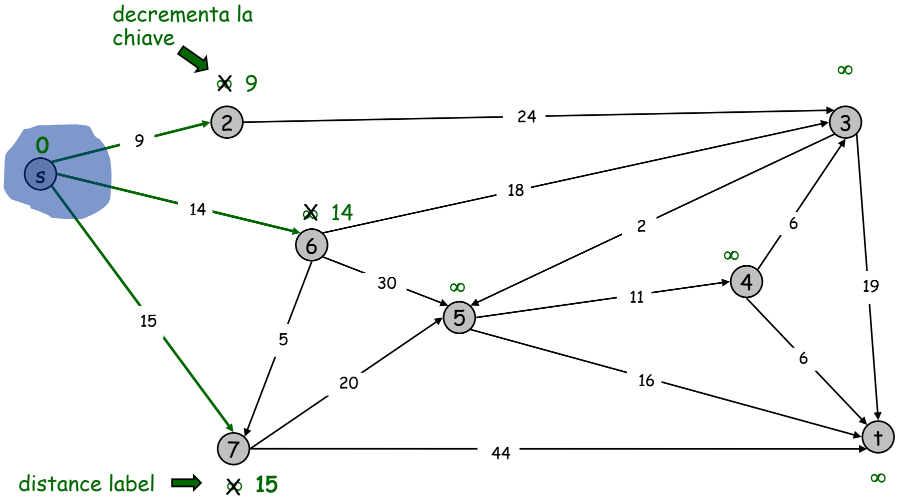


100

100

Algoritmo di Dijkstra

S = {s}
Q = { (9,2), (∞,3), (∞,4),(∞,5), (14,6), (15,7), (∞,t) }

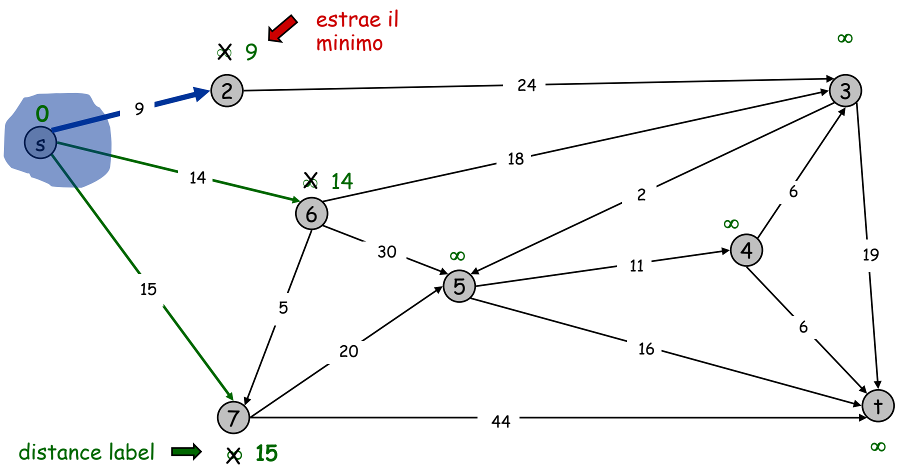


101

101

Algoritmo di Dijkstra

S = {s}
Q = { (∞,3), (∞,4),(∞,5), (14,6), (15,7), (∞,t) }

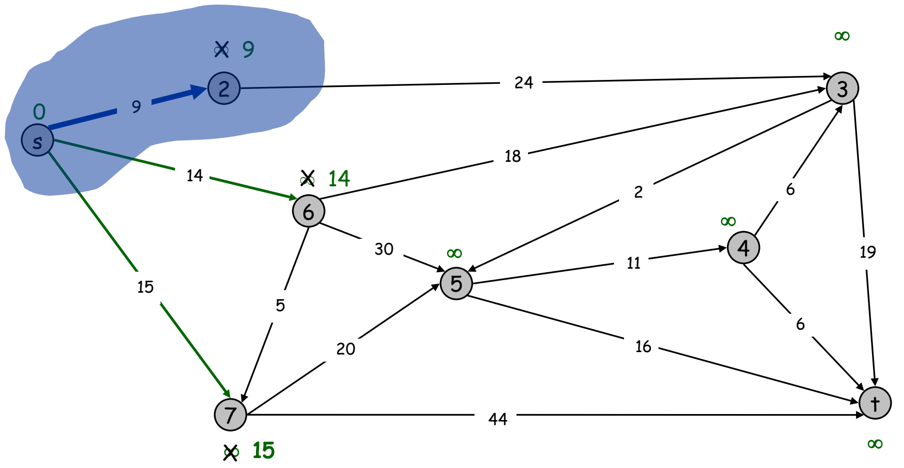


102

102

Algoritmo di Dijkstra

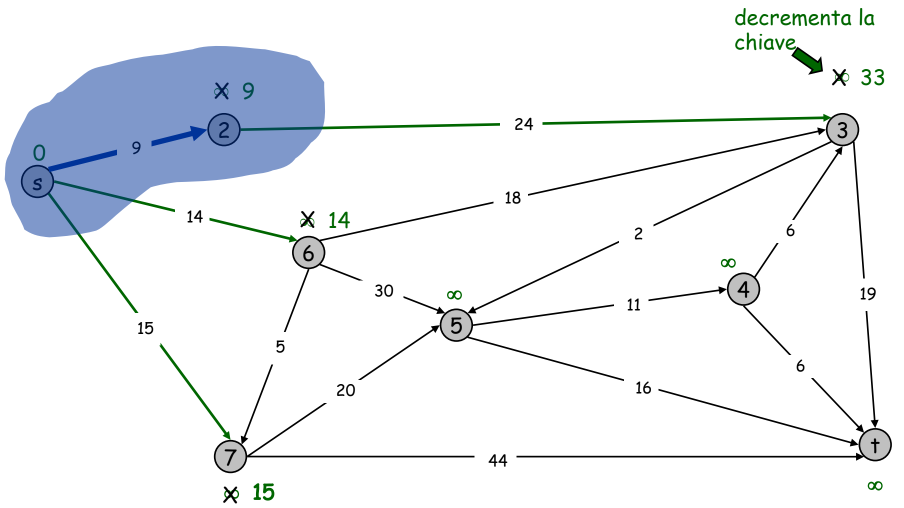
S = {s,2}
Q = { (∞,3), (∞,4),(∞,5), (14,6), (15,7), (∞,t) }



103

Algoritmo di Dijkstra

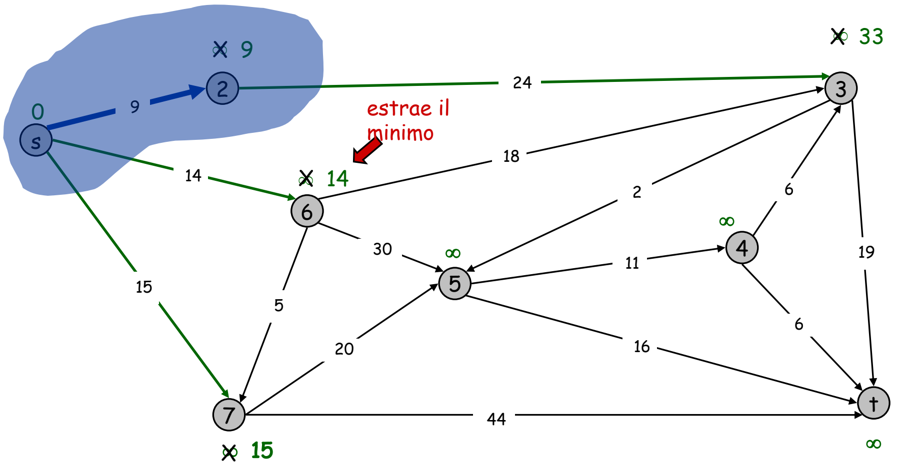
S = {s,2}
Q = { (33,3), (∞,4),(∞,5), (14,6), (15,7), (∞,t) }



104

Algoritmo di Dijkstra

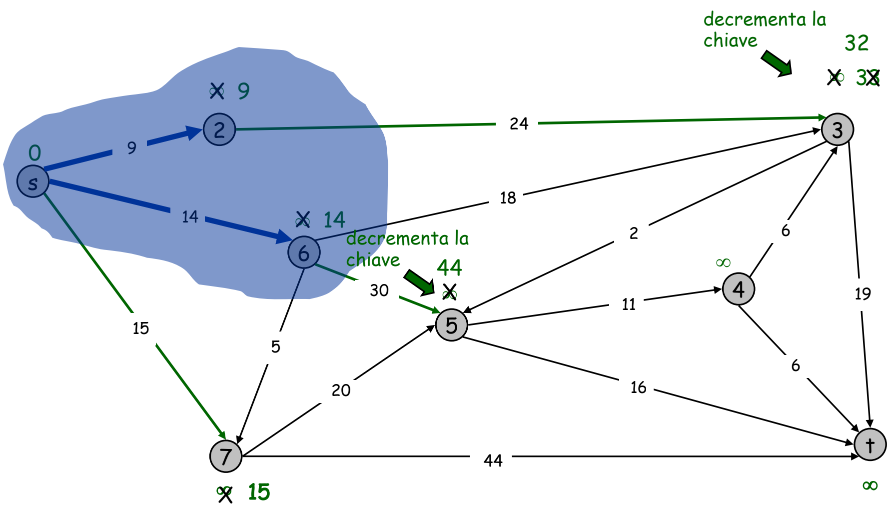
S = {s,2}
Q = { (33,3), (∞,4),(∞,5), (14,6), (15,7), (∞,t) }



105

Algoritmo di Dijkstra

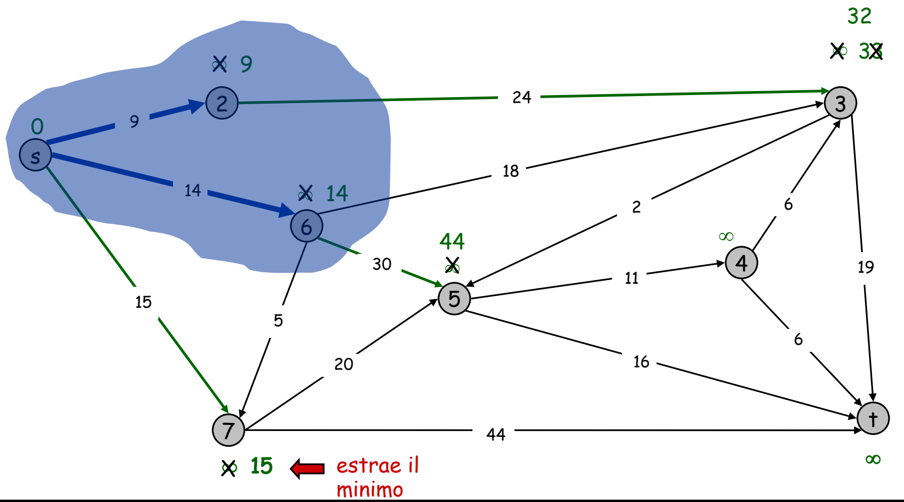
S = {s,2,6}
Q = { (32,3), (∞,4),(44,5), (15,7), (∞,t) }



106

Algoritmo di Dijkstra

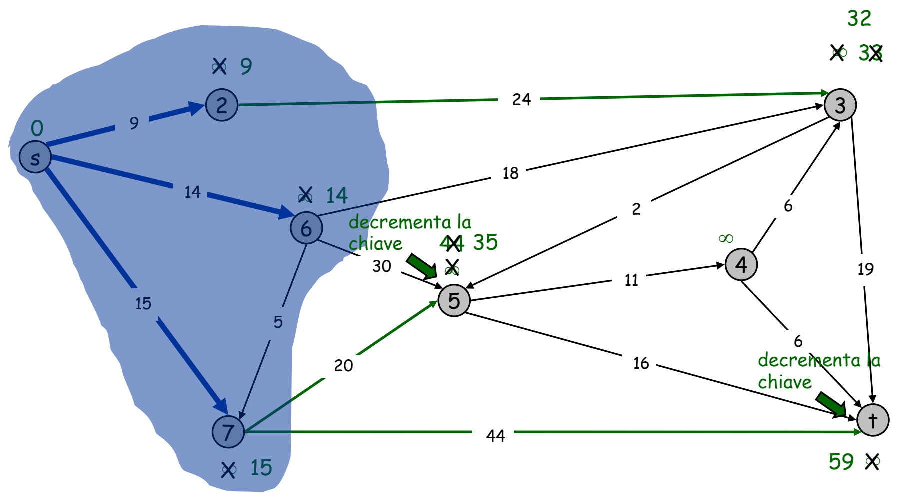
S = {s,2,6}
Q = { (32,3), (∞,4),(44,5), (15,7), (∞,t) }



107

Algoritmo di Dijkstra

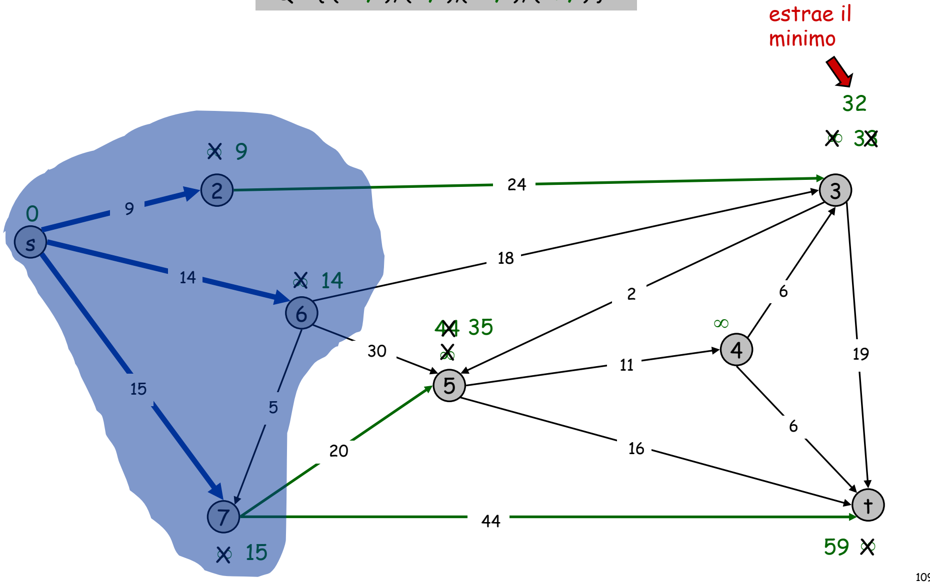
S = {s,2,6,7}
Q = { (32,3), (∞,4),(35,5), (59,t) }



108

Algoritmo di Dijkstra

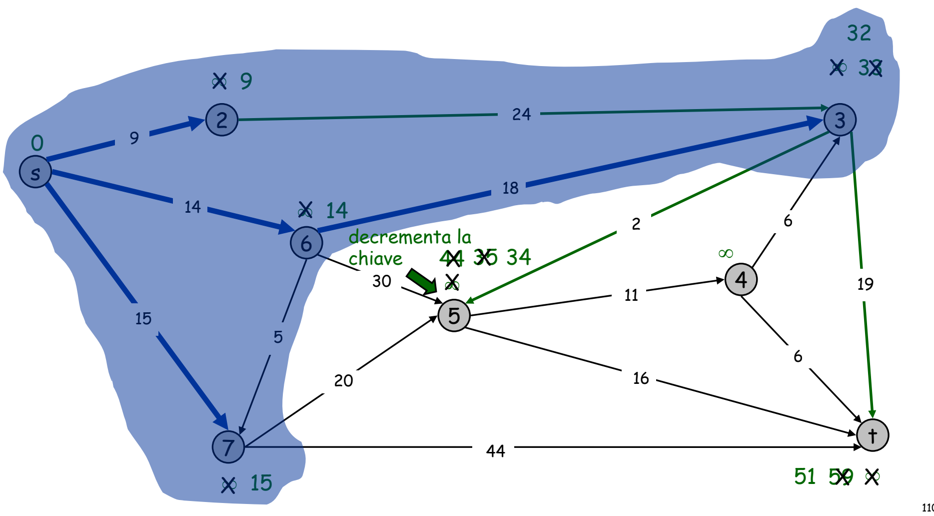
S = {s,2,6,7}
Q = { (32,3), (∞,4),(35,5), (59,t) }



109

Algoritmo di Dijkstra

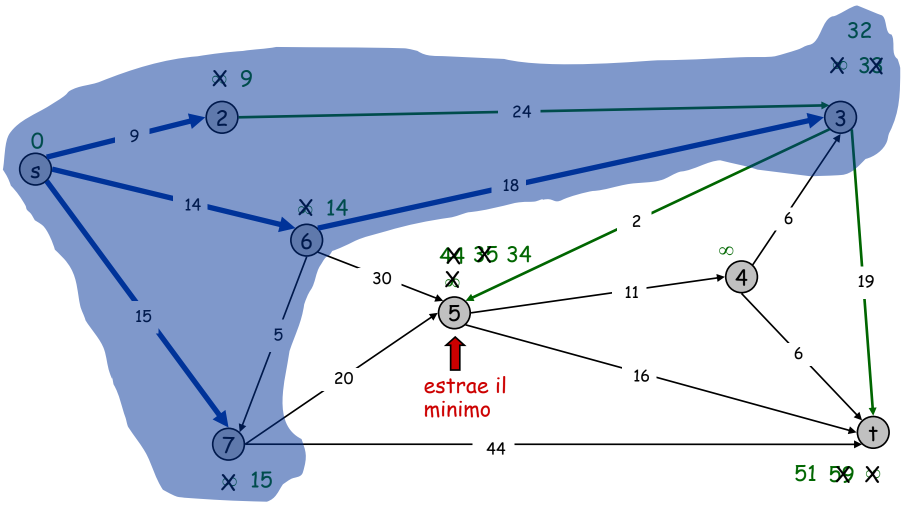
S = {s,2,6,7,3}
Q = { (32,3), (∞,4),(34,5), (51,t) }



110

Algoritmo di Dijkstra

S = {s,2,6,7,3}
Q = { (∞,4),(34,5), (51,t) }

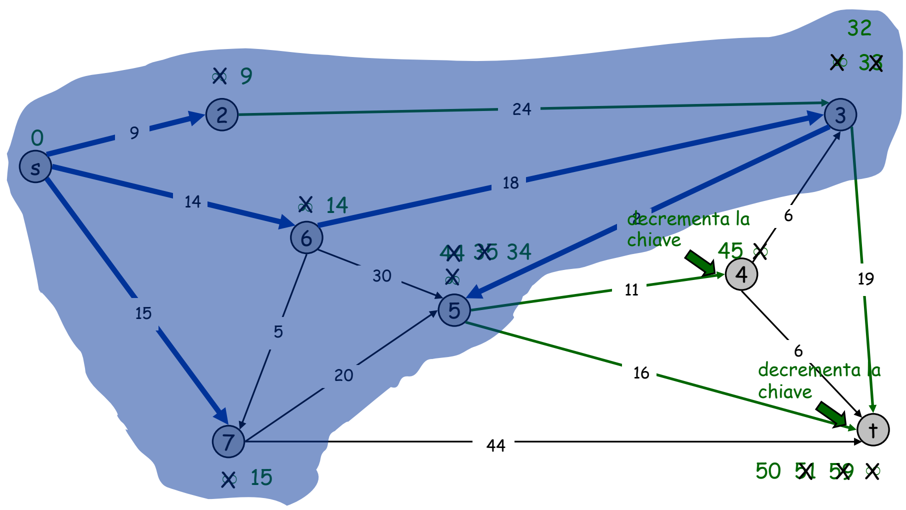


111

111

Algoritmo di Dijkstra

S = {s,2,6,7,3,5}
Q = { (45,4), (50,t) }

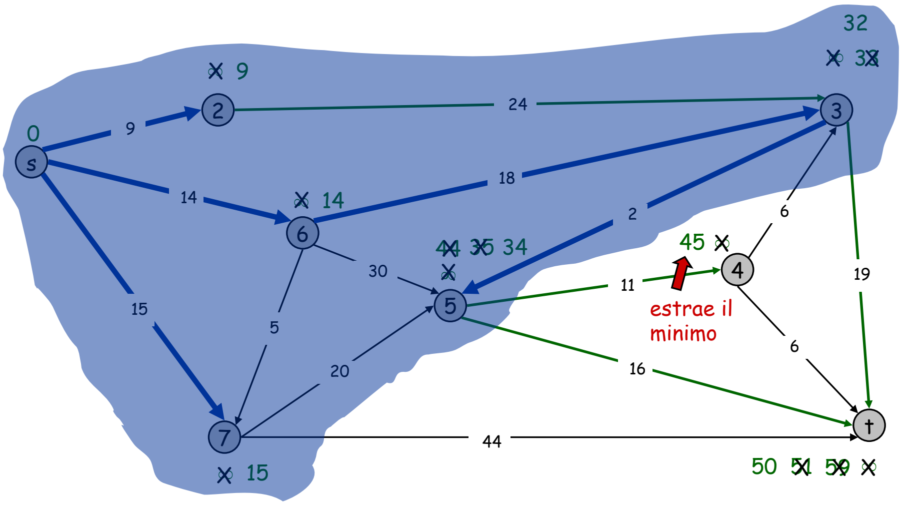


112

112

Algoritmo di Dijkstra

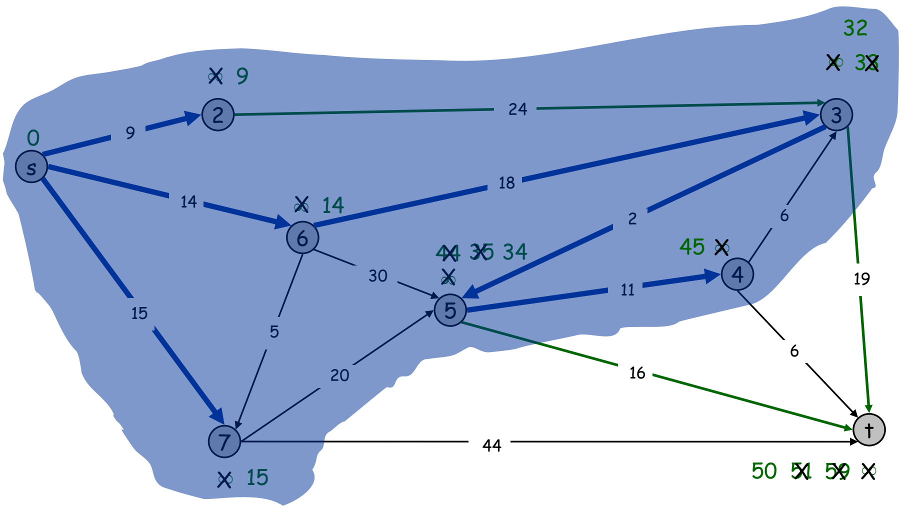
S = {s,2,6,7,3,5}
Q = { (45,4), (50,t) }



113

Algoritmo di Dijkstra

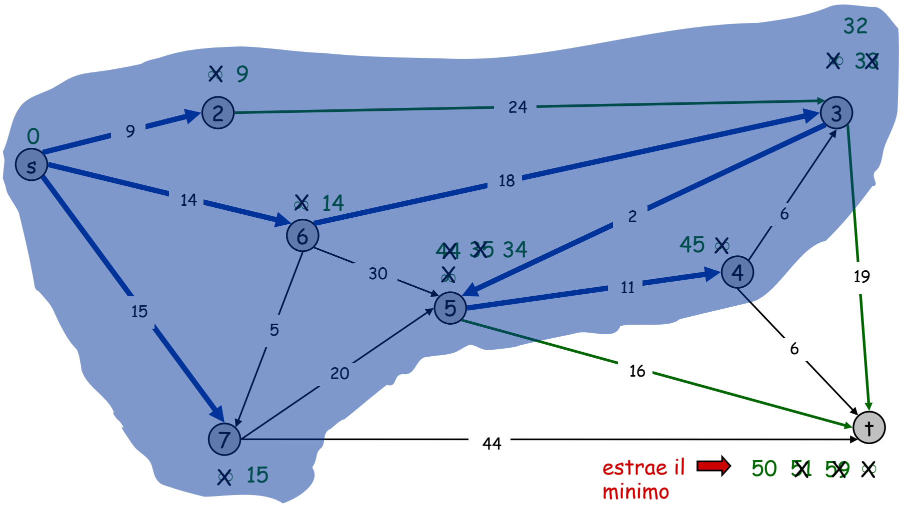
S = {s,2,6,7,3,5,4}
Q = { (50,t) }



114

Algoritmo di Dijkstra

S = {s,2,6,7,3,5,4}
Q = { (50,t) }

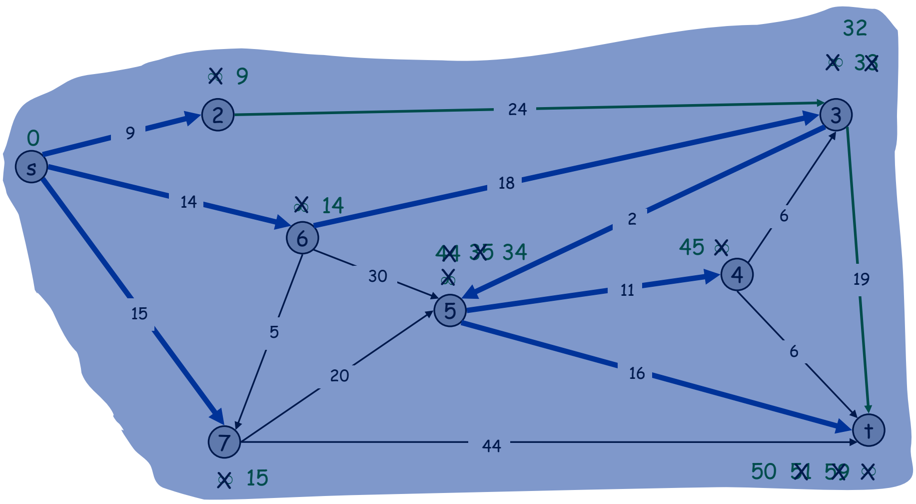


115

115

Algoritmo di Dijkstra

S = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }
Q = { }

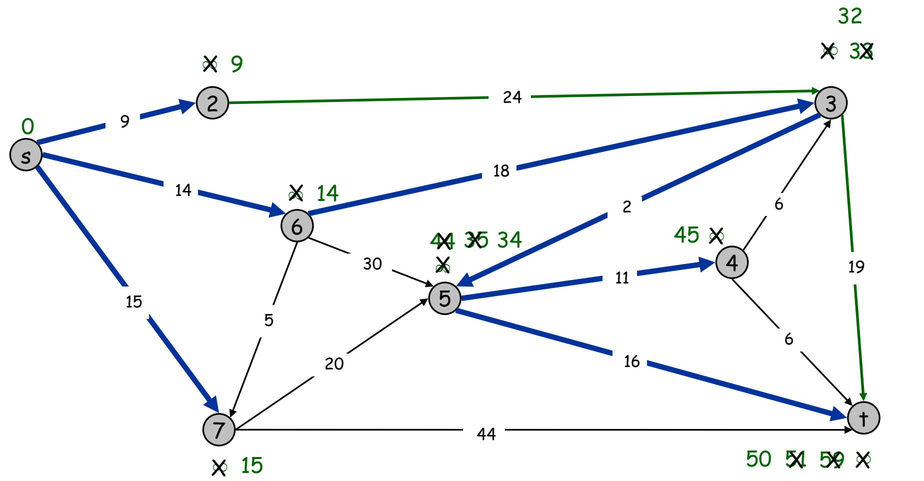


116

116

Algoritmo di Dijkstra

S = {s,2,6,7,3,5,4,t}
Q = { }



117

117