Grafi (IV parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23

Matricole congrue a 1

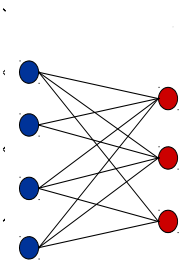
Docente: Annalisa De Bonis

1

1

Grafi bipartiti

- Def. Un grafo non direzionato è **bipartito** se l'insieme di nodi può essere partizionato in due sottoinsiemi X e Y tali che ciascun arco del grafo ha una delle due estremità in X e l'altra in Y
  - Possiamo colorare i nodi con due colori (ad esempio, rosso e blu) in modo tale che ogni arco ha un'estremita rossa e l'altra blu.
- Applicazioni.
  - Scheduling: macchine = rosso, job = blu.

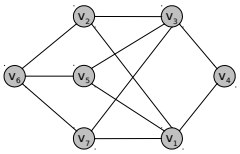


Un grafo bipartito

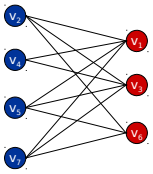
2

Testare se un grafo è bipartito

- Testare se un grafo è bipartito. Dato un grafo G, vogliamo scoprire se è bipartito.
  - Molti problemi su grafi diventano:
    - Più facili se il grafo sottostante è bipartito (matching: sottoinsieme di archi tali che non hanno estremità in comune)
    - Trattabili se il grafo è bipartito (max insieme indipendente)



Un grafo bipartito G



Modo alternativo di disegnare G

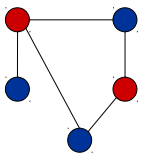
Se volessimo considerare tutti i possibili modi di colorare i nodi con due colori dovremmo considerare 2^{n-1} possibilita`: per ogni sottoinsieme U di V possiamo colorare i nodi di U di rosso e i nodi di V-U di blu →$2^n$ coppie (U,V-U)→ $2^n$ modi di colorare i vertici con due colori. Siccome non occorre considerare entrambe le coppie (U,V-U) e (V-U,U) in quanto cio` corrisponderebbe a scambiare i colori dei due insiemi → numero colorazioni da esaminare =$2^n/2$= 2^{n-1}

3

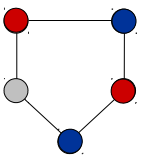
Grafi bipartiti

- Lemma. Se un grafo G è bipartito, non può contenere un ciclo dispari (formato da un numero dispari di archi)
- In pratica vale l'implicazione: G bipartito→ nessun ciclo dispari in G

- Dim. Non è possibile colorare di rosso e blu i nodi su un ciclo dispari in modo che ogni arco abbia le estremità di diverso colore.



bipartito
(2-colorabile)

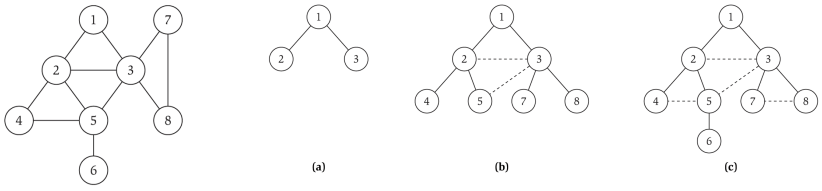


Non bipartito
(non 2-colorabile)

4

Breadth First Search Tree

- Vi ricordate questa proprieta?
- Proprietà. Si consideri un'esecuzione di BFS su G = (V, E), e sia (x, y) un arco di G. I livelli di x e y differiscono di al più di 1.
- Sfutteremo questa proprieta` per provare che la BFS, nella versione con i layer, puo` essere utilizzata per determinare se un grafo è bipartito



G

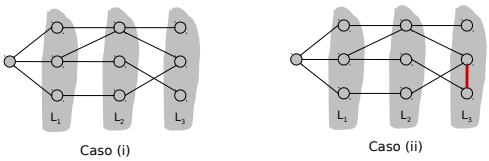
5

Grafi bipartiti

- Osservazione. Sia G un grafo connesso e siano L_0, …, L_k i livelli prodotti da un'esecuzione di BFS a partire dal nodo s. Può avvenire o che si verifichi la (i) o la (ii)

  (i) Nessun arco di G collega due nodi sullo stesso livello

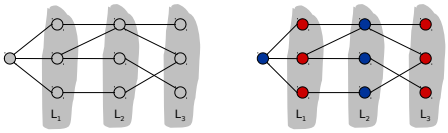
  (ii) Un arco di G collega due nodi sullo stesso livello



6

Grafi Bipartiti

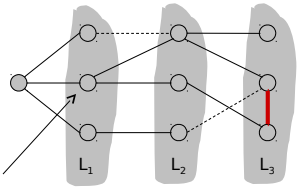
- Nel caso (i) il grafo è bipartito.
- Dim.
- Per la proprietà sulla distanza tra livelli contenenti nodi adiacenti, si ha che due nodi adiacenti o si trovano nello stesso livello o in livelli consecutivi.
- Poiché nel caso (i) non ci sono archi tra nodi di uno stesso livello allora tutti gli archi del grafo collegano nodi in livelli consecutivi.
- Quindi se coloro i livelli di indice dispari di rosso e quelli di indice pari di blu, ho che le estremità di ogni arco sono di colore diverso

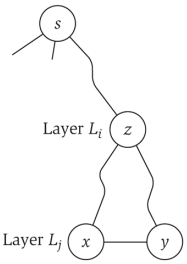


Caso (i)

Grafi Bipartiti

Nel caso (ii) il grafo non è bipartito.
Dim. Dimostriamo che il grafo contiene un ciclo dispari: supponiamo che esista l'arco (x,y) tra due vertici x e y di L_j. Indichiamo con z l'antenato comune a x e y nell'albero BFS che si trova più vicino a x e y. Sia L_i il livello in cui si trova z. Possiamo ottenere un ciclo dispari del grafo prendendo il percorso seguito dalla BFS da z a x (j-i archi), quello da z a y (j-i archi) e l'arco (x,y). In totale il ciclo contiene 2(j-i)+1 archi.





Antenato comune più vicino (lowest common ancestor)

Caso (ii)

Algoritmo che usa BFS per determinare se un grafo è bipartito

Modifichiamo BFS come segue:

- Usiamo un array Color per assegnare i colori ai nodi
- Ogni volta che aggiungiamo un nodo v alla lista L[i+1] poniamo Color[v] uguale a rosso se i+1 è pari e uguale a blu altrimenti
- Alla fine esaminiamo tutti gli archi per vedere se c'è ne è uno con le estremità dello stesso colore . Se c'è concludiamo che G non è bipartito (perche'?); altrimenti concludiamo che G è bipartito (perche'?).

- Tempo: $O(n+m)$

9

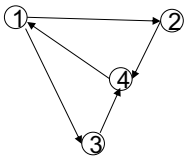
Visita di grafi direzionati

- Raggiungibilità con direzione. Dato un nodo s, trova tutti i nodi raggiungibili da s.
- Il problema del più corto percorso diretto da s a t. Dati due nodi s e t, qual è la lunghezza del percorso più corto da s a t?
- Visita di un grafo. Le visite BFS e DFS si estendono naturalmente ai grafi direzionati.
  - Quando si esaminano gli archi incidenti su un certo vertice u, si considerano solo quelli uscenti da u.
- Web crawler. Comincia dalla pagina web s. Trova tutte le pagine raggiungibili a partire da s, sia direttamente che indirettamente.

10

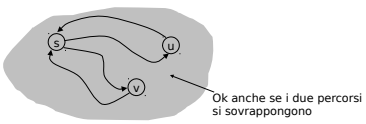
Connettività forte

- Def. I nodi u e v sono mutualmente raggiungibili se c'è un percorso da u a v e anche un percorso da v a u.
- Def. Un grafo in cui ogni ogni coppia di nodi è mutualmente raggiungibile si dice fortemente connesso



Connettività forte

- Lemma. Sia s un qualsiasi nodo di un grafo direzionato G. G è fortemente connesso se e solo se ogni nodo è raggiungibile da s ed s è raggiungibile da ogni nodo.
- Dim. $\Rightarrow$ Segue dalla definizione.
- Dim. $\Leftarrow$ Un percorso da u a v si ottiene concatenando il percorso da u ad s con il percorso da s a v. Un percorso da v ad u si ottiene concatenando il percorso da v ad s con il percorso da s ad u.



Algoritmo per la connettività forte

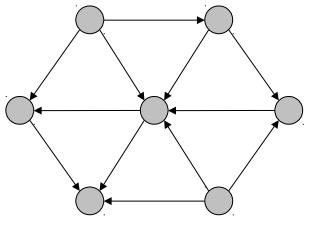
Teorema. Si può determinare se G è fortemente connesso in tempo O(m + n).

Dim.

- Prendi un qualsiasi nodo s.
- Esegui la BFS con sorgente s in G.
- Crea il grafo G^{rev} invertendo la direzione di ogni arco in G
- Esegui la BFS con sorgente s in G^{rev}.
- Restituisci true se e solo se tutti i nodi di G vengono raggiunti in entrambe le esecuzioni della BFS.
- La correttezza segue dal lemma precedente.
  - La prima esecuzione trova i percorsi da s a tutti gli altri nodi
  - La seconda esecuzione trova i percorsi da tutti gli altri nodi ad s perchè avendo invertito gli archi un percorso da s a u è di fatto un percorso da u ad s nel grafo di partenza.

Grafi direzionati aciclici (DAG)

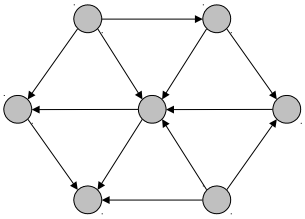
- Def. Un DAG è un grafo direzionato che non contiene cicli direzionati
- Possono essere usati per esprimere vincoli di precedenza o dipendenza: l'arco (v_i, v_j) indica che v_i deve precedere v_j o che v_j dipende da v_i
- Infatti generalmente i grafi usati per esprimere i suddetti vincoli sono privi di clicli
- Esempio. Vincoli di precedenza: grafo delle propedeuticità degli esami



Un DAG G

Grafi direzionati aciclici (DAG)

- Applicazioni
  - Propedeuticita` : il corso v_i deve essere superato prima di sostenere l'esame del corso v_j .
  - Compilazione: il modulo v_i deve essere compilato prima del modulo v_j .
  - Pipeline dell'esecuzione di job: l'output del job v_i serve per determinare l'input del job v_j
  - Pianificazione dello sviluppo di un software: alcuni moduli devono essere scritti prima di altri.



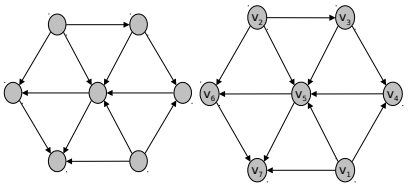
Un DAG G

15

Ordine topologico

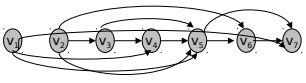
- Def. Un ordinamento topologico di un grafo direzionato $G = (V, E)$ è un etichettatura dei suoi nodi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tale che se G contiene l'arco (v_i, v_j) si ha $i < j$. Detto in un altro modo, un ordinamento topologico di G è un ordinamento dei nodi di G tale che se c'è l'arco (u,w) in G, allora il vertice u precede il vertice w nell'ordinamento (tutti gli archi puntano in avanti nell'ordinamento).

- Esempio. Nel caso in cui un grafo direzionato G rappresenti le propedeuticità degli esami, un ordinamento topologico indica un possibile ordine in cui gli esami possono essere sostenuti dallo studente.



Un DAG G

Un ordinamento topologico di G



Un modo diverso di ridisegnare G in modo da evidenziare l'ordinamento topologico di G

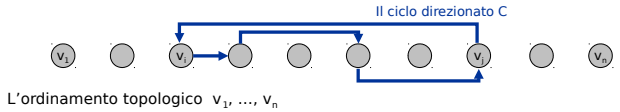
16

DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se un grafo direzionato G ha un ordinamento topologico allora G è un DAG.

Dim. (per assurdo)

- Supponiamo che G sia un grafo direzionato e che abbia un ordinamento $v_1, \ldots, v_n$. Supponiamo per assurdo che G non sia un DAG ovvero che abbia un ciclo direzionato C. Vediamo cosa accade.
- Consideriamo i nodi che appartengono a C e tra questi sia v_i quello con indice più piccolo e sia v_j il vertice che precede v_i nel ciclo C. Ciò ovviamente implica che (v_j, v_i) è un arco.
- Siccome (v_j, v_i) è un arco e $v_1, \ldots, v_n$ è un ordinamento topologico allora, deve essere $j < i$.
- $j < i$ è impossibile in quanto abbiamo scelto v_i come il vertice di indice più piccolo in C e di conseguenza vale $i < j$. Siamo arrivati ad un assurdo. Cioè una contraddizione al fatto che G contiene un ciclo.



L'ordinamento topologico $v_1, \ldots, v_n$

17

DAG e ordinamento topologico

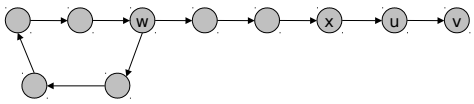
- Abbiamo visto che se G ha un ordinamento topologico allora G è un DAG.
- Domanda. é vera anche l'implicazione inversa? Cioè dato un DAG, è sempre possibile trovare un suo ordinamento topologico?
- E se sì, come trovarlo?

18

DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se G è un DAG allora G ha un nodo senza archi entranti
Dim. (per assurdo)

- Supponiamo che G sia un DAG e che ogni nodo di G abbia almeno un arco entrante. Vediamo cosa succede.
- Prendiamo un qualsiasi nodo **v** e cominciamo a seguire gli archi in senso contrario alla loro direzione a partire da **v**. Possiamo farlo perchè ogni nodo ha un arco entrante: v ha un arco entrante (u,v), il nodo u ha un arco entrante (x,u) e così via.
- Possiamo continuare in questo modo per quante volte vogliamo. Immaginiamo di farlo per n o più volte. Così facendo attraversiamo a ritroso almeno n archi e di conseguenza passiamo per almeno n+1 vertici. Ciò vuol dire che c'è un vertice w che viene incontrato almeno due volte e quindi deve esistere un ciclo direzionato C che comincia e finisce in w



19

19

DAG e ordinamento topologico

Lemma. Se G è un DAG, G ha un ordinamento topologico.
Dim. (induzione su n)

- Caso base: vero banalmente se n = 1.
- Passo induttivo: supponiamo asserto del lemma vero per DAG con n≥1 nodi
- Dato un DAG con n+1 > 1 nodi, prendiamo un nodo v senza archi entranti (abbiamo dimostrato che un tale nodo deve esistere).
- G - { v } è un DAG, in quanto cancellare un nodo non introduce clicli nel grafo.
- Poiché G - { v } è un DAG con n nodi allora, per ipotesi induttiva, G - { v } ha un ordinamento topologico.
- Consideriamo l'ordinamento dei nodi di G che si ottiene mettendo v all'inizio dell'ordinamento e aggiungendo gli altri nodi nell'ordine in cui appaiono nell'ordinamento topologico di G - { v }.
- Siccome v non ha archi entranti tutti i suoi archi sono archi uscenti e ovviamente puntano verso nodi di G-{v}. Quello che si ottiene è un ordinamento topologico (tutti gli archi puntano in avanti).

20

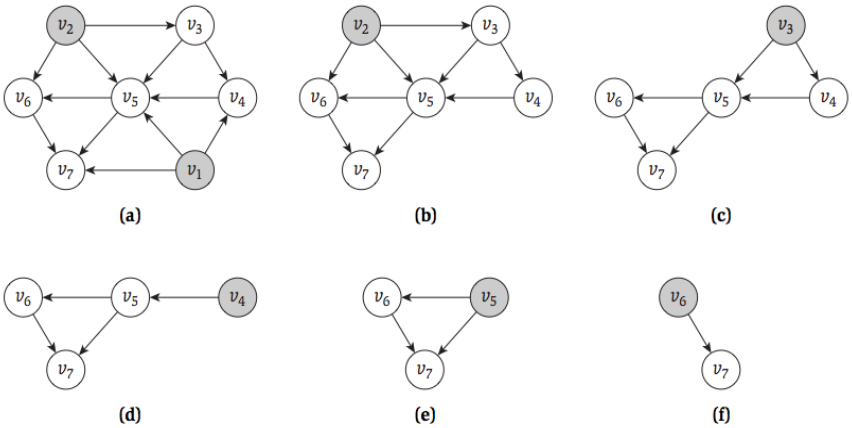
Algoritmo per l'ordinamento topologico

- La dimostrazione per induzione che abbiamo appena visto suggerisce un algoritmo ricorsivo per trovare l' ordinamento topologico di un DAG.

G: DAG

```
TopologicalOrder(G)
    if esiste nodo v senza archi entranti
        cancella v da G in modo da ottenere G-{v}
        L=TopologicalOrder(G-{v})
        aggiungi v all'inizio di L
        return L
    endif
    else     //siccome G è un DAG, l'else è eseguito solo se G vuoto
        return lista vuota
```


Algoritmo per l'ordinamento topologico



Algoritmo per l'ordinamento topologico : analisi dell'algoritmo

1) Trovare un nodo senza archi entranti nell'if richiede $O(n)$ se per ogni nodo viene memorizzato il numero di archi entranti
2) Cancellare un nodo v da G richiede tempo proporzionale al numero di archi uscenti da v che è **al più** deg(v)

- Se consideriamo tutte le n chiamate ricorsive il tempo è $O(n^2)$ per 1) e $O(m)$ per 2). Quindi il tempo di esecuzione è $O(n^2+m)=O(n^2)$

```
TopologicalOrder(G)
    if esiste nodo v senza archi entranti
        cancella v da G in modo da ottenere G-{v}
        L=TopologicalOrder(G-{v})
        aggiungi v all'inizio di L
        return L
    endif
    else
        return lista vuota
```


23

Algoritmo per l'ordinamento topologico : analisi dell'algoritmo

- Possiamo anche scrivere la relazione di ricorrenza

$$T(n) \leq \begin{cases} c \quad \text{per } n=1 \\ T(n-1)+c'n \text{ per } n>1 \end{cases}$$

Lavoro ad ogni chiamata ricorsiva è $O(n+deg(v))=O(n)$, dove v è il nodo rimosso da G

che ha soluzione $T(n)=O(n^2)$

Metodo iterativo

$T(n) \leq T(n-1)+c'n \leq T(n-2)+c'(n-1)+c'n \leq T(n-3)+c'(n-2)+c'(n-1)+c'n \leq \ldots \leq$

$T(1) + c'2+\ldots+ c'(n-1)+ c'n \leq c + c'2+\ldots+ c'(n-1)+ nc' = c+c'n(n+1)/2 -c' = O(n^2)$

Metodo di sostituzione. Ipotizziamo $T(n) \leq Cn^2$ per $n \geq n_0$, dove C ed n_0 sono costanti positive da determinare. Dimostriamo che la nostra intuizione e` corretta utilizzando l'induzione.

Base induzione: $T(1) \leq c \leq 1^2C$ se $C \geq c$

Passo induttivo.

$T(n) \leq T(n-1)+c'n \leq C(n-1)^2+c'n = Cn^2+C-2Cn+c'n$ l'ultimo membro è $\leq Cn^2$ se $C-2Cn+c'n \leq 0$ e questa disuguaglianza vale se $C \geq c'n/(2n-1)$.

Siccome $c'n/(2n-1) \leq c'$ allora basta prendere $C \geq c'$

Affinche' valgano la base dell'induzione e il passo induttivo, basta quindi prendere $C=\max\{c,c'\}$ e $n_0=1$

24

Algoritmo per l'ordinamento topologico con informazioni aggiuntive

- Il bound $O(n^2)$ non è molto buono se il grafo è sparso, cioè se il numero di archi è molto più piccolo di n^2
- Possiamo ottenere un bound migliore?

- Per ottenere un bound migliore occorre usare un modo efficiente per individuare un nodo senza archi entranti ad ogni chiamata ricorsiva

- Si procede nel modo seguente:
- Un nodo si dice attivo se non è stato ancora cancellato
- Occorre mantenere le seguenti informazioni:
- per ciascun vertice attivo w
  - count[w] = numero di archi entranti in w provenienti da nodi attivi.
  - S = insieme dei nodi attivi che non hanno archi entranti provenienti da altri nodi attivi (nodi w con count[w]=0).

25

Algoritmo per l'ordinamento topologico con informazioni aggiuntive: analisi

Teorema. L'algoritmo trova l'ordinamento topologico di un DAG in tempo $O(m + n)$.
Dim.

- Inizializzazione. Richiede tempo $O(m + n)$ in quanto
  - I valori di count[w] vengono inizializzati scandendo tutti gli archi e incrementando count[w] per ogni arco entrante in w basta scandire tutti gli archi una sola volta → tempo $O(m)$
    - Se per ogni nodo viene memorizzato il numero di archi entranti → possiamo inizializzare i count[w] in tempo $O(n)$
  - Inizialmente tutti i nodi sono attivi per cui S consiste dei nodi di G senza archi entranti ed è sufficiente esaminare count[w] per tutti i nodi w una sola volta per inizializzare S → tempo $O(n)$

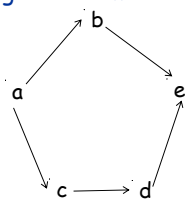
- Aggiornamento. Richiede $O(n+m)$ sul totale di tutte le chiamate ricorsive in quanto
  - Per trovare il nodo v da cancellare basta prendere un nodo da S.
  - Per cancellare v occorre
  1. Cancellare v da S e da G. Cancellarlo da G costa deg(v). Se S è rappresentata da una lista e se cancelliamo ogni volta da S il primo nodo della lista→ tempo $O(1)$ (anche in una lista a puntatori singoli)
  2. Per ogni arco (v,w), decrementare count[w] e se count[w] diventa uguale 0 aggiungere w a S → tempo $O(\deg(v))$.

I passi 1. e 2. vengono eseguiti una volta per ogni vertice → tutti gli aggiornamenti vengono fatti in $\sum_{u \in V} O(1) + \sum_{u \in V} O(\deg(u)) = O(n) + O(m) = O(n+m)$

26

Esercizio

Fornire tutti gli ordinamenti topologici del grafo sottostante



Soluzione. Potremmo esaminare le 5!= 120 possibili permutazioni….
Ragioniamo: il primo nodo dell'ordinamento non deve avere archi entranti, l'ultimo non deve avere archi uscenti. Gli unici nodi che rispettivamente soddisfano questi requisiti sono a ed e. Quindi ogni ordinamento topologico deve cominciare con a e finire con e. In quanti modi possono essere sistemati gli altri nodi? Osserviamo che l'arco (c,d) implica che c precede d in quasiasi ordinamento topologico mentre b può trovarsi in una qualsiasi posizione tra a ed e. In totale, ci sono quindi 3 ordinamenti topologici
a b c d e , a c b d e, a c d b e

27

27

Esercizio 2 Cap 3

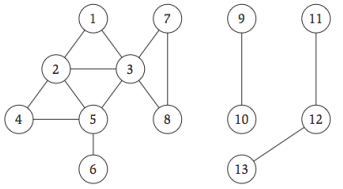
- Fornire un algoritmo che, dato un grafo non direzionato G, scopre se G contiene cicli e in caso affermativo produce in output uno dei cicli. L'algoritmo deve avere tempo di esecuzione O(n+m)
- Soluzione 1. Si esegua una visita BFS sul grafo. Se il grafo non è connesso si eseguono più visite, una per componente connessa. Se al termine gli alberi BFS contengono tutti gli archi di G allora G non contiene cicli. In caso contrario, c'è almeno un arco (x,y) che non fa parte degli alberi BFS. Consideriamo l'albero BFS T in cui si trovano x e y e sia z l'antenato comune più vicino a x e y (LCA di x e y). L'arco (x,y) insieme ai percorsi tra z e x e quello tra z e y forma un ciclo .

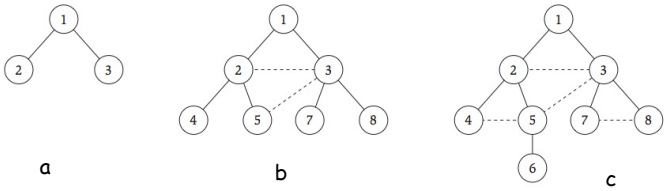
Come facciamo a trovare lo LCA di x e y in tempo O(n)?

28

Esercizio 2 Cap 3: esempio

G





Notiamo che (3,5) non appartiene a nessun albero BFS. L'antenato comune a 3 e 5 è 1 per cui il ciclo restituito è 5,2,1,3,5 (ciclo pari). Gli archi (2,3), (4,5) e (7,8) ci avrebbero fatto scoprire altri cicli (cicli dispari).

29

29

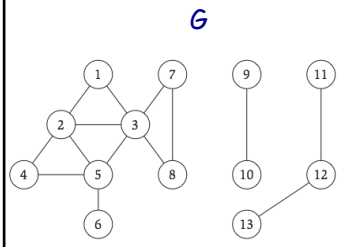
Esercizio 2 Cap 3

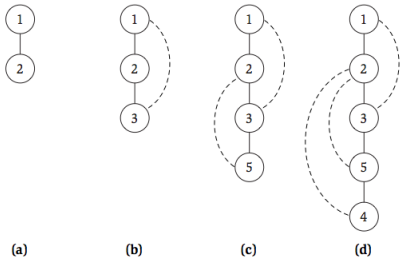
Soluzione 2. Si esegua una visita DFS sul grafo. Se il grafo non è connesso si eseguono più visite, una per componente connessa. Se al termine gli alberi DFS contengono tutti gli archi di G allora G non contiene cicli. In caso contrario, c'è almeno un arco (x,y) che non fa parte degli alberi DFS. Consideriamo l'albero DFS T in cui si trovano x e y. La Proprieta` 2 degli alberi DFS ci dice che x e y sono uno discendente dell'altro. Se x è stato scoperto prima di y allora y è discendente di x in T (si veda dimostrazione II caso Proprieta` 2). Per trovare il ciclo dobbiamo risalire il percorso da y a x aggiungendo man mano i nodi attraversati ad una lista ed infine aggiungendo y alla lista in modo che il ciclo cominci e finisca in y. (tempo O(n)). Se invece y è stato scoperto prima di x allora usiamo lo stesso procedimento sopra descritto ma questa volta risalendo il percorso da y a x e aggiungendo alla fine x alla lista.

Come facciamo a capire se x è discendente di y o viceversa?

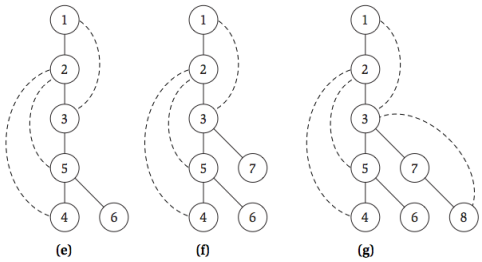
30

Esempio di albero DFS





Sia x=2 e y=5. L'arco (2,5) viene esaminato per la prima volta nel foreach di DFS(5). L'arco non viene messo in T perche' 2 è gia` stato esplorato. Il nodo 5 è discendente di 2. Il ciclo restituito è (5,3,2,5)



31

31

Esercizio 2 Cap 3

Come facciamo a capire se x è discendente di y o viceversa?

1 risposta:
Non mi serve capirlo in anticipo. Infatti si potrebbe risalire il percorso da y alla radice fino a che non si arriva ad x. Se questo percorso non passa per x allora si risale il percorso da x alla radice fino a che non si arriva ad y.
In entrambi i casi i vertici incontrati vengono man mano aggiunti in una lista. Se nel risalire il percorso da y alla radice si incontra x allora si aggiunge y alla fine della lista e la si restituisce in output. In caso contrario, questa lista viene scartata e si restituisce la lista con i nodi incontrati risalendo da x ad y e con l'aggiunta di x alla fine.
Tempo: O(n)

32

Esercizio 2 Cap 3

Come facciamo a capire se x è discendente di y o viceversa?

2 risposta:
se quando viene scandito l'arco (x,y) che non fa parte dell'albero DFS, cio` avviene nel foreach di DFS(y) allora y è discendente di x, altrimenti x è discendente di y.

L'intero algoritmo puo` quindi essere descritto nel seguente modo:

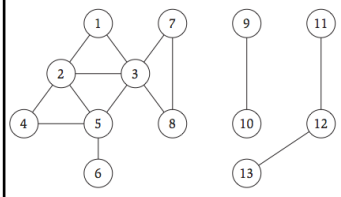
- inizializza tutti i nodi come non esplorati
- fino a quando ci sono nodi non esplorati esegue una versione modificata di DFS su uno dei nodi non ancora esplorati: la versione modificata di DFS restituisce
  - una coppia di nodi u,v tali che u e v compaiono in un ciclo della componente connessa esplorata dalla DFS e u è discendente di v nell'albero DFS (la coppia puo` essere mantenuta in un lista che ha u come primo elemento e v come secondo elemento);
  - oppure una lista vuota, nel caso in cui la componente connessa esplorata dalla DFS non contenga un ciclo.

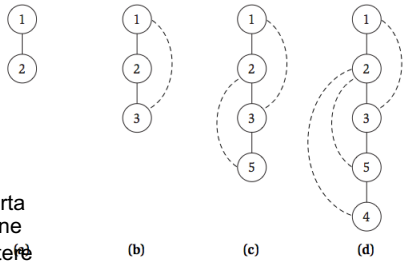
  Se una delle DFS invocate dall'algoritmo restituisce una coppia di nodi allora l'algoritmo smette di invocare la DFS sui nodi non ancora esplorati e produce in output il ciclo ottenuto partendo dal primo vertice della coppia cosi` come descritto nella slide 30.

33

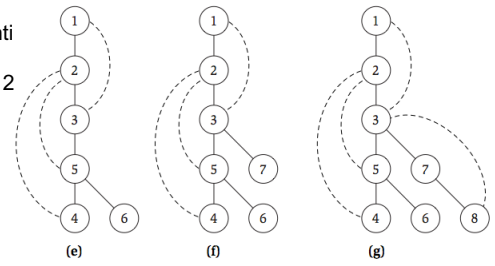
Esempio di albero DFS

G





Il primo arco incontrato dall'algoritmo che porta in un nodo gia` esplorato è (1,3) e cio` avviene nel for di DFS(3). L'algoritmo puo` gia` smettere la visita della componente connessa in quel momento e non effettuare la DFS per le restanti componenti connesse. Il ciclo è ottenuto risalendo da 3 al nodo padre di 3 che è 2 e da 2 alla nodo padre di 2 che è 1, man mano aggiungendo i nodi ad una lista alla fine della quale viene poi aggiunto 3



34

Esercizio 2 Cap 3

Esercizio: scrivere lo pseudocodice della versione modificata di DFS per la soluzione 2.

```
DFSMOD(u):
 poni explored[u]=true
 for each (u,v) incident to u
  if explored[v]==true and v≠u  //c'è un ciclo che contiene u e v
        L ← list with u and v in the first and second positions, respectively
        return L
  if explored[v]==false        //il nodo non v è stato gia` esplorato
        parent[v]=u            //equivale a inserire (u,v) nell'albero DFS
        L=DFSMOD(v)
        if L is not empty   //la DFS su v ha individuato un ciclo
             return L        //restituisce la lista contenente due nodi del ciclo
 end for
 L← empty list
 return L
```

la visita termina non appena incontra un arco che porta in nodo gia` esplorato diverso da u (primo if) oppure non appena una delle DFS invocate nel for restituisce una lista non vuota (if)

35

Esercizio 3 Cap. 3

- Modificare l'algoritmo per l'ordinamento topologico di un DAG in modo tale che se il grafo direzionato input non è un DAG l'algoritmo riporta in output un ciclo che fa parte del grafo.

Soluzione. Consideriamo l'algoritmo per l'ordinamento topologico e supponiamo di invocarlo su un grafo G non necessariamente aciclico

- Caso 1. Ogni volta che l'algoritmo viene invocato ricorsivamente su un grafo non vuoto, l'insieme S non è vuoto. In questo caso riusciamo ad ottenere un ordinamento topologico perché ogni nodo cancellato v non ha archi entranti che provengono dai nodi che sono ancora attivi e che quindi saranno posizionati nell'ordinamento dopo v. Il Lemma ci dice che se il grafo ha un ordinamento topologico allora il grafo è un DAG.
- Caso 2. All'inizio di una certa chiamata ricorsiva su un grafo non vuoto, si ha che S è vuoto. In questo caso il grafo formato dai nodi attivi non è un DAG per il lemma che dice che un DAG ha almeno un nodo senza archi entranti. Il ciclo è ottenuto percorrendo a ritroso gli archi a partire da un qualsiasi nodo attivo v fino a che non incontriamo uno stesso nodo w due volte.

Continua nella prossima slide

36

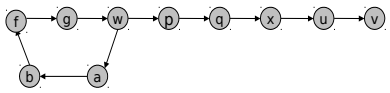
Esercizio 3 Cap. 3

- Basta quindi modificare l'algoritmo in modo che se all'inizio di una chiamata ricorsiva si ha che se G non è vuoto ed S è vuoto allora l'algoritmo sceglie un nodo attivo v e comincia a percorrere gli archi a ritroso a partire da v: si sceglie un arco (x,v) nella lista degli archi entranti in v, poi si sceglie un arco (y,x) nella lista degli archi entranti in x e così via.
  - NB: stiamo supponendo di mantenere per ogni nodo anche la lista degli archi entranti nel nodo
- Ogni volta che viene attraversato un arco (p,q) a ritroso, il nodo p raggiunto viene inserito all'inizio di una lista a doppi puntatori ed etichettato come visitato.
- Se ad un certo punto si raggiunge un nodo w già etichettato come visitato, l'algoritmo interrompe questo percorso all'indietro e cancella dalla lista tutti i nodi a partire dalla fine della lista fino a che incontra per la prima volta w.
- I nodi restanti nella lista formano un ciclo direzionato che comincia e finisce in w.
- Tempo O(n+m) in quanto l'algoritmo per l'ordinamento ha costo O(n+m) e il costo aggiuntivo per trovare il ciclo è O(n).

Continua nella prossima slide

Esercizio 3 Cap. 3

Esempio di grafo con ciclo



Se cominciamo il cammino a ritroso a partire da v, la lista dei nodi attraversati è w a b f g w p q x u v (aggiungiamo ogni nodo attraversato all'inizio della lista). Non appena incontriamo la seconda occorrenza di w, ci fermiamo e cancelliamo gli ultimi 5 nodi della lista scandendo la lista a partire dalla fine. I nodi che rimangono nella lista formano il ciclo w a b f g w.

Esercizio 7 Cap. 3

Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Sia G un grafo non direzionato con un numero n pari di vertici e in cui ogni vertice ha grado almeno n/2. G è connesso.

Soluzione:

- L'affermazione è vera.
- Dimostrazione. Immaginiamo di eseguire la BFS su G a partire da un certo nodo u. Dimostreremo che la BFS, a partire da u, raggiunge tutti i nodi di G.
- ✷ Siccome u ha grado almeno n/2 → nel livello L_1 ci saranno almeno n/2 nodi
- Se tutti i nodi diversi da u sono in L_1 allora il grafo è ovviamente connesso. Supponiamo che esista un vertice v diverso da u che non è in L_1.
- Siccome v ha grado almeno n/2 e non è adiacente ad u (altrimenti v sarebbe in L_1) → almeno uno degli archi incidenti su v deve incidere su un vertice che si trova nel livello L_1.
  - Semplice argomento: se escludiamo u ed i nodi nel livello L_1, rimangono n-1-| L_1| nodi che per la ✷ sono al piu` n-1-n/2= n/2-1.
- Quindi ogni vertice v diverso da u e che non è adiacente ad u deve essere adiacente ad un nodo di L_1 → ogni nodo che non è ne' in L_0 ne' in L_1 viene inserito nella BFS nel livello L_2 → G è connesso

39

Esercizio 6 Cap. 3

Sia G un grafo connesso non direzionato tale che il DFS tree e il BFS tree di G sono uguali allo stesso albero T. Dimostrare che G =T (cioè non ci sono archi di G che non sono inclusi in T).

Soluzione:

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un arco (x,y) di G che non è in T.

1. T è un BFS tree → gli indici dei livelli di x e y in T differiscono al più di 1
2. T è un DFS tree → x è discendente di y in T o y è discendente di x in T
3. per ipotesi assurda (x,y) non è in T → x e y non sono in relazione padre figlio.

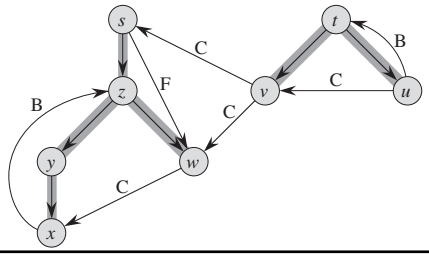
- Dalla 2. sappiamo che x e y sono uno discendente dell'altro in T e quindi non possono essere sullo stesso livello. La 1. allora implica che x e y sono su livelli consecutivi. La 1. e la 2. insieme allora implicano che x e y sono in livelli consecutivi e sono uno discendente dell'altro. Ciò è possibile solo se x e y sono in relazione padre figlio.
- Siamo arrivati a contraddire la 3. e quindi non è possibile che esista un arco di G che non è in T.

40

Individuazione di un ciclo in un grafo direzionato con DFS

Nel caso di un grafo direzionato, imbattersi in un nodo gia` incontrato (esplorato) non indica che vi sia necessariamente un ciclo.
Nel grafo in basso l'arco (u,v) ci riporta in v che è stato gia` iesplorato ma l'arco (u,v) non fa parte di un ciclo.
Quali archi ci fanno capire che ci sono dei cicli?
Gli archi (x,z) tali che x e` discendente di z nell'albero DFS.
In altre parole x è esplorato prima che si concluda la chiamata DFS(z), come per i nodi x e z in figura.
Per come abbiamo scritto l'implementazione di DFS con lo stack, i nodi lungo il percorso tra z e x sono quelli che si trovano tra x e z (direzione top-bottom) nello stack durante la chiamata ricorsiva su x.
Possiamo aggiungere alla DFS iterativa un arrray **isinstack** tale che **isinstack[v]= true** se e solo v è nello stack. Settiamo **isinstack[v]** a true quando v viene esplorato e quindi inserito nello stack e lo settiamo di nuovo a false quando facciamo il pop di v dallo stack.
Nel foreach di DFS(x), ci accorgiamo che (x,z) ci porta in z e che z è ancora nello stack.

Facciamo quindi i pop dei nodi dallo stack fino a che non arriviamo a z.
Inseriamo via via i nodi estratti in testa ad una lista e alla fine aggiungiamo x in testa.
Nell'esempio la lista conterra` x,z,y,x



41