

Grafi (I parte)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23

Matricole congrue a 1

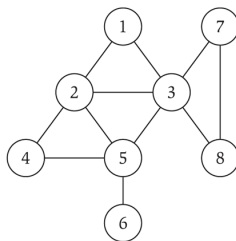
Docente: Annalisa De Bonis

1

1

Grafi non direzionati

- **Grafi non direzionati.** $G = (V, E)$
 - V = insieme nodi.
 - E = insieme archi.
 - Esprime le relazioni tra coppie di oggetti.
 - Parametri del grafo: $n = |V|$, $m = |E|$.



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6, 7-8\}$$

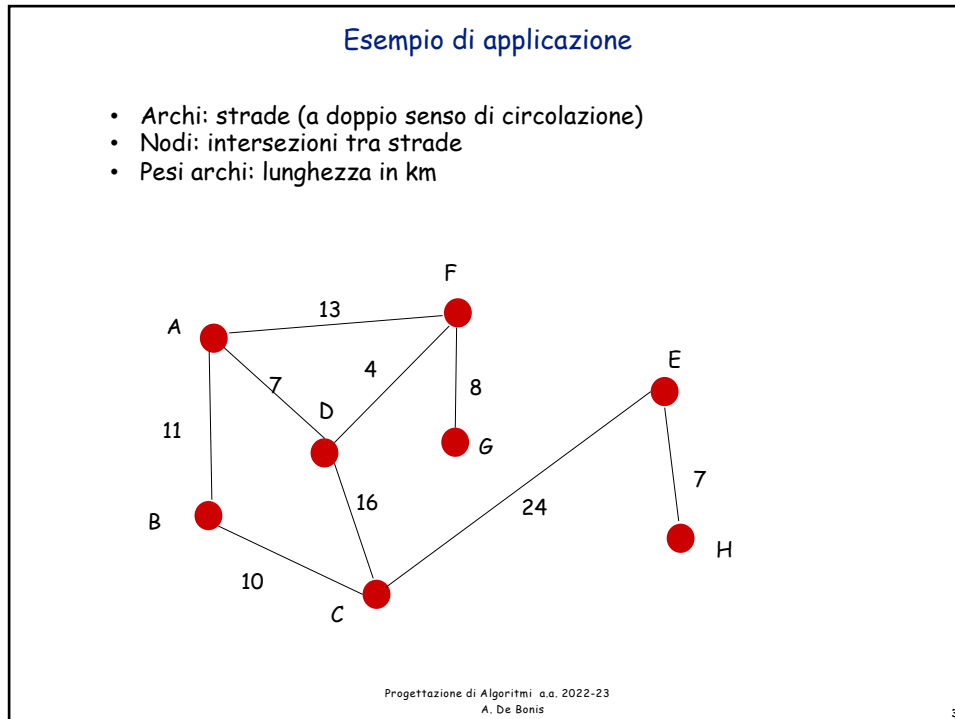
$$n = 8$$

$$m = 11$$

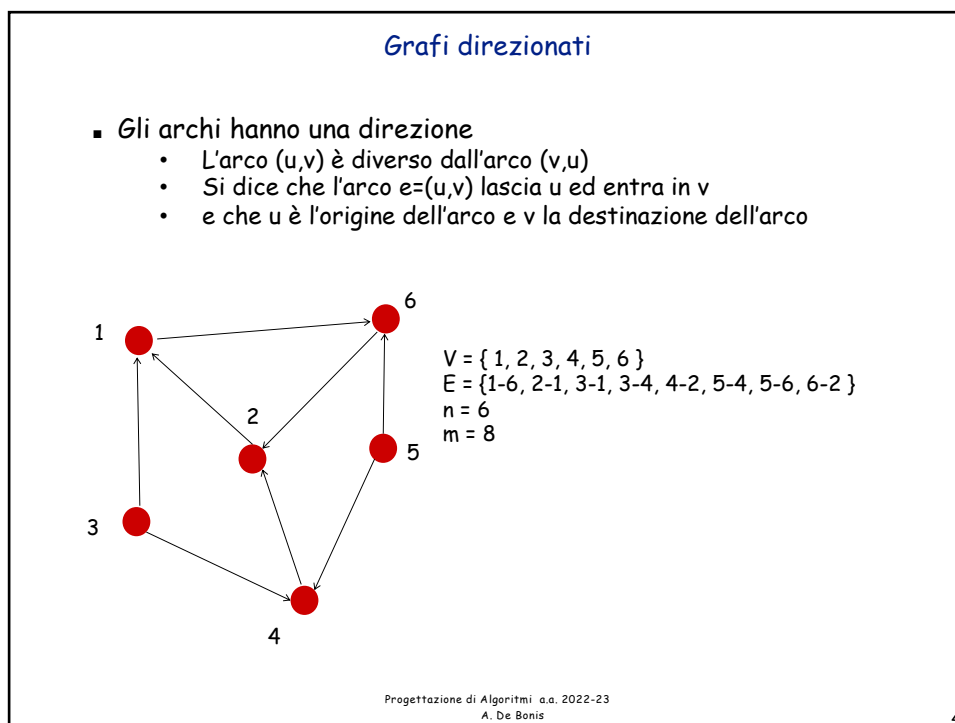
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

2

2



3



4

Grafì direzionati

- **Grafì non direzionati** $G = (V, E)$ possono essere visti come un caso particolare degli archi direzionati in cui per ogni arco (u,v) c'è l'arco di direzione opposta (v,u)

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

5

Esempio di applicazione

- Archi: strade (a senso unico di circolazione)
- Nodi: intersezioni tra strade
- Pesi archi: lunghezza in km

6

6

Alcune applicazioni dei grafi

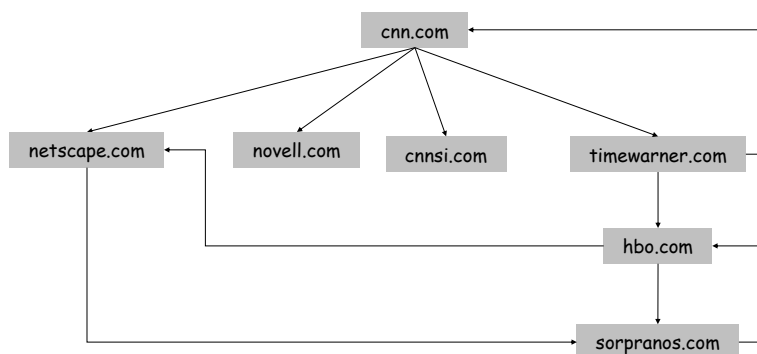
- Rete di amicizia su un social network: ogni utente è un nodo; ogni volta che due utenti diventano amici, si crea un arco del grafo.
- Google maps: i nodi rappresentano città, intersezioni di strade, siti di interesse, ecc. e gli archi rappresentano le connessioni dirette tra i nodi.
 - La rappresentazione mediante un grafo permette di trovare il percorso più corto per andare da un posto all'altro mediante un algoritmo.
- World Wide Web: le pagine web sono i nodi e il link tra due pagine è un arco. Google utilizza questa rappresentazione per esplorare il World Wide Web

7

7

World Wide Web

- **Web graph.**
 - Nodo: pagina web.
 - Edge: hyperlink da una pagina all'altra.



Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

8

8

Ecological Food Web

- Food web graph.
 - Nodo = specie
 - Arco dalla preda al predatore.

Reference: <http://www.twingroves.district96.k12.il.us/Wetlands/Salamander/SalGraphics/salfoodweb.gif>

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

9

Alcune applicazioni dei grafi

<i>Graph</i>	<i>Nodi</i>	<i>Archi</i>
trasporto	intersezioni di strade	strade
trasporto	aeroporti	voli diretti
comunicazione	computer	cavi di fibra ottica
World Wide Web	web page	hyperlink
rete sociale	persone	relazioni
rete del cibo	specie	preda-predatore
scheduling	task	vincoli di precedenza
circuiti	gate	wire

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

10

Terminologia

- Consideriamo due nodi u e v di un grafo G connessi dall'arco $e = (u,v)$
- Si dice che
 - u e v sono adiacenti
 - u e v sono le estremità dell'arco (u,v)
 - l'arco (u,v) incide sui vertici u e v
 - u è un nodo vicino di v
 - v è un nodo vicino di u
- Dato un vertice u di un grafo G
 - grado di u = numero archi incidenti su u
 - è indicato con $\text{deg}(u)$

11

11

Numero di archi di un grafo non direzionato

m = numero di archi di G ;

n = numero di nodi di G .

1. La somma di tutti i gradi dei nodi di G è $2m$: $\sum_{u \in V} \text{deg}(u) = 2m$

Degree (grado) = numero di vicini di u

Dim. Ciascun arco incide su due vertici e quindi viene contato due volte nella sommatoria in alto. L'arco (x,y) è contato sia in $\text{deg}(x)$ che in $\text{deg}(y)$.

2. Il numero m di archi di un grafo G non direzionato è al più $n(n-1)/2$.

Dim. Il numero di coppie **non ordinate** distinte che si possono formare con n nodi è $n(n-1)/2$.

Posso scegliere il primo nodo dell'arco in n modi e il secondo in modo che sia diverso dal primo nodo, cioè in $n-1$ modi. Dimezzo in quanto l'arco (u,v) è uguale all'arco (v,u)

12

12

Numero di archi di un grafo direzionato

m = numero di archi di G ;

n = numero di nodi di G

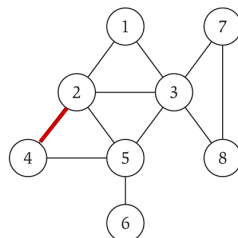
Il numero m di archi di G è al più n^2

Dim. Il numero di coppie **ordinate** distinte che si possono formare con n nodi è n^2 . Posso scegliere il primo nodo dell'arco in n modi e il secondo in altri n modi (se ammettiamo archi con entrambe le estremità uguali).

13

Graph Representation: Adiacenza Matrix

- **Matrice di adiacenza.** Matrice $n \times n$ con $A_{uv} = 1$ se (u, v) è un arco.
 - Spazio proporzionale a n^2 .
 - Controllare se (u, v) è un arco richiede tempo $\Theta(1)$.
 - Identificare tutti gli archi richiede tempo $\Theta(n^2)$.

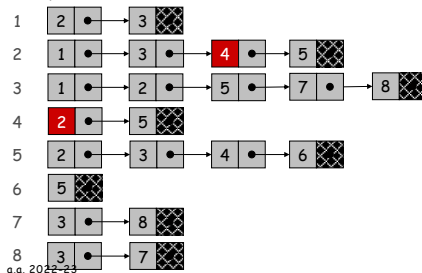
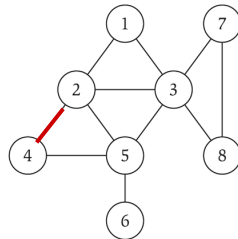


	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	1	0	0	0	1	0

14

Rappresentazione di un grafo: liste di adiacenza

- **Liste di adiacenza.** Array di liste in cui ogni lista è associata ad un nodo.
 - Ad ogni arco corrisponde un elemento della lista.
 - Se esiste l'arco (u,v) allora la lista associata ad u contiene v
 - In un grafo non direzionato l'arco (u,v) corrisponde ad un elemento della lista associata ad u e ad un elemento della lista associata a $v \rightarrow$ somma lunghezze liste = $2m$
 - In un grafo direzionato l'arco (u,v) corrisponde ad un elemento della lista associata ad $u \rightarrow$ somma lunghezze liste = m
 - Spazio proporzionale a $m + n$.
 - Controllare se (u, v) è un arco richiede tempo $O(deg(u))$.
 - Individuare tutti gli archi richiede tempo $\Theta(m + n)$.



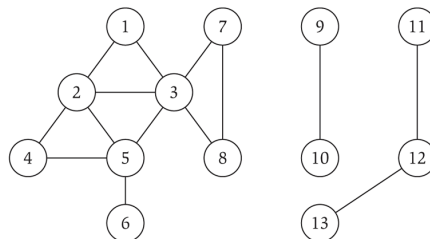
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

15

15

Percorsi e connettività

- **Def.** Un percorso in un grafo non direzionato $G = (V, E)$ è una sequenza P di nodi $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ con la proprietà che ciascuna coppia di vertici consecutivi v_i, v_{i+1} è unita da un arco in E .
- **Def.** Un percorso è **semplice** se tutti i nodi sono distinti.
- **Def.** Un grafo non direzionato è **connesso** se per ogni coppia di nodi u e v , esiste un percorso tra u e v .



Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

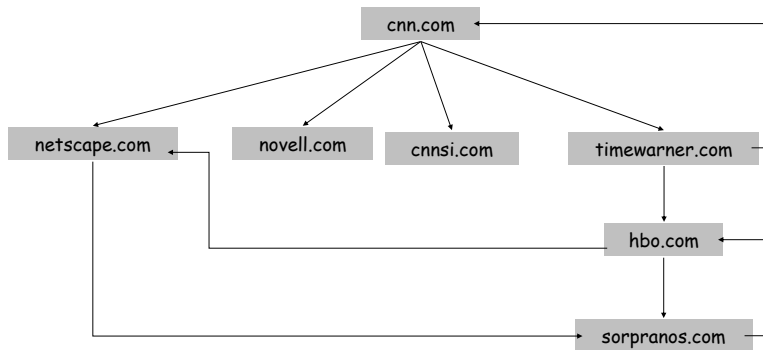
16

16

Applicazione del concetto di percorso

- **Esempi:**

Web graph. Voglio capire se è possibile, partendo da una pagina web e seguendo gli hyperlink nelle pagine via via attraversate, arrivare ad una determinata pagina



Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

17

17

Applicazione del concetto di percorso

In alcuni casi può essere interessante scoprire il percorso più corto, cioè composto dal minimo numero di archi, tra due nodi.

Esempio:

- Grafo : rete di trasporti dove i nodi sono gli aeroporti e gli archi i collegamenti diretti tra aeroporti.
- Voglio arrivare da Napoli a New York facendo il minimo numero di scali.

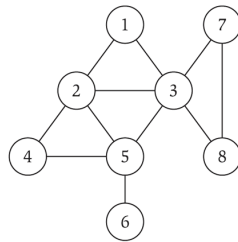
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

18

18

Cicli

- **Def.** Un ciclo è un percorso $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ in cui $v_1 = v_k$, $k > 2$.
- **Def.** Un ciclo $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_1$ è **semplice** se i primi $k-1$ nodi del ciclo sono tutti distinti tra di loro



ciclo (semplice) $C = 1-2-4-5-3-1$

ciclo (non semplice) $C' = 1-3-7-8-3-5-2-1$

Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

19

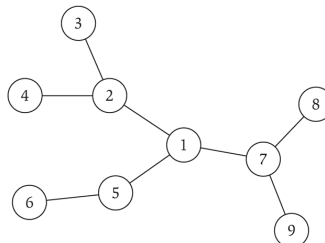
19

Alberi

- **Def.** Un grafo non direzionato è un **albero (tree)** se è connesso e non contiene cicli
- **Teorema.** Sia G un grafo non direzionato con n nodi. Ogni due delle seguenti affermazioni implica la restante affermazione.

- $1 \text{ e } 2 \implies 3$; $1 \text{ e } 3 \implies 2$; $2 \text{ e } 3 \implies 1$

1. G è connesso.
2. G non contiene cicli.
3. G ha $n-1$ archi.



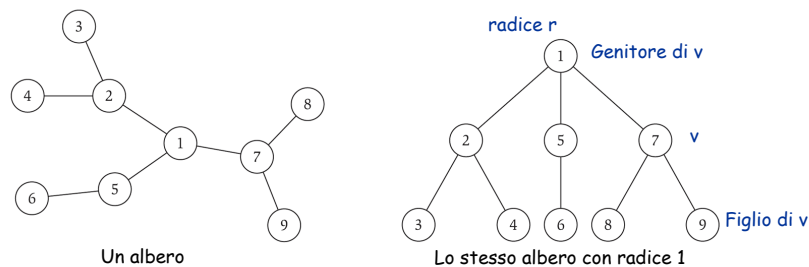
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

20

20

Alberi con radice

- **Albero con radice.** Dato un albero T , si sceglie un nodo radice r e si considerano gli archi di T come orientati a partire da r
- **Dato un nodo v di T si dice**
 - **Genitore di v :** il nodo che w precede v lungo il percorso da r a v (v viene detto figlio di w)
 - **Antenato di v :** un qualsiasi nodo w lungo il percorso che va da r a v (v viene detto discendente di w)
- **Foglia:** nodo senza discendenti

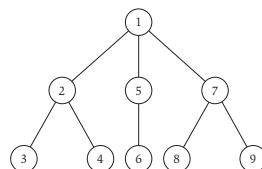


Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

21

Alberi con radice

- Scegliere un nodo come radice, rende più semplice dimostrare la seguente affermazione
- **se G è connesso e non contiene cicli**, in altre parole, **se G è un albero** allora il numero di archi è $n-1$ (dove n è il numero di nodi).
- **Dim.**
- Per ogni nodo diverso dalla radice c'è un arco distinto che lo connette al proprio padre → **numero di archi $\geq n-1$**
- Per ogni arco c'è un nodo distinto (non radice) che è congiunto al padre da quell'arco → **numero di archi $\leq n-1$**
- le due disequazioni → **numero di archi = $n-1$**



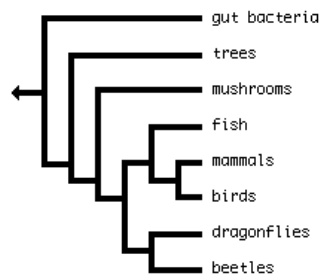
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

22

22

Importanza degli alberi: rappresentano strutture gerarchiche

- **Alberi filogenetici.** Descrivono la storia evolutiva delle specie animali.



La filogenesi afferma l'esistenza di una specie ancestrale che diede origine a mammiferi e uccelli ma non alle altre specie rappresentate nell'albero (cioè, mammiferi e uccelli condividono un antenato che non è comune ad altre specie nell'albero). La filogenesi afferma inoltre che tutti gli animali discendono da un antenato non condiviso con i funghi, gli alberi e i batteri, e così via.

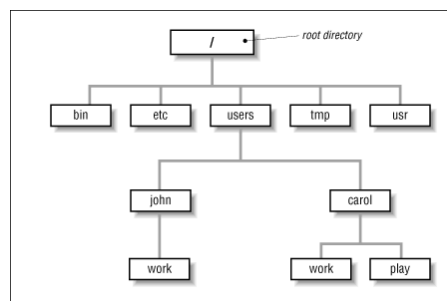
Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

23

23

Importanza degli alberi: rappresentano strutture gerarchiche

- **File system.** Un file system tipicamente consiste di file organizzati in gruppi chiamati directory.
 - Una directory può contenere file e altre directory,
 - Un file system gerarchico è organizzato secondo una struttura gerarchica ad albero con radice
 - nodi interni: directory
 - foglie: file



Progettazione di Algoritmi a.a. 2022-23
A. De Bonis

24

24