

Cognome:

Nome:

Matricola:

Rispondere alle domande usando lo spazio designato. Le ultime pagine sono riservate ad appunti o brutta copia. **NON USARE ALTRI FOGLI.**

Spazio riservato alla correzione

1	2	3	4	5	6	Tot/100
/17	/17	/16	/16	/17	/17	/100

1. *17 punti*

Si risolva la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 3$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 2 \text{ se } n \geq 2.$$

2. 17 punti

Si dimostri che $h(n) = \Theta(\log n)$, nelle ipotesi che la funzione $h(n)$ soddisfi:

$$\lfloor \log n \rfloor \leq h(n) \leq 3 \lceil \log(n+1) \rceil - 1.$$

3. 16 punti

Descrivere (verbalmente e tramite pseudocodice) ed analizzare un algoritmo HEAP-DECREASE-KEY(A, i, key) che dati un max-heap A , un indice i e una chiave key , sostituisca il valore della chiave $A[i]$ col nuovo valore key , nelle ipotesi che $key < A[i]$. Giustificare la risposta.

4. 16 punti

Un albero binario si dice *1-bilanciato* se per ogni nodo l'altezza del sottoalbero sinistro e quella del sottoalbero destro differiscono al più di 1.

a) Si disegnino tutti gli alberi 1-bilanciati di altezza 2.

b) Si dimostri che l'altezza $h(n)$ di un albero 1-bilanciato con n nodi soddisfa: $h(n) \geq \lfloor \log n \rfloor$.

5. 17 punti

Si consideri la seguente funzione $c(i, j)$ definita per ogni $1 \leq i, j \leq n$ da:

$c(1, j) = 1$ per ogni $1 \leq j \leq n$;

$c(2, j) = 2$ per ogni $2 \leq j \leq n$;

$c(i, 1) = 3$ per ogni $2 \leq i \leq n$;

$c(i, 2) = 4$ per ogni $3 \leq i \leq n$;

$c(i, j) = \max\{3c(i-2, j), c(i, j-1) - 2\}$ per ogni $3 \leq i, j \leq n$.

a) Disegnare la matrice c per $n = 4$.

b) Scrivere lo pseudocodice di un algoritmo di programmazione dinamica per il calcolo di $c(n, n)$ ed analizzarne la complessità. E' necessario giustificare la risposta.

6. 17 punti

Si consideri il problema di decidere se, dati una famiglia $F = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ di insiemi e un intero k , esiste un insieme X di cardinalità k tale che ogni insieme $S_i \in F$ abbia almeno un elemento in X .

a) Si scriva il linguaggio DELEGATI associato a tale problema.

b) Si dimostri che DELEGATI appartiene a NP, descrivendo l'algoritmo e la struttura dati utilizzati a tale scopo,

i. nel caso generale

ii. nel caso in cui se esiste $x \in S_i \cap S_j$ per qualche $i, j = 1, 2, \dots, n$, allora $x \in S_h$ per ogni $h = 1, 2, \dots, n$.

PAGINA PER APPUNTI O 'BRUTTA COPIA'

PAGINA PER APPUNTI O 'BRUTTA COPIA'